TD Lambda calcul :Stratégies de réduction, théorème de standardisation

13 mars 2007

Corrigé de l'exercice 1
Terme normalisant pour la stratégie interne droite, mais pas fortement normalisant (diverge pour l'appel par valeur qui réduit pas sous lambda, par exemple) :

$$(\lambda x.x\delta)(\lambda x.Kx(xx))$$

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé de l'exercice 3

1. Si la réduction de tête de u termine, on a immédiatement une hnf pour u ($\rightarrow_h$ est contenue dans $\rightarrow_\beta$). Supposons que u a une hnf, c'est à dire $u \rightarrow *_\beta \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot xu_1 \ldots u_m$. Par le théorème de standardisation, on a : $u \rightarrow *_s \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot xu_1 \ldots u_m$. Par définition de la réduction standard $\rightarrow_s$, on a $u \rightarrow *_h \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot xv_1 \ldots v_m$, avec $v_1 \rightarrow_s u_1$, …, $v_m \rightarrow_s u_m$. Ce dernier terme est bien en hnf et de plus la réduction de tête est finie.
2. On pose $u = \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot (\lambda x \cdot u_0)u_1 \ldots u_m$ et $u' = \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot u_0[x := u_1]u_2 \ldots u_m$, en supposant que $z \notin bv(u)$ et $\mathsf{fv}(()v) \cap bv(u) = \emptyset$. En particulier, $z \neq x_1, \ldots, x_n, x$ et $x \notin \mathsf{fv}(()v)$.
   Par définition,
   $$\begin{array}{lll} u[z := v] & = & \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot (\lambda x \cdot u_0[z := v])u_1[z := v] \ldots u_m[z := v] \\ & \rightarrow_h & \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot u_0[z := v][x := u_1[z := v]]\ u_2[z := v] \ldots u_m[z := v] \end{array}$$
   D'autre part,
   $$\begin{array}{lll} u'[z := v] & = & \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot u_0[x := u_1][z := v]\ u_2[z := v] \ldots u_m[z := v] \\ & = & \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot u_0[z := v][x := u_1[z := v]]\ u_2[z := v] \ldots u_m[z := v] \end{array}$$
3. Si $\lambda y \cdot u \rightarrow *_\beta \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot xu_1 \ldots u_m$, alors $y = x_1$ et par déf. de $\rightarrow_\beta$, $u \rightarrow *_\beta \lambda x_2, \ldots, x_n \cdot xu_1 \ldots u_m$. Donc u a une hnf.
   La réciproque est évidente.
4. Supp. que $u[z := v]$ a une hnf et que u n'a pas de hnf. Donc la réduction de tête commençant par u est infinie. Par 2, cela implique que la réduction de tête commençant par $u[z := v]$ est infinie, ce qui contredit le fait que $u[z := v]$ a une hnf par 1.
5. Supposons que uv a une hnf et soit $u = u_0 \rightarrow_h u_1 \rightarrow_h \ldots$ la réduction de tête de u.
   - Si aucun u_i n'est une abstraction, on a $uv = u_0v \rightarrow_h u_1v \rightarrow_h \ldots$. Par hypothèse, et par 1, cette réduction de tête termine. Donc la réduction de tête de u termine.
   - Si $u_k = \lambda x \cdot v_k$ (et k minimal tel que u_k est une abstraction), on a $uv = u_0v \rightarrow_h u_1v \rightarrow_h \ldots \rightarrow_h u_kv \rightarrow_h v_k[x := v]$. Par hypothèse et 1, la réduction de tête de uv termine, donc $v_k[x := v]$ a une hnf (par 1), donc v_k a une hnf par 2 donc $u_k = \lambda x \cdot v_k$ a une hnf par 3 donc u a une hnf.

6. **seult si.** Supposons que u clos est tel que $uv_1 \dots v_n =_\beta \mathsf{I}$. Donc $uv_1 \dots v_n =_\beta$ a une hnf, donc u a une hnf par l'exercice **??**, question 5.

   si. Supposons que u clos a une hnf. On a donc $u \to *_\beta \lambda x_1, \dots, x_n \cdot x_i u_1 \dots u_m$ (u étant clos par hypothèse).
   Posons $w_1 := \mathsf{K}^m\mathsf{I}$ et $w_{i+1} := w_i(\mathsf{K}^m\mathsf{I})$ (avec $\mathsf{K}^0 u := u$ et $\mathsf{K}^{i+1}u := \mathsf{K}(\mathsf{K}^i u)$. on a $uw_n \to *_\beta \mathsf{K}^m\mathsf{I} u_1 \dots u_m \sigma_1 \dots \sigma_n$ où pour tout $i \leq n$, $\sigma_i := [x_i := \mathsf{K}^m\mathsf{I}]$.
   Par définition, $\mathsf{K}^m\mathsf{I}\, u_1 \dots u_m \sigma_1 \dots \sigma_n \to_\beta \mathsf{K}^{m-1}\mathsf{I}\, u_2 \dots u_m \sigma_1 \dots \sigma_n \to_\beta \dots \to_\beta \mathsf{I}$.

Corrigé de l'exercice 4

1. $\mathsf{SKK}M = \mathsf{K}M(\mathsf{K}M) = M$. On pose $\mathsf{I} := \mathsf{SKK}$.
2. $$\begin{array}{rcl} \mathsf{B}MNP & = & \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}MNP \\ & = & \mathsf{KS}M(\mathsf{K}M)NP \\ & = & \mathsf{S}(\mathsf{K}M)NP \\ & = & \mathsf{K}MP(NP) \\ & = & M(NP) \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rcl} \mathsf{B}MNP & = & \mathsf{S}(\mathsf{BS}(\mathsf{BKS}))(\mathsf{KK})MNP \\ & = & \mathsf{BS}(\mathsf{BKS})M(\mathsf{KK}M)NP \\ & = & \mathsf{S}((\mathsf{BKS})M)(\mathsf{KK}M)NP \\ & = & \mathsf{S}(\mathsf{BKS}M)(\mathsf{KK}M)NP \\ & = & \mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}M))(\mathsf{KK}M)NP \\ & = & \mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{S}M))\mathsf{K}NP \\ & = & \mathsf{K}(\mathsf{S}M)N(\mathsf{K}N)P \\ & = & \mathsf{S}M(\mathsf{K}N)P \\ & = & MP(\mathsf{K}NP) \\ & = & MPN \end{array}$$
4. $$\begin{array}{rcl} \mathsf{Y}M & = & \mathsf{S}(\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))(\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))M \\ & = & (\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))M\big((\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))M\big) \\ & = & \mathsf{CB}(\mathsf{SII})M\big(\mathsf{CB}(\mathsf{SII})M\big) \\ & = & \mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big(\mathsf{CB}(\mathsf{SII})M\big) \\ & = & \mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big(\mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big) \\ & = & M\Big(\mathsf{SII}\big(\mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big)\Big) \\ & = & M\Big(\mathsf{I}\big(\mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big)\big(\mathsf{IB}M(\mathsf{SII})\big)\Big) \\ & = & M\Big(\big(\mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big)\big(\mathsf{B}M(\mathsf{SII})\big)\Big) \\ & = & M(\mathsf{Y}M) \end{array}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Par récurence sur P. Cas de base :
   – si $P = x$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{I}$, $vars(\lambda^* x \cdot P) = \emptyset$,
   – si $P = y \neq x$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{K}y$, $vars(\lambda^* x \cdot P) = \{y\}$,
   – si $P = \mathsf{K}$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{KK}$, $vars(\lambda^* x \cdot P) = \emptyset$,
   – si $P = \mathsf{S}$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{KS}$, $vars(\lambda^* x \cdot P) = \emptyset$.
   Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$, $\lambda^* x \cdot P := \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P_1)(\lambda^* x \cdot P_2)$ et $vars(\lambda^* x \cdot P) = vars(\lambda^* x \cdot P_1) \cup vars(\lambda^* x \cdot P_2) = (vars(P_1) \setminus \{x\}) \cup (vars(P_2) \setminus \{x\})$ par h.r.
2. Par récurence sur P. Cas de base :

– si $P = x$, $(\lambda^* x \cdot P)x = \mathsf{I}x = x$,
– si $P = y \neq x$ ou $P = \mathsf{K}$ ou $P = \mathsf{S}$, $(\lambda^* x \cdot P)x = \mathsf{K}Px = P$.
Étape de récurrence : si $P = P_1 P_2$,

$$\begin{array}{rcll} (\lambda^* x \cdot P)x & = & \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P_1)(\lambda^* x \cdot P_2)x & \\ & = & (\lambda^* x \cdot P_1)x((\lambda^* x \cdot P_2)x) & \\ & = & P_1 P_2 & \text{par h.r.} \end{array}$$

3. Par récurence sur P. Cas de base :
– si $P = x$, $(\lambda^* x \cdot P)Q = \mathsf{I}Q = P[x := Q]$,
– si $P = y \neq x$ ou $P = \mathsf{K}$ ou $P = \mathsf{S}$, $(\lambda^* x \cdot P)x = \mathsf{K}Px = P[x := Q]$.
Étape de récurrence : si $P = P_1 P_2$,

$$\begin{array}{rcll} (\lambda^* x \cdot P)Q & = & \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P_1)(\lambda^* x \cdot P_2)Q & \\ & = & (\lambda^* x \cdot P_1)Q((\lambda^* x \cdot P_2)Q) & \\ & = & P_1[x := Q]\, P_2[x := Q] & \text{par h.r.} \\ & = & P[x := Q] & \end{array}$$

4. Par récurence sur P. Cas de base :
– si $P = x$, $(\lambda^* x \cdot P)[y := Q] = \mathsf{I}[y := Q] = \mathsf{I} = \lambda^* x \cdot (P[x := Q])$
– si $P = y$, $(\lambda^* x \cdot P)[y := Q] = (Ky)[y := Q] = \mathsf{K}Q$ car $y \neq x$. D'autre part, $\lambda^* x \cdot (P[y := Q]) = \lambda^* x \cdot Q = \mathsf{K}Q$ car par hypothèse $x \notin vars(Q)$,
– si $P = z \neq x, y$ ou $P = \mathsf{K}$ ou $P = \mathsf{S}$, $(\lambda^* x \cdot P)[y := Q] = (\mathsf{K}P)[y := Q] = \mathsf{K}(P[y := Q]) = \lambda^* x \cdot (P[y := Q])$.
Étape de récurrence : si $P = P_1 P_2$,

$$\begin{array}{rcll} (\lambda^* x \cdot P)[y := Q] & = & \big(\mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P_1)(\lambda^* x \cdot P_2)\big)[y := Q] & \\ & = & \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot (P_1[y := Q]))(\lambda^* x \cdot (P_2[y := Q])) & \text{par h.r.} \\ & = & \lambda^* x \cdot (P[y := Q]) & \end{array}$$

5. Par récurence sur P. Cas de base :
– si $P = x$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{I} = \lambda^* y \cdot y = \lambda^* y \cdot P[x := y]$.
– si $P = z \neq x, y$ ou $P = \mathsf{K}$ ou $P = \mathsf{S}$, $\lambda^* x \cdot P = \mathsf{K}P = \lambda^* y \cdot P = \lambda^* y \cdot P[x := y]$.
Étape de récurrence : si $P = P_1 P_2$,

$$\begin{array}{rcll} \lambda^* x \cdot P & = & \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P_1)(\lambda^* x \cdot P_2) & \\ & = & \mathsf{S}(\lambda^* y \cdot (P_1[x := y]))(\lambda^* y \cdot (P_2[x := y])) & \text{par h.r.} \\ & = & \lambda^* y \cdot P[x := y] & \end{array}$$

Corrigé de l'exercice 6

1. (a) Pour deux variables distinctes v_1, v_2, on a $(\lambda^* x \cdot \lambda^* y \cdot x)v_1 v_2 = v_1 = \mathsf{K}v_1 v_2$ (dans CL, en utilisant l'exercice **??**). Donc $\lambda^* x, y \cdot x = K$ en utilisant la règle supplémentaire de CLext.
   (b) Pour trois variables distinctes v_1, v_2, v_3, on a $(\lambda^* x \cdot \lambda^* y \cdot \lambda^* z \cdot xz(yz))v_1 v_2 v_3 = v_1 v_3(v_2 v_3) = \mathsf{S}v_1 v_2 v_3$ (dans CL). Donc $\lambda^* x \cdot \lambda^* y \cdot x = K$ en utilisant la règle supplémentaire de CLext.
   (c) Pour une variable $y \neq x$, $(\lambda^* x \cdot M)y = M[x := y] = N[x := y]$ car $M = N$ par hypothèse. D'autre part, $(\lambda^* x \cdot N)y = N[x := y]$ (dans CL). Donc $\lambda^* x \cdot M = \lambda^* x \cdot N$.
2. (a) par construction, $\lambda^* x \cdot \lambda^* y \cdot x = \lambda^* x \cdot Kx = \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot \mathsf{K})(\lambda^* x \cdot x) = \mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}$. Ce dernier terme n'est pas simplifiable dans CL, donc il est différent de K dans CL.
   On remarque que pour une variable z quelconque, $(\lambda^* x, y \cdot x)z = \lambda^* x \cdot Kx = \mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}z = \mathsf{KK}z(\mathsf{I}z) = \mathsf{K}(\mathsf{I}z) = \mathsf{K}z$.
   (b) Par construction :

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda^*x\cdot\lambda^*y\cdot\lambda^*z\cdot xz(yz) & = & \lambda^*x\cdot\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\lambda^*z\cdot xz)(\lambda^*z\cdot yz)\\
& = & \lambda^*x\cdot\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{S}(\lambda^*z\cdot x)(\lambda z\cdot z))(\mathsf{S}(\lambda^*z\cdot y)(\lambda^*z\cdot z))\\
& = & \lambda^*x\cdot\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I})(\mathsf{S}(\mathsf{K}y)\mathsf{I})\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{S}(\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I}))(\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{K}y)\mathsf{I})\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{S}(\mathsf{KS}(\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{K}y))(\lambda^*y\cdot \mathsf{I}))\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{SS}(\mathsf{S}(\lambda^*y\cdot \mathsf{S}(\mathsf{K}y))(\lambda^*y\cdot \mathsf{I}))\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{SS}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\lambda^*y\cdot \mathsf{S})(\lambda^*y\cdot(\mathsf{K}y)))(\mathsf{KI}))\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{SS}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\lambda^*y\cdot \mathsf{K})(\lambda^*y\cdot y)))(\mathsf{KI}))\\
& = & \lambda^*x\cdot \mathsf{SS}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{KI}))\\
& = & \mathsf{S}(\lambda^*x\cdot \mathsf{SS})(\lambda^*x\cdot \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{KI}))\\
& = & \mathsf{S}(\mathsf{KSS})(\mathsf{KS}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{KI}))\\
& = & \mathsf{SS}(\mathsf{S}(\mathsf{KI}))
\end{array}
$$

Ce dernier terme n'est pas simplifiable dans CL, donc il est différent de K dans CL.

(c) On pose $M = \mathsf{I}x$ et $N = x$. On a bien $M = x$ dans CL.
Par définition, $\lambda^*x \cdot M = \lambda^*x\cdot \mathsf{I}x = \mathsf{S}(\mathsf{K}I)\mathsf{I}$ et ce dernier terme est différent de $\lambda^*x\cdot x = \mathsf{I}$ dans CL.

Corrigé de l'exercice 7

1. Par récurrence sur la taille de t.
   - si t est une variable, $(t_{CL})_\lambda = t$.
   - si $t = uv$, $(t_{CL})_\lambda = (u_{CL}v_{CL})_\lambda = (u_{CL})_\lambda(u_{CL})_\lambda =_\beta uv$ par h.r.
   - si $t = \lambda x\cdot u$, $(t)_{CL} = \lambda^*x\cdot(u)_{CL}$.
     - si $u = x$,
       $$\begin{array}{rcl} (t_{CL})_\lambda & = & (\mathsf{I})_\lambda = (\mathsf{SKK})_\lambda\\ & = & \mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\\ & = & (\lambda x,y,z\cdot xz(yz))\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\\ & \to*_\beta & \lambda z\cdot \mathsf{K}_\lambda z(\mathsf{K}_\lambda z)\\ & = & \lambda z\cdot(\lambda x,y\cdot x)z(\mathsf{K}_\lambda z)\\ & \to_\beta & \lambda z\cdot z \end{array}$$
     - si $x \notin \mathsf{fv}(()u)$, on a $x\notin \mathit{vars}(u_{CL})$, et donc $t_{CL} = \mathsf{K}_\lambda u_{CL}$,
       $$\begin{array}{rcl} (t_{CL})_\lambda & = & \mathsf{K}_\lambda(u_{CL})_\lambda\\ & =_\beta & \mathsf{K}_\lambda u \quad \text{par h.r.}\\ & =_\beta & \lambda y\cdot u\\ & =_\alpha & t \quad \text{par hyp.} \end{array}$$
     - si $u = vw$, $t_{CL} = \mathsf{S}(\lambda^*x\cdot v_{CL})(\lambda^*x\cdot w_{CL})$.
       On peut appliquer l'h.r. à $\lambda x{\cdot}v$ et $\lambda x{\cdot}w$, ce qui donne $(\lambda^*x{\cdot}v_{CL})_\lambda =_\beta \lambda x{\cdot}v$ et $(\lambda^*x{\cdot}w_{CL})_\lambda =_\beta \lambda x{\cdot}w$.
       $$\begin{array}{rcl} (t_{CL})_\lambda & = & \mathsf{S}_\lambda(\lambda^*x\cdot v_{CL})_\lambda(\lambda^*x\cdot w_{CL})_\lambda\\ & = & (\lambda x,y,z\cdot xz(yz))(\lambda^*x\cdot v_{CL})_\lambda(\lambda^*x\cdot w_{CL})_\lambda\\ & \to*_\beta & \lambda z\cdot(\lambda^*x\cdot v_{CL})_\lambda z((\lambda^*x\cdot v_{CL})_\lambda z)\\ & =_\beta & \lambda z\cdot(\lambda x\cdot v)z((\lambda x\cdot w)z)\\ & =_\beta & \lambda z\cdot v[x:=z]\; w[x:=z] \qquad z\notin \mathsf{fv}(()v,w)\\ & =_\alpha & t \end{array}$$
2. On vérifie pour S et K, puis récurrence.
3. Par récurrence sur la taille de la preuve de $M = N$ dans CL.
   - c'est vrai pour les 3 axiomes, avec la définition de K_λ et S_λ.
   - les étapes de récurrence sont immédiates par définition de $=_\beta$ (clôture par contexte et équivalence).
4. On choisit le contre-exemple $M = \lambda^*x\cdot \mathsf{I}x = \mathsf{S}(\mathsf{K}I)\mathsf{I}$ et $N = \mathsf{I}$.
   $M = N$ n'est pas vrai dans CL alors que :

$$\begin{array}{rcl}
M_\lambda & = & \mathsf{S}_\lambda(\mathsf{K}_\lambda\mathsf{I}_\lambda)\mathsf{I}_\lambda \\
& = & (\lambda x, y, z \cdot xz(yz))(\mathsf{K}_\lambda\mathsf{I}_\lambda)\mathsf{I}_\lambda \\
& \to *_\beta & \lambda z \cdot \mathsf{K}_\lambda\mathsf{I}_\lambda z(\mathsf{I}_\lambda z) \\
& \to *_\beta & \lambda z \cdot (\lambda x, y \cdot x)\mathsf{I}_\lambda z((\lambda x \cdot x)z) \\
& \to *_\beta & \lambda z \cdot z \\
& =_\beta & N_\lambda
\end{array}$$

Corrigé de l'exercice 8

1. On peut montrer que pour tout λ-terme clos t, t_{CL} ne contient pas de variable, c'est à dire qu'il est formé de K, S et l'application. Donc $(t_{CL})_\lambda \in \{\mathsf{K}_\lambda, \mathsf{S}_\lambda\}^+$ et par l'exercice **??**, $(t_{CL})_\lambda =_\beta t$.
2. $$\begin{array}{rcl}
\mathsf{XXX} & \to *_\beta & (\mathsf{X}\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda)\mathsf{X} \\
& \to *_\beta & (\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda)\mathsf{X} \\
& \to *_\beta & \mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{X} \\
& \to *_\beta & \mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{X} \\
& \to *_\beta & \mathsf{K}_\lambda
\end{array}$$
$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{X}(\mathsf{XX}) & \to *_\beta & \mathsf{X}(\mathsf{X}\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda) \\
& \to *_\beta & \mathsf{X}(\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda) \\
& \to *_\beta & \mathsf{X}(\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda) \\
& \to *_\beta & \mathsf{X}(\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda) \\
& \to *_\beta & \mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda \\
& \to *_\beta & \mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda \\
& \to *_\beta & \mathsf{S}_\lambda
\end{array}$$
Soit t un λ-terme clos. On construit un terme de $\{\mathsf{X}\}^*$ à partir de $(t_{CL})\_\lambda$ (qui est dans $\{\mathsf{K}_\lambda, \mathsf{S}_\lambda\}^+$ par la question précédente), en remplaçant toute occurrence de K_λ par XXX et toute occurrence de S_λ par $\mathsf{X}(\mathsf{XX})$.