S. Boldo et S. Le Roux Le 10 novembre 2004

Corrigé du TD de logique n°7

λ-calcul – réduction

Exercice 1 : ***Les entiers en λ-calcul***

1°) $1 = \lambda s.\lambda x.sx$, $2 = \lambda s.\lambda x.s(sx)$, $\lambda s.\lambda x.s(s(sx))$.
Le combinateur n compose n fois avec elle-même la fonction à laquelle il est appliqué.
2°) $\mathsf{succ} = \lambda n.\lambda s.\lambda x.s(nsx)$; $\mathsf{plus} = \lambda a.\lambda b.\lambda s.\lambda x.(as)(bsx)$; $\mathsf{fois} = \lambda a.\lambda b.\lambda s.a(bs)$.
3°) $\mathsf{Z} = \lambda n.n(\mathsf{TF})\mathsf{T}$(on vérifie que $\mathsf{Z}n \overset{\beta}{\equiv} (\mathsf{TF})^n\mathsf{T}$).
4°) On pose $P = \lambda n.n(\lambda p.\lambda x.x(\mathsf{succ}(p\mathsf{T}))(p\mathsf{T}))(\lambda z.z00)$. On a donc $\mathsf{pred} \overset{\beta}{\equiv} \lambda n.Pn\mathsf{F}$.
On va montrer par récurrence que $P\ \mathsf{n} \overset{\beta}{\equiv} \lambda x.x\mathsf{n}(\mathsf{n}')$, où n' est le prédécesseur de n. On aura donc que $P\ \mathsf{n}\ \mathsf{T} \overset{\beta}{\equiv} \mathsf{n}$ et $P\ \mathsf{n}\ \mathsf{F} \overset{\beta}{\equiv} \mathsf{n}'$, ce qui permet de conclure que pred a bien le comportement escompté, et que $\mathsf{pred}\ 0$ vaut 0.

- $P\ 0 \overset{\beta}{\equiv} (\lambda z.z00)$.
- $$\begin{aligned} P\ (\mathsf{n}{+}1) &\overset{\beta}{\equiv} (\mathsf{n}{+}1)(\lambda p.\lambda x.x(\mathsf{succ}(p\mathsf{T}))(p\mathsf{T}))(\lambda z.z00) \\ &\overset{\beta}{\equiv} (\lambda p.\lambda x.x(\mathsf{succ}(p\mathsf{T}))(p\mathsf{T}))(P\ \mathsf{n}) \\ &\overset{\beta}{\equiv} \lambda x.x(\mathsf{succ}(P\mathsf{n}\mathsf{T}))(P\mathsf{n}\mathsf{T}) \\ &\overset{\beta}{\equiv} \lambda x.x(\mathsf{succ}\ \mathsf{n})\mathsf{n} \\ &\overset{\beta}{\equiv} \lambda x.x(\mathsf{n}{+}1)\mathsf{n}. \end{aligned}$$

5°) $\mathsf{moins} = \lambda a.\lambda b.b\,\mathsf{pred}\,a$.

Exercice 2 : ***Fonctions récursives***

1°) C'est T car $\mathsf{Pair}(\mathsf{Y}\ \mathsf{Pair}) = \mathsf{Y}\ \mathsf{Pair}$.
2°) On pose :
$\mathsf{Reste} = \lambda F.\lambda m.\lambda n.(\mathsf{Z}\ (\mathsf{moins}\,n\,m))(F(\mathsf{moins}\,m\,n)n)m$
$\mathsf{Quotient} = \lambda F.\lambda m.\lambda n.(\mathsf{Z}\ (\mathsf{moins}\,n\,m))(\mathsf{succ}\ (F(\mathsf{moins}\,m\,n)n))0$
et on a $\mathsf{quotient} = \mathsf{Y}\ \mathsf{Quotient}$ et $\mathsf{reste} = \mathsf{Y}\ \mathsf{Reste}$.

Exercice 3 : ***Réduction – vrai ou faux ?***

On introduit les deux réductions suivantes (cf. fig. 3), pour les contre-exemples :

- $\xrightarrow{P}$ définie par : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \xrightarrow{P} \alpha_{i+1}$ et $\alpha_i \xrightarrow{P} \beta_i$;
- $\xrightarrow{Q}$ définie par : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \xrightarrow{Q} \alpha_{i+1}$ et $\alpha_i \xrightarrow{Q} \theta$;
- $\xrightarrow{D}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par : $\{(0,0) \xrightarrow{D} (i,1) / i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \cup \{(i,j) \xrightarrow{D} (i,j{+}1) / i,j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, j < i\}$.

1°) Une réduction fortement normalisante est faiblement normalisante. En effet, on suppose $\xrightarrow{R}$ fortement mais pas faiblement normalisante. Soit a_0 n'admettant pas de forme normale. Alors il existe a_1 tel que $a_0 \xrightarrow{R} a_1$ et a_1 n'admet pas de forme normale. On suppose avoir construit une suite de réductions $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que a_n n'admette pas de forme normale. Alors il existe a_{n+1} tel que $a_n \xrightarrow{R} a_{n+1}$ et a_n n'admette pas de forme normale. On construit ainsi une suite de réductions infinie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, contradiction, C.Q.F.D.

La réciproque est fausse ; en effet, $\xrightarrow{Q}$ est faiblement normalisante mais pas fortement normalisante : tout élément admet θ comme forme normale mais $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réductions infinie. C.Q.F.D.

2°) On suppose $\xrightarrow{R}$ non confluente. Pour tout e, on note $\check{e}$ la forme normale de e. Alors il existe a, b, c tels que $a \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow b$ et $a \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow c$ mais pour tout x $\neg(b \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow x \wedge c \xrightarrow{R}\!\!\!\!\rightarrow x)$, ce qui signifie $\check{b} \neq \check{c}$. Or donc $\check{a} = \check{b} = \check{c}$, contradiction, C.Q.F.D.

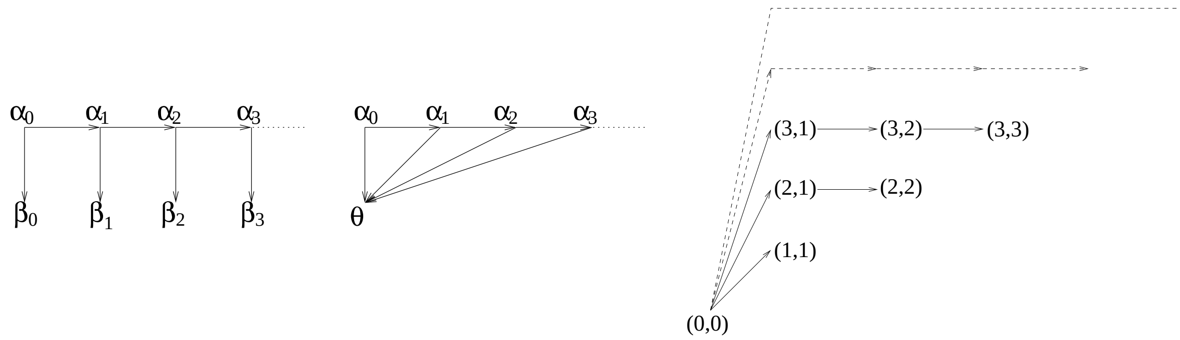

FIG. 3 – de gauche à droite, les réductions $\xrightarrow{P}$, $\xrightarrow{Q}$ et $\xrightarrow{D}$

$\xrightarrow{Q}$ est telle que tout élément admet une unique forme normale (θ) ; en revanche, n'étant pas fortement normalisante, elle n'est pas convergente. C.Q.F.D.
3°) Oui. On suppose $\xrightarrow{R}$ cyclique. Il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a = a_0 \xrightarrow{R} a_1 \xrightarrow{R} \ldots \xrightarrow{R} a_m = b$ et $b = a_m \xrightarrow{R} a_{m+1} \xrightarrow{R} \ldots \xrightarrow{R} a_n = a$. Alors $(a_{i \bmod n+1})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réductions infinie. Donc toute réduction fortement normalisante est acyclique, C.Q.F.D.
4°) Non : $\xrightarrow{P}$ est fortement normalisante, non confluente, acyclique mais pas fortement normalisante. C.Q.F.D.
5°) Non : $\xrightarrow{Q}$ est faiblement normalisante, non confluente, acyclique mais pas fortement normalisante. C.Q.F.D.
6°) Oui : s'il existe une suite de réductions infinie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \xrightarrow{R}{}^n a_n$ et la réduction n'est pas bornée, C.Q.F.D.
7°) Non : la relation $\xrightarrow{D}$ est fortement normalisante mais non bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0,0) \xrightarrow{D}{}^n (n,n)$. C.Q.F.D..
8°) Oui : c'est le lemme de König.
On suppose $\xrightarrow{R}$ finitaire et fortement normalisante.
Pour tout élément α, on pose $N(\alpha) = \min\{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists \xi (\alpha \xrightarrow{R}{}^n \xi)\}$ (avec la convention usuelle que $\min \emptyset = \infty$). Il est clair que $N(\alpha) = \min\{N(\beta) + 1 \,/\, \alpha \xrightarrow{R} \beta\}$.
On suppose que $\xrightarrow{R}$ est non bornée, *i.e.* il existe a_0 tel que $N(a_0) = \infty$. On suppose avoir construit $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $N(a_i) = \infty$. Alors $\min\{N(b) + 1 \,/\, a_n \xrightarrow{R} b\} = \infty$. Or $\xrightarrow{R}$ est finitaire, donc $\{N(b) + 1 \,/\, a_n \xrightarrow{R} b\}$ est fini, donc son minimum est un de ses éléments donc il existe a_{n+1} tel que $a_n \xrightarrow{R} a_{n+1}$ et $N(a_{n+1}) + 1 = \infty$, *i.e.* $N(a_{n+1}) = \infty$.
On a donc construit ainsi une suite infinie de réductions $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui contredit le fait que $\xrightarrow{R}$ est fortement normalisante, C.Q.F.D.
9°) Oui. C'est évident, car une relation réflexive sur un ensemble non vide ne peut pas être fortement normalisante. C.Q.F.D.