S. Boldo et S. Le Roux — Le 15 décembre 2004

Corrigé du TD de logique n°11

Théorie des ensembles

Exercice 1 : ***De l'axiome de la paire au théorème de la paire***

On veut montrer que $\forall a \forall b \exists d \forall x (x{\in}d \Rightarrow x{=}a \vee x{=}b)$.

L'existence de $\emptyset$ étant établie du seul fait de l'axiome de compréhension, qui est conséquence directe de l'axiome (*iv*), par l'axiome (*iii*), il existe l'ensemble $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\emptyset$, dont les éléments sont $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$.

Soient a et b deux ensembles. On définit la propriété $\varphi(s,t)$: « $(s{=}\emptyset \wedge t{=}a) \vee (s{=}\{\emptyset\} \wedge t{=}b)$ ».

Par l'axiome (*iv*), $\exists d \forall x (x{\in}d \Leftrightarrow \exists y (y{\in}\mathfrak{P}\mathfrak{P}\emptyset \wedge \varphi(y,x)))$.

Or $\exists y (y{\in}\mathfrak{P}\mathfrak{P}\emptyset \wedge \varphi(y,x))$ est logiquement équivalent à $x{=}a \vee x{=}b$.

Et donc $\forall a \forall b \exists d \forall x (x{\in}d \Rightarrow x{=}a \vee x{=}b)$. C.Q.F.D.

Exercice 2 : ***Où l'on parle d'ordinaux***

Ensemble bien ordonné ; bon ordre

1°) Soit (a,R) un ensemble (strictement) bien ordonné. Soient x et y deux éléments de a. La paire $\{x,y\}$ admet un plus petit élément, donc x et y sont comparables. C.Q.F.D.

Définition et propriétés des ordinaux

2°) La vérification est facile. C.Q.F.D.

3°) Les segments initiaux de α sont les ensembles $(\cdot{\in}\xi)$ pour $\xi{\in}\alpha$.

Or $(\cdot{\in}\xi) = \{\eta{\in}\alpha \,/\, \eta{\in}\xi\} = \xi \cap \alpha = \xi$ car $\xi{\subset}\alpha$ car $\xi{\in}\alpha$ et α est un ordinal. C.Q.F.D.

4°) Soit $\xi{\in}\alpha$. Alors $\xi{\subset}\alpha$ et donc $\in$ est un bon ordre sur ξ. D'autre part, si $\eta{\in}\xi$ et $\epsilon{\in}\eta$, alors $\eta{\in}\alpha$ (car $\xi{\subset}\alpha$) et donc $\epsilon{\in}\alpha$ (car $\eta{\subset}\alpha$). Comme $\in$ est un ordre strict (donc une relation transitive) sur α, on a donc $\epsilon{\in}\xi$. C.Q.F.D.

5°) $\in$ est un ordre strict (donc antiréflexif) sur α donc si $\alpha{\in}\alpha$, alors $\alpha{\notin}\alpha$, ce qui équivant logiquement à $\alpha{\notin}\alpha \vee \alpha{\notin}\alpha$, donc à $\alpha{\notin}\alpha$. C.Q.F.D.

6°) On pose $\xi = \alpha \cap \beta$. Soient $\eta{\in}\xi$ et $\epsilon{\in}\eta$. Alors $\eta{\in}\alpha$ et $\eta{\in}\beta$ par définition de ξ donc $\eta{\subset}\alpha$ et $\eta{\subset}\beta$ car α et β sont des ordinaux donc $\epsilon{\in}\alpha$ et $\epsilon{\in}\beta$ donc $\epsilon{\in}\xi$. Donc ξ est un segment initial de α et de β, donc d'une part $\xi{=}\alpha$ ou bien $\xi{\in}\alpha$ et d'autre part $\xi{=}\beta$ ou bien $\xi{\in}\beta$. Il y donc quatre cas possibles s'excluant mutuellement :

(a) $\xi{=}\alpha \wedge \xi{=}\beta$; (b) $\xi{\in}\alpha \wedge \xi{=}\beta$; (c) $\xi{=}\alpha \wedge \xi{\in}\beta$; (d) $\xi{\in}\alpha \wedge \xi{\in}\beta$.

Les cas (a), (b), (c) correspondent aux trois propositions énoncées. Quant au cas (d), il est impossible car si cette proposition est vraie, alors ξ est un ordinal (comme élément d'un ordinal) et de plus $\xi{\in}\alpha \cap \beta{=}\xi$, ce qui contredit la question précédente. C.Q.F.D.

7°) On vient de montrer que $\in$ est un ordre total strict sur $\mathfrak{O}$. De plus, pour tout ordinal α, il est évident que $(\cdot{\in}\alpha) = \alpha$. C.Q.F.D.

8°) Soient α et β deux ordinaux tels que $\alpha{\subset}\beta$. On suppose que $\alpha > \beta$. Alors $\beta{\subset}\alpha$ (car β est un ordinal) et donc, comme $\alpha{\subset}\beta$ par définition de β, $\alpha{=}\beta$, contradiction. Donc $\alpha \leqslant \beta$.

Réciproquement, soient α et β deux ordinaux tels que $\alpha \leqslant \beta$. Soit $\alpha{=}\beta$; soit $\alpha < \beta$, *i.e.* $\alpha{\in}\beta$. Dans les deux cas $\alpha{\subset}\beta$ (dans le second car β est un ordinal). C.Q.F.D.

9°) On suppose que $\mathfrak{O}(\cdot)$ est un ensemble o. Alors o est bien ordonné par $\in$. En outre, soit $\alpha{\in}o$. Les éléments de α sont des ordinaux (comme éléments d'un ordinal) donc sont éléments de

o donc $\alpha \subset o$. Ce qui montre que o est un ordinal, ce qui s'écrit $\mathfrak{O}(o)$, autrement dit, $o \in o$, ce qui est une contradiction. Donc $\mathfrak{O}$ n'est pas un ensemble. C.Q.F.D..
10°) Soit α un ordinal. Tout segment initial strict de $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un segment initial de α donc bien ordonné par $\in$, qui est par conséquent un bon ordre sur β. En outre tout élément de β est soit α soit un élément de α et est donc inclus dans β par transitivité de l'inclusion. Donc β est bien un ordinal.
Soit un ordinal γ tel que $\beta \geqslant \gamma > \alpha$. Alors $\alpha \in \gamma$ par définition de l'ordre et $\alpha \subset \gamma$ car γ est un ordinal. Donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \gamma$, *i.e.* $\beta \leqslant \gamma$. Donc $\beta = \gamma$. C.Q.F.D.
11°) Soit a un ensemble d'ordinaux. On pose $\beta = \bigcup_{\alpha \in a} \alpha$.
Soient x et y deux éléments de β. Il existe $\xi \in a$ et $v \in a$ tels que $x \in \xi$ et $y \in v$. Donc x et y sont des ordinaux comme éléments d'ordinaux donc il sont comparables par $<$. Donc β est totalement ordonné par $<$. Soit x un sous-ensemble non vide de β. Il existe $\xi \in a$ tel que $x \cap \xi \neq \emptyset$. Alors $x \cap \xi$ (sous-ensemble non vide de l'ensemble bien ordonné ξ) admet un plus petit élément μ, qui est un ordinal comme élément de l'ordinal ξ. Soit $y \in x$ tel que $y < \mu$, *i.e.* $y \in \mu$; alors y est un ordinal et $y < \mu < \xi$ donc $y \in \xi$ donc $y \in x \cap \xi$ donc $\mu \leqslant y$, contradiction. Donc (l'ordre étant total) μ est le plus petit élément de x. Donc $<$ est un bon ordre sur β.
Soit $z \in \beta$. Il existe $\zeta \in a$ tel que $z \in \zeta$. ζ est un ordinal donc $z \subset \zeta$. Or $\zeta \subset \beta$, donc $z \subset \beta$.
Donc β est un ordinal.

Il est clair que pour tout $\alpha \in a$, $\alpha \leqslant \beta$. De plus, si pour tout $\alpha \in a$, $\gamma \geqslant \alpha$, *i.e.* $\alpha \subset \gamma$, alors $\beta \subset \gamma$, *i.e.* $\gamma \geqslant \beta$. C.Q.F.D.

Ordinaux et ensembles bien ordonnés

12°) Supposons qu'il existe des éléments $\xi \in \alpha$ tels que $\xi > f(\xi)$. Soit ϵ le plus petit d'entre eux, et soit $\eta = f(\epsilon)$. On a $\eta < \epsilon$. De plus, f étant strictement croissante, on a $f(\eta) < \eta$. η contredit donc la minimalité de ϵ. De plus, on a donc pour tout $\zeta \in \alpha$, $\gamma \leqslant f(\gamma)$. Or $f(\gamma) \in \beta$, *i.e.* $f(\gamma) < \beta$. Donc $\gamma < \beta$, *i.e.* $\gamma \in \beta$. C.Q.F.D.
13°) f et f^{-1} sont des isomorphismes d'ensembles ordonnés donc on peut leur appliquer la question précédente, ce qui donne d'une part $\alpha \leqslant \beta$ et $\forall \xi \in \alpha (\xi \leqslant f(\xi))$ et d'autre part $\beta \leqslant \alpha$ et $\forall \eta \in \beta (\eta \leqslant f^{-1}(\eta))$. On déduit de ceci que $\alpha = \beta$ et, en appliquant f à l'équation précédente, $\forall \eta \in \beta (f(\eta) \leqslant f \circ f^{-1}(\eta))$, *i.e.* $\forall \eta \in \alpha (f(\eta) \leqslant \eta)$. Et donc avec cette équation et la précédente, on obtient $\forall \xi \in \alpha (\xi = f(\xi))$. C.Q.F.D.
14°) L'unicité découle directement de la question précédente : si f est un isomorphisme de u sur α et g est un isomorphisme de u sur β, alors $g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de α sur β, et donc $\alpha = \beta$ et $g \circ f^{-1}$ est l'identité, d'où $f = g$.

On pose $v = \{x \in u / (\cdot \prec x) \text{ est isomorphe à un ordinal}\}$. Soit $x \in v$, d'après la question précédente $(\cdot \prec x)$ est isomorphe à un unique ordinal ; soit $\theta(x)$ cet ordinal.
Soient $x \in u$ et $y \in v$ tels que $x \prec y$. Alors $x \in v$ et $\theta(x) < \theta(y)$: en effet, dans l'isomorphisme de $(\cdot \prec y)$ sur $\theta(y)$, $(\cdot \prec x)$, segment initial strict de $(\cdot \prec y)$, devient un segment initial strict de $\theta(y)$, donc un ordinal $\theta(x)$ strictement inférieur à $\theta(y)$.
Par l'axiome de substitution, l'image de v par θ est un ensemble ; de plus, c'est un segment initial de $\mathfrak{O}$ car si $\zeta \leqslant \theta(x)$, ζ est isomorphe à un segment initial de $(\cdot \prec x)$, donc à un $(\cdot \prec z)$ pour un $z \leqslant x$ donc $\zeta = \theta(z)$.
Donc l'image de v par θ est un ordinal δ, et θ est un isomorphisme de v sur δ.
Si $v \neq u$, v est un segment initial $(\cdot \prec w)$ de u avec $w \in u$. Mais $(\cdot \prec w)$ est isomorphe à l'ordinal δ, donc $w \in v = (\cdot \prec w)$ donc $w \prec w$, contradiction.
Donc $v = u$, et θ est un isomorphisme de u sur l'ordinal δ. C.Q.F.D.

Exercice 3 : ***Axiome du choix et cardinaux***

L'axiome du choix

Cardinaux

1°) Ceci découle directement de l'axiome du choix (pris sous la forme du lemme de Zermelo) : soit a un ensemble, a admet un bon ordre d'après le lemme de Zermelo, et d'après la dernière question de l'exercice 3, il est isomorphe, et *a fortiori* équipotent, à un ordinal. C.Q.F.D.

2°) (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit i une injection de a dans b. a étant non vide, on choisit un élément $z{\in}a$. On définit comme suit l'application $s : b{\longrightarrow}a$: soit $y{\in}b$; s'il existe $x{\in}a$ tel que $i(x) = y$, on pose $s(y) = x$, sinon l'on pose $s(y) = z$. s est une surjection de b sur a.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit s une surjection de b dans a. a est équipotent à $\mathfrak{card}(a)$, b est équipotent à $\mathfrak{card}(b)$. Soient φ et ψ des bijections respectivement de a sur $\mathfrak{card}(a)$ et de b sur $\mathfrak{card}(b)$.
s est une surjection donc est inversible à droite. Son inverse à droite $i : b{\longrightarrow}a$ est inversible à gauche donc injective de a dans b. $j{=}\psi \circ i \circ \varphi^{-1}$ est une injection de $\mathfrak{card}(a)$ sur $\mathfrak{card}(b)$.
$m{=}(\mathrm{Im}\ j)$ est un ensemble par le schéma de compréhension – en effet il est caractérisé par la propriété s'énonçant « $\cdot{\in}\mathfrak{card}(b){\wedge}\exists z{\in}a(j(z) = \cdot)$ » – et il est donc bien ordonné. Il existe donc un isomorphisme χ de m sur un cardinal μ. χ^{-1} est un homomorphisme de l'ordinal μ sur l'ordinal $\mathfrak{card}(b)$ (car $m{\subset}\mathfrak{card}(b)$). D'après l'exercice précédent on a alors $\mu \leqslant \mathfrak{card}(b)$.
Or j est une bijection de $\mathfrak{card}(a)$ sur m. Donc $\mathfrak{card}(a){=}\mathfrak{card}(m) = \mu \leqslant \mathfrak{card}(b)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soient φ et ψ des bijections respectivement de a sur $\mathfrak{card}(a)$ et de b sur $\mathfrak{card}(b)$ (puisque tout ensemble est par définition équipotent à son cardinal). $\mathfrak{card}(a) \leqslant \mathfrak{card}(b)$, *i.e.* $\mathfrak{card}(a){\subset}\mathfrak{card}(b)$, donc il existe une injection ι de $\mathfrak{card}(a)$ dans $\mathfrak{card}(b)$, qui est l'identité. Et alors $\psi^{-1} \circ \iota \circ \varphi$ est une injection de a dans b.

C.Q.F.D.

3°) Ceci est évident par la question précédente. C.Q.F.D.

4°) D'après la question précédente, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de surjection de a sur $\mathfrak{P}a$. Soit π une telle surjection. Soit $p{=}\{x{\in}a/x{\notin}\pi(x)\}$. p est une partie de a donc (π étant surjective) il existe $z{\in}a$ tel que $p{=}\pi(z)$. Mais $z{\in}p \Leftrightarrow z{\notin}\pi(z) \Leftrightarrow z{\notin}p$, contradiction. C.Q.F.D.

5°) On suppose que $\mathfrak{C}(\cdot)$ forme un ensemble c. Dans ce cas, c est un ensemble d'ordinaux et, d'après l'exercice 3, il admet une borne supérieure $\sigma = \bigcup_{\alpha \in c} \alpha$ et tout ordinal est équipotent à une partie de σ. Soit $B(\cdot)$ la collection des bons ordres sur les parties de σ ; tout objet de B est partie de σ^2 et $B(r)$ est logiquement équivalent à « $r{\in}\mathfrak{P}(\sigma^2)$ et $B(r)$ », ce qui par le schéma de compréhension montre que $B(\cdot)$ correspond à un ensemble b. Or l'image de B par la relation fonctionnelle qui à r associe l'ordinal isomorphe à r (s'il existe) est la collection $\mathfrak{O}$ toute entière. Donc, par le schéma d'axiome de substitution, $\mathfrak{O}$ correspond à un ensemble, ce qui contredit un résultat de l'exercice 3. C.Q.F.D.