S. Boldo et S. Le Roux Le 5 janvier 2005

Logique – TD n°12

Logique épistémique

Exercice 1 : ***Les femmes de Bagdad***

Le Calife Haroun-el-Poussah de Bagdad convoqua un jour ses quatre vizirs, tous mariés et au moment où se passe cette histoire monogames, et leur dit :
« Afin de lutter contre l'adultère, je demande à chacun d'entre vous, s'il s'aperçoit qu'il est trompé, de tuer sa femme le soir même. »
Et le machiavélique Grand Vizir Iznogoud, jaloux de la félicité conjugale des autres vizirs, une fois dans l'antichambre avec eux, ajouta :
« Le Commandeur des Croyants a raison, il faut faire quelque chose ! Je peux en effet vous dire qu'au moins l'une de vos femmes est infidèle à son mari. »

Évidemment, les vizirs sont obséquieux comme tous les vizirs, et satisfont donc comme à leur habitude les moindres désirs du Calife, et sont intelligents et logiques comme tous les vizirs, et sont donc tout à fait capable de tirer des conclusions sur leur propre situation à partir du comportement des autres.

Cependant, comme il est d'ailleurs toujours d'usage, les maris trompés sont les seuls à ignorer l'infidélité de leur femme. Chaque mari sait quelles sont les femmes infidèles des autres maris, mais ignore si sa propre femme l'est ou non.

Rien ne se passe pendant deux jours. Mais le troisième jour, tous les maris trompés exécutent leurs femmes.

Déterminer combien de femmes étaient infidèles (en utilisant un modèle de Kripke).

Rappels de cours : ***Logique épistémique***

Les formules de la logique épistémique sont obtenues par l'adjonction à la logique propositionnelle classique de connecteurs unaires $\mathbb{K}_i$: $\mathbb{K}_i\varphi$ se lit « l'agent i sait que φ ».

Les règles sont les suivantes :

$$\frac{\varphi \text{ est un théorème classique}}{\vdash \varphi}\,\text{(classique)}$$

$$\frac{\vdash \varphi \qquad \vdash \varphi\to\psi}{\vdash \psi}\,(\textit{modus ponens}) \qquad \frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathbb{K}_i\varphi}\,\text{(généralisation)}$$

$$\frac{}{\vdash \mathbb{K}_i\varphi\to\mathbb{K}_i(\varphi\to\psi)\to\mathbb{K}_i\psi}\,\text{(distribution)} \qquad \frac{}{\vdash \mathbb{K}_i\varphi\to\varphi}\,\text{(connaissance)}$$

$$\frac{}{\vdash \mathbb{K}_i\varphi\to\mathbb{K}_i\mathbb{K}_i\varphi}\,\text{(introspection positive)} \qquad \frac{}{\vdash \neg\mathbb{K}_i\varphi\to\mathbb{K}_i\neg\mathbb{K}_i\varphi}\,\text{(introspection négative)}$$

en plus des règles et théorèmes de la logique minimale :

$$\frac{}{\vdash \alpha\to\beta\to\alpha}\,\text{(K)} \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,\text{(S)} \qquad \frac{\vdash \alpha\to\beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}\,(\textit{MP}) \qquad \frac{}{\vdash \bot\to\alpha}\,\text{(F)}$$

$$\frac{}{\vdash \alpha\to\alpha}\,\text{(I)} \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\to\beta)\to(\gamma\to\alpha)\to\gamma\to\beta}\,\text{(B)} \qquad \frac{\vdash \alpha\to\beta\to\gamma}{\vdash \beta\to\alpha\to\gamma}\,\text{(C)} \qquad \frac{\vdash \alpha\to\beta \quad \vdash \beta\to\gamma}{\vdash \alpha\to\gamma}\,\text{(cut)}$$

$(\vee 0)$: $\vdash (p\to r)\to(q\to r)\to(p\vee q)\to r$ $(\vee 1)$: $\vdash p\to(p\vee q)$ $(\vee 2)$: $\vdash q\to(p\vee q)$

$(\wedge 0)$: $\vdash p\to q\to(p\wedge q)$ $(\wedge 1)$: $\vdash (p\wedge q)\to p$ $(\wedge 2)$: $\vdash (p\wedge q)\to q$

$$\frac{\vdash \alpha\to\alpha\to\beta}{\vdash \alpha\to\beta}\,\text{(Double)} \qquad \frac{\vdash \gamma\to\alpha \quad \vdash \gamma\to\beta}{\vdash \gamma\to\alpha\wedge\beta}\,\wedge 3 \qquad \frac{\vdash \alpha\to\gamma \quad \vdash \beta\to\gamma}{\vdash (\alpha\vee\beta)\to\gamma}\,\vee 3 \qquad \frac{\vdash \beta\to\alpha}{\vdash \neg\alpha\to\neg\beta}\,\text{Contrap}$$

Exercice 2 : ***Tu sais ou tu sais pas ?***

Savez-vous prouver les assertions suivantes ?

1. $\mathbb{K}_i(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\mathbb{K}_i\varphi\wedge\mathbb{K}_i\psi$;
2. $\mathbb{K}_i\varphi\wedge\mathbb{K}_i\psi\rightarrow\mathbb{K}_i(\varphi\wedge\psi)$;
3. $\mathbb{K}_i(\varphi\vee\psi)\rightarrow\mathbb{K}_i\varphi\vee\mathbb{K}_i\psi$;
4. $\mathbb{K}_i\varphi\vee\mathbb{K}_i\psi\rightarrow\mathbb{K}_i(\varphi\vee\psi)$.

Exercice 3 : ***Britain's Plain English Campaign*** **(**www.plainenglish.co.uk**)**

M. Donald Rumsfeld, Secrétaire d'État américain à la Défense, a reçu lundi 1er décembre 2003 le prix « *Foot in Mouth* » (langue de bois) décerné par la *Britain's Plain English Campaign* à l'auteur de la phrase la plus absconse pour la déclaration suivante, faite à une conférence de presse sur l'Irak :

"Reports that say that something hasn't happened are always interesting to me, because as we know, there are known knowns, there are things we know we know. We also know there are known unknowns ; that is to say we know there are some things we do not know. But there are also unknown unknowns – the ones we don't know we don't know."

1°) Traduire cette phrase par une formule de la logique épistémique.
2°) La formule est-elle vraie ou fausse ?
3°) Que pensez-vous des « *unknown knows* » (*things we do not know that we know*) ?

Exercice 4 : ***Logique déontique***

On introduit l'opérateur $\mathbb{B}$ défini par $\mathbb{B}_i\varphi = \neg\mathbb{K}_i\neg\varphi$

Montrer que :

1. $\mathbb{B}_i\mathbb{B}_i\varphi\rightarrow\mathbb{B}_i\varphi$;
2. $\mathbb{B}_i\neg\mathbb{B}_i\varphi\rightarrow\neg\mathbb{B}_i\varphi$;
3. $\neg\mathbb{B}_i\varphi\rightarrow\neg\varphi$.