S. Boldo et S. Le Roux Le 29 septembre 2004

Logique – TD n°1

Introduction à la logique

Rappels de cours : ***Formules – Validité classique***

Les *formules* sont définies à partir d'un ensemble $\mathcal{V}$ de *variables propositionnelles* et d'un ensemble $\mathcal{C}$ de *connecteurs* de différentes arités.

Une $\mathbf{B}$-*valuation* est une fonction $v : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbf{B} = \{0, 1\}$. Elle s'étend canoniquement aux formules en interprétant les connecteurs. Ainsi, si $\tilde{\maltese} : \mathbf{B}^k \longrightarrow \mathbf{B}$ interprète le connecteur k-aire $\maltese$, la valeur de $\maltese(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ est : $\tilde{v}(\maltese(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)) = \tilde{\maltese}(\tilde{v}(\varphi_1), \ldots, \tilde{v}(\varphi_k))$.

Une formule est dite :

- *classiquement valide* si elle vaut 1 pour toute valuation ;
- *classiquement satisfiable* si elle vaut 1 pour au moins une valuation ;
- *classiquement contradictoire* si elle vaut 0 pour toute valuation.

Les formules classiquement valides (respectivement contradictoires) sont aussi appelées des *tautologies* (respectivement des *antilogies*). Une formule est dite *satisfaite* par une valuation si elle vaut 1 par cette valuation.

Une logique est définie par ses *connecteurs*, ses *jugements*, et ses *axiomes* et *règles* (les premiers étant un cas particulier des secondes). Une règle s'écrit :

$$\frac{\Pi_1 \quad \cdots \quad \Pi_k}{\Phi}\,(\ldots)$$

Les Π_i sont les *prémisses* de la règle ; Φ est sa *conclusion*. Ce sont tous des jugements de la logique. Un axiome est une règle sans prémisses. La règle précédente s'interprète comme suit : « Si Π_1, ..., Π_k sont des théorèmes, alors Φ est également un théorème. »
À partir des règles, on construit des *arbres d'inférence*, qui démontrent des théorèmes.

Une règle est dite *classiquement correcte* si lorsque ses prémisses sont classiquement satisfaites, alors sa conclusion l'est également. Une règle n'appartenant pas à une logique est dite *correcte* dans cette logique si lorsque ses prémisses sont des théorèmes de la logique, alors sa conclusion l'est également.

Exercice 1 : ***Le modèle classique*** $\{0, 1\}$

1°) Donner les interprétations canoniques des connecteurs $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$ et $\wedge$.
2°) Montrer que l'*axiome du tiers exclu* : $\varphi\vee\neg\varphi$ est une tautologie.
3°) Montrer que la formule $\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$ est une tautologie.
4°) Montrer que la *formule de Pierce* : $((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi$ est une tautologie.
5°) Énoncer une règle qui pourrait s'interpréter comme la règle de contraposition.
6°) Soient α une antilogie et β une formule quelconque. Montrer que $\alpha\rightarrow\beta$ est une tautologie.

« M. Bertrand Russell arrive à cette conclusion qu'une proposition fausse quelconque implique toutes les autres propositions vraies ou fausses. M. Couturat dit que cette proposition semblera paradoxale au premier abord. Il suffit cependant d'avoir corrigé une mauvaise thèse de mathématique pour connaître combien M. Russell a vu juste. Le candidat se donne souvent beaucoup de mal pour trouver la première équation fausse ; mais dès qu'il l'a obtenue, ce n'est plus qu'un jeu pour lui d'accumuler les résultats les plus surprenants, dont quelques uns peuvent même être exacts. » (Henri Poincaré)

7°) Montrer que la formule $\varphi\wedge\neg\varphi$ est une antilogie.
8°) « Cette phrase a cinq mots. » et sa négation « Cette phrase n'a pas cinq mots. » sont toutes deux vraies. Aurait-on trouvé une proposition φ telle que $\varphi\wedge\neg\varphi$ soit vraie ?

Rappels de cours : ***Théorie des groupes***

On considérera la théorie des groupes définie sur le langage des symboles $\{e, *, ^{-1}\}$, tous symboles de fonctions, d'arités respectives 0, 2 et 1. Cette théorie est constituée des règles suivantes :

- sur l'égalité : $\dfrac{}{x = x}$ (Eg) $\qquad \dfrac{y = x}{x = y}$ (Sym) $\qquad \dfrac{x = y \quad y = z}{x = z}$ (Trans)
- sur l'interaction égalité/langage : $\dfrac{x = x' \quad y = y'}{x * y = x' * y'}$ (Eq*) $\qquad \dfrac{x = y}{x^{-1} = y^{-1}}$ (EqI)
- sur l'opération du groupe : $\dfrac{}{(x * y) * z = x * (y * z)}$ (Ass)
- sur l'élément neutre : $\dfrac{}{x * e = x}$ (E1) $\qquad \dfrac{}{e * x = x}$ (E2)
- sur l'inverse : $\dfrac{}{x * x^{-1} = e}$ (I1) $\qquad \dfrac{}{x^{-1} * x = e}$ (I2)

Exercice 2 : ***Mon premier arbre de preuves***

Montrer que les énoncés suivants sont vrais dans la théorie des groupes définie ci-dessus :

1°) $e = e^{-1}$

2°) $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$

3°) la règle $\dfrac{x * y = e}{y = x^{-1}}$ (Q3)

4°) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

5°) Si pour tout z, on a $z * z = e$, alors $x * y = y * x$.

6°) la règle $\dfrac{(a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)}{a * b = b * a}$ (Q6)