

Corrigé du TD de logique n° 1

Logique propositionnelle de Hilbert

Exercice 1 : Le modèle classique $\{0, 1\}$

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha\rightarrow\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\wedge\beta$
1	1	0	1	1	1
1°) 1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0

φ	$\neg\varphi$	$\varphi\vee\neg\varphi$
2°) 1	0	1
0	1	1

φ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$
3°) 1	0	1	1
0	1	0	1

φ	ψ	$\varphi\rightarrow\psi$	$(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi$	$((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi$
4°) 1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

5°) $\frac{\vDash \varphi\rightarrow\psi}{\vDash \neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$ (contraposition)

6°) Cela se déduit des deux dernières lignes de la table de vérité de $\alpha\rightarrow\beta$ donnée à l'exercice 1 : en effet, par toute valuation, α vaudra 0 et donc $\alpha\rightarrow\beta$ vaudra 1.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi\wedge\neg\varphi$
7°) 1	0	0
0	1	0

8°) Dans les deux propositions, "Cette phrase" ne fait pas référence à la même phrase. En effet, le contraire de « Cette phrase a cinq mots. » est : « La phrase "Cette phrase a cinq mots." n'a pas cinq mots. », ce qui est faux. Il ne faut pas confondre négations *logique* et *grammaticale*. Il est toujours dangereux de mélanger langage et méta-langage (comme par exemple dans de telles phrases qui parlent d'elles-mêmes). Cf. paradoxe du barbier, etc.

Exercice 2 : Mon premier arbre de preuves

$$\frac{\frac{\frac{}{e * e^{-1} = e} \text{ (I1)}}{e = e * e^{-1}} \text{ (Sym)}}{e * e^{-1} = e^{-1}} \text{ (E2)}}{e = e^{-1}} \text{ (Trans)}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{y * y^{-1} = e \quad (H1)}{x^{-1} = x^{-1}} \quad (Eg)}{\frac{(y * y^{-1}) * x^{-1} = e * x^{-1} \quad (Eq^*)}{x = x} \quad (Eg)} \quad (Trans)}{\frac{(y * y^{-1}) * x^{-1} = x^{-1}}{x * ((y * y^{-1}) * x^{-1}) = x * x^{-1}} \quad (Eq^*)} \quad (I1)} \\
 \frac{\frac{x = x \quad (Eg)}{y * (y^{-1} * x^{-1}) = (y * y^{-1}) * x^{-1}} \quad (Sym+Ass)}{\frac{x * ((y * y^{-1}) * x^{-1}) = e}{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = x * ((y * y^{-1}) * x^{-1})} \quad (Eq^*)} \quad (Trans)} \\
 \frac{\frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1}))}{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = e} \quad (Ass)}{\frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = x * ((y * y^{-1}) * x^{-1})}{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = e} \quad (Trans)} \quad (Trans)} \\
 \frac{\frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1}))}{(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e} \quad (Trans)}{\quad} \quad (Trans)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{e = x^{-1} * x \quad (Sym+I2)}{y = y} \quad (Eg)}{\frac{e * y = (x^{-1} * x) * y}{(x^{-1} * x) * y = x^{-1} * (x * y)} \quad (Eq^*)} \quad (Ass)}{\frac{e * y = (x^{-1} * x) * y}{(x^{-1} * x) * y = x^{-1}} \quad (Trans)} \quad (Trans)} \\
 \frac{\frac{e * y = x^{-1} * (x * y)}{x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * e = x^{-1}} \quad (Eq^*)} \quad (Hyp)}{\frac{x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * e}{x^{-1} * (x * y) = x^{-1}} \quad (E1)} \quad (Trans)} \\
 \frac{\frac{e * y = x^{-1} * (x * y)}{e * y = x^{-1}} \quad (Sym+E2)}{\frac{e * y = x^{-1}}{y = x^{-1}} \quad (Trans)} \quad (Trans)
 \end{array}$$

Q3+Q2

$$\frac{\frac{\frac{(x * y = *(x * y)) = e \quad (Hyp)}{x * y = (x * y)^{-1}} \quad (Q3)}{\frac{(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}}{x * y = y * x} \quad (Q4)} \quad (Trans2)}{\frac{y * y = e \quad (Hyp)}{y^{-1} = y} \quad (Sym+Q3)} \quad (Eq^*)} \quad (Trans)$$

$$ab = a^{-1}a^2b^2b^{-1} = a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} = ba$$