S. Boldo et S. Le Roux — Le 26 octobre 2004

Corrigé du TD de logique n°5

λ-calcul

Exercice 1 : ***Combinateurs amusants***

1°) On pose $X = (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))$. $X \xrightarrow{\beta} F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))) = FX$.
2°) On pose $\theta = \lambda x.xx(xx)$. On considère $T = \theta\theta$.
3°) On pose $U = \mathsf{KI}$. $UM = \mathsf{KI}M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{I}$ et $UU = \mathsf{KI}U \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{I}$.
4°) $(AA)A \overset{\beta}{\equiv} (\mathsf{SI}A)A \overset{\beta}{\equiv} \mathsf{I}A(AA) \overset{\beta}{\equiv} A(AA)$
5°) On pose $C = \lambda x.\mathsf{K}(xx)$ et $V = \mathsf{K}(CC)$. $VM = \mathsf{K}(CC)M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} CC \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{K}(CC) = V$.
   Ou alors $A = \lambda xy.xx$ et on prend $\lambda z.AA$.

Exercice 2 : ***Point fixe***

Exemples de combinateurs de point fixe

1°) $\Theta F = (\lambda x.\lambda y.y(xxy))\text{þ}F \xrightarrow{\beta}\xrightarrow{\beta} F(\text{þþ}F) = F(\Theta F)$.
2°) $\mathsf{YG} = (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))(\lambda y.\lambda f.f(yf))$
   $\xrightarrow{\beta} (\lambda x.(\lambda y.\lambda f.f(yf))(xx))(\lambda x.(\lambda y.\lambda f.f(yf))(xx))$
   $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.\lambda f.f(xxf))(\lambda x.\lambda f.f(xxf)) = \text{þþ} = \Theta$.
Donc $\mathsf{YG} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \Theta$.

Caractérisation des combinateurs de point fixe

3°) M est un combinateur de point fixe donc $Mx \overset{\beta}{\equiv} x(Mx)$.
4°) On suppose que $M \not\overset{\beta}{\equiv} \lambda y.R$. $Mx \overset{\beta}{\equiv} x(Mx)$, donc par confluence de β, $Mx \downarrow_\beta x(Mx)$. Or, comme $M \not\overset{\beta}{\equiv} \lambda y.R$, $Mx \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M'x$ et $x(Mx) \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} x(M''x)$. Donc $M' = x$ et $M''x = x$. Contradiction.
5°) $\lambda x.Mx \overset{\beta}{\equiv} \lambda x.(\lambda y.R)x \xrightarrow{\beta} \lambda x.R[x/y] \overset{\alpha}{\equiv} M$
6°) Si $M \overset{\beta}{\equiv} \mathsf{G}M$, alors $MF \overset{\beta}{\equiv} \mathsf{G}MF \xrightarrow{\beta} F(MF)$.
   Réciproquement, si M est un combinateur de point fixe,
$\mathsf{G}M = (\lambda y.\lambda f.f(yf))M \xrightarrow{\beta} \lambda f.f(Mf) \overset{\beta}{\equiv} \lambda f.Mf \overset{\beta}{\equiv} M$.
7°) On pose $\mathsf{Y}_0 = \mathsf{Y}$ et $\mathsf{Y}_n = \mathsf{Y}_{n-1}\mathsf{G}$. Par récurrence :
- $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}_0$ est un point fixe de G.
- $\mathsf{Y}_n = \mathsf{Y}_{n-1}\mathsf{G} = \mathsf{G}(\mathsf{Y}_{n-1}\mathsf{G}) = \mathsf{G}(\mathsf{Y}_n)$ par hypothèse de récurrence.

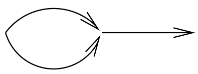
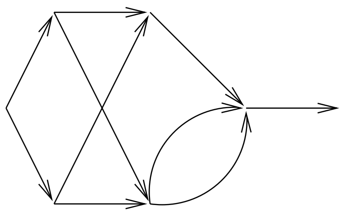
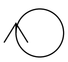
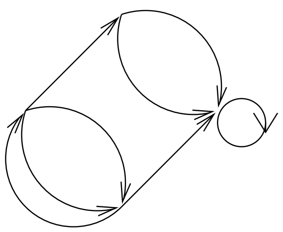
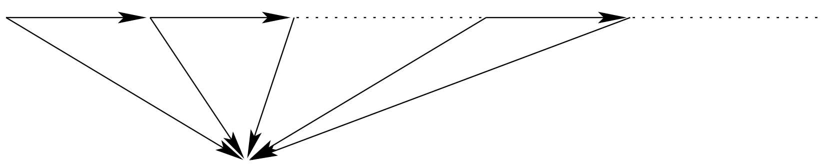
8°) $\mathsf{Y}_0 = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \xrightarrow{\beta} \lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))$
   $\mathsf{Y}^1 = \mathsf{YG} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \Theta = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) \xrightarrow{\beta} \lambda y.y((\lambda xz.z(xxz))(\lambda xz.z(xxz))y)$
   $\mathsf{Y}^2 = \mathsf{YGG} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \Theta\mathsf{G} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{G}(\Theta\mathsf{G})$
9°) Y_0, Y_1, Y_2 n'ont pas de forme normale.

Exercice posé au partiel l'an dernier

   $\text{€}F \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}{}^{26} F(\$F) = F(\text{€}F)$
car dans $lecombinateurdontvousreviez$ il y a vingt-six caractères.

Exercice 3 : ***Graphes de réduction***

Sens systématique

1.
2. 
3. 
4. 
5. 
6.
7. 

Sens créatif

1. On prend $(\lambda x.\lambda y.xx)(\lambda z.zz)\mathsf{I}$.
2. On prend $(\lambda x.\lambda y.\mathsf{I})\mathsf{I}\Omega$.
3. Soit $A = \lambda y.\lambda x.x\mathsf{I}x$. On prend $(\lambda u.\mathsf{I})(A\mathsf{I}A)$.
4. Soit $B = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda t.\lambda u.uutzyx$. On prend $BBBBBB$.
5. On prend $BBB\Omega BB$.