

Logique – TD n°10

Modèles

Rappels de cours : Modèles

On considère un langage \mathcal{L} , i.e. un couple $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$, où \mathcal{F} est un ensemble de symboles fonctionnels d'arités définies et \mathcal{R} est un ensemble de symboles relationnels d'arités définies.

Sur ce langage, on peut définir des \mathcal{L} -termes et des \mathcal{L} -formules par la grammaire suivante, où \mathcal{X} est un ensemble infini de variables ($R \in \mathcal{R}$; $f \in \mathcal{F}$; $x \in \mathcal{X}$) :

$$\begin{aligned} \varphi, \psi & ::= \perp \mid R(t_1, \dots, t_k) \mid \neg\varphi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \forall x(\varphi) \mid \exists x(\varphi) & \text{(formule)} \\ t_1, \dots, t_k & ::= x \mid f(t_1, \dots, t_k) & \text{(terme)} \end{aligned}$$

On appelle \mathcal{L} -structure tout couple $\mathcal{M} = \langle M, I \rangle$ où M est un ensemble appelé *domaine* et I une *interprétation*, i.e. une fonction qui à chaque symbole d'arité k de \mathcal{F} associe une fonction k -aire totale de M et à chaque symbole d'arité k de \mathcal{R} associe une partie de M^k .

Étant donné un contexte $\gamma : \mathcal{X} \rightarrow M$, on peut étendre l'interprétation aux termes :

- $I_\gamma(x) = \gamma(x)$;
- $I_\gamma(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(I_\gamma(t_1), \dots, I_\gamma(t_k))$.

La *valeur de vérité* d'une \mathcal{L} -formule dans une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} avec le contexte γ est un booléen (0 ou 1) défini comme suit :

- $V_\gamma(\perp) = 0$;
- $V_\gamma(R(t_1, \dots, t_k)) = 1$ si et seulement si $(I_\gamma(t_1), \dots, I_\gamma(t_k)) \in I_\gamma(R)$;
- $V_\gamma(\neg\varphi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 0$;
- $V_\gamma(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 0$ ou $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\varphi \wedge \psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 1$ et $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\varphi \vee \psi) = 1$ si et seulement si $V_\gamma(\varphi) = 1$ ou $V_\gamma(\psi) = 1$;
- $V_\gamma(\forall x(\varphi)) = 1$ si et seulement si pour tout $m \in M$, $V_{\gamma[x \mapsto m]}(\varphi) = 1$
- $V_\gamma(\exists x(\varphi)) = 1$ si et seulement si il existe $m \in M$ tel que $V_{\gamma[x \mapsto m]}(\varphi) = 1$

Si φ est une formule close, sa valeur de vérité dans \mathcal{M} ne dépend pas de l'environnement. Si cette valeur est 1, l'on dit que \mathcal{M} est un *modèle* de φ , ou encore que \mathcal{M} satisfait φ , ce que l'on note $\mathcal{M} \models \varphi$. Sinon, l'on dit que \mathcal{M} est un *contre-modèle* de φ .

Une formule est appelée *théorème* si toute \mathcal{L} -structure en est un modèle. Un ensemble de formules est dit *cohérent* s'il existe une \mathcal{L} -structure qui satisfait toutes ses formules.

Exercice 1 : Interprétation

On considère le langage $\langle \emptyset, \{R\} \rangle$, où R est un symbole de relation binaire. Pour chacune des formules et des structures ci-dessous, dire si la structure est un modèle ou un contre-modèle de la formule.

1. $\forall x \forall y \forall z (\neg R(x, x) \wedge (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)))$
2. $\exists x \forall y (R(x, y) \vee x = y)$
3. $\exists x \forall y (R(y, x) \vee x = y)$
4. $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow (z = y \vee R(y, z))))$
5. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z ((R(x, z) \wedge R(z, y))))$

1. $\langle \mathbb{N}, R \mapsto < \rangle$: \mathbb{N} où R est interprété par $<$.
2. $\langle \mathbb{Q}, R \mapsto < \rangle$: \mathbb{Q} où R est interprété par $<$.
3. $\langle \mathfrak{P}\mathbb{N}, R \mapsto \subsetneq \rangle$: les parties de \mathbb{N} où R est interprété par \subsetneq .

Exercice 2 : Satisfaction

Soit $\mathcal{L} = \langle \{0, 1, +, \times\}, \{=\} \rangle$ où 0 et 1 sont nullaires, + et \times sont binaires et = est binaire. Soient $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{Z}, I_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle M_{2,2}(\mathbb{Z}), I_2 \rangle$, $\mathcal{M}_3 = \langle \mathbb{Z}[i], I_3 \rangle$, où I_1, I_2, I_3 interprètent de manière usuelle les symboles de \mathcal{L} .

Écrire des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ telles que :

1. $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1, \mathcal{M}_2 \not\models \varphi_1, \mathcal{M}_3 \not\models \varphi_1$.
2. $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_2, \mathcal{M}_2 \models \varphi_2, \mathcal{M}_3 \not\models \varphi_2$.
3. $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_3, \mathcal{M}_2 \not\models \varphi_3, \mathcal{M}_3 \models \varphi_3$.

Exercice 3 : Nombre d'éléments

Écrire des formules signifiant :

1. Le domaine de la structure a au moins n éléments.
2. Le domaine de la structure a au plus n éléments.
3. Le domaine de la structure a exactement n éléments.

Exercice 4 : Théorie des groupes

On considère les formules sur le langage $\mathcal{L} = \langle \{\varepsilon, ^{-1}, *\}, \{=\} \rangle$, où $\varepsilon, ^{-1}, *$ sont respectivement nullaire, unaire et binaire et où = est binaire.

La théorie de l'égalité sur \mathcal{L} est constituée des axiomes suivants :

- (réfl) : $\forall x(x = x)$
- (sym) : $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x)$
- (trans) : $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
- (cptb- $^{-1}$) : $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow x^{-1} = y^{-1})$
- (cptb- $*$) : $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 = y_1 * y_2)$.

La théorie des groupes est la théorie \mathcal{G} obtenue en ajoutant à cette théorie les trois axiomes :

- (assoc) : $\forall x \forall y \forall z(x * (y * z) = (x * y) * z)$
- (eltn) : $\forall x(x * \varepsilon = x \wedge \varepsilon * x = x)$
- (inv) : $\forall x(x * x^{-1} = \varepsilon \wedge x^{-1} * x = \varepsilon)$

Pour la théorie des groupes abéliens \mathcal{GA} , on rajoute encore l'axiome :

- (comm) : $\forall x \forall y(x * y = y * x)$

- 1°) Montrer que \mathcal{G} et \mathcal{GA} sont cohérentes.
- 2°) Montrer formellement dans \mathcal{G} que l'inverse à droite est unique.
- 3°) Montrer que $\mathcal{GA} \vdash \forall x \forall y((x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1})$.
- 4°) Montrer que tout modèle de $\mathcal{G} \cup \{\forall x(x * x = e)\}$ satisfait \mathcal{GA} .