TD Lambda calcul
—
Confluence, alpha-conversion

E. Lozes

20 février 2007

Exercice 1 – α-équivalence et substitutions
On rappelle que l'α-équivalence, notée $=_\alpha$, est la (plus petite) congruence telle que $\lambda x.u \ =_\alpha \ \lambda y.(u[x := y])$ avec la condition $x \notin bv(u)$ et $y \notin v(u)$. On dit qu'un terme u vérifie la convention de Barendregt si $fv(v) \cap bv(v) = \emptyset$ pour tout sous-terme v de u.

1. parmi les termes suivants, quels sont ceux qui sont α-équivalents : $u_1 = \lambda x.\lambda y.x$, $u_2 = \lambda x.\lambda x.x$, $u_3 = \lambda x.\lambda y.y$? Donner un exemple de terme qui ne vérifie pas la convention de Barendregt
2. Montrer que tout terme u est α-équivalent à un terme vérifiant la convention de Barendregt.
3. Soient u, u', v, v' tels que $u =_\alpha u'$ et $v =_\alpha v'$. Montrer que $u[x := v] =_\alpha u'[x := v']$.
4. Soient x, y, et u, v, w tels que $x \neq y$ et $x \notin fv(w)$. Montrer que
$$u[x := v][y := w] \ = \ u[y := w][x := v[y := w]]$$

Exercice 2 – Graphes de réduction

1. Calculer les graphes de réduction des termes suivants, en faisant apparaître les redex : 1) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z$. 2)$(\lambda x.\lambda y.x)\ \big((\lambda x.xx)\ (\lambda x.\lambda y.xy)\big)$
2. En quel sens, et sous quelles conditions, les termes $(\lambda y.((\lambda x.M)N))\ P$ et $(\lambda x.((\lambda y.M)P))\ N$ sont-ils équivalents ? Quel autre terme "équivalent" peut-on aussi former ?

Exercice 3 – Formes normales et stratégie perpétuelle

1. Un terme u est dit minimal par rapport à la β-réduction si
$$\forall v, u \to_\beta^* v \quad \Rightarrow \quad u =_\alpha v.$$

Montrer qu'un terme en forme normale est minimal, mais que la réciproque est fausse.

2. Donnez des exemples de termes fortement normalisants, faiblement normalisant, et divergents.
3. On appelle stratégie de réduction une relation $\to_S \subseteq \to_\beta$ telle que $\to_S$ est déterministe, i.e. est le graphe d'une fonction partielle. Une stratégie $\to_S$ est dite perpétuelle si pour tout M, N tels que $M \to_S N$, M et N sont également fortement normalisants. Donnez une définition équivalente plus faible de stratégie perpétuelle. Montrer que la stratégie de réduction du redex maximal le plus à gauche et celle du redex maximal le plus à droite ne sont pas perpétuelles.

Exercice 4 – Autour de la confluence

On rappelle qu'un système de réécriture est

- localement confluent si $u \leftarrow v \to w$ implique qu'il existe t tel que $u \to^* t \ {}^* \!\leftarrow w$.
- confluent si $u \ {}^* \!\leftarrow v \to^* w$ implique qu'il existe t tel que $u \to^* t \ {}^* \!\leftarrow w$.
- Church-Rosser si $u \leftrightarrow^* v$ implique qu'il existe t tel que $u \to^* t \ {}^* \!\leftarrow v$.
- fortemement confluent si $u \leftarrow v \to w$ implique qu'il existe t tel que $u \to t \leftarrow w$.

1. Quelles propriétés (de $\to$ ou $\to^*$) induisent quelles autres ? Faire un schéma.
2. Quel est l'intérêt de la normalisation dans un système de réécriture confluent ?
3. Montrez le lemme de Newman : si $\to$ est localement confluent et fortement normalisant, alors $\to$ est confluent. Donnez un contre-exemple si on retire l'hypothèse de forte normalisation.
4. Montrez le lemme de Hindley-Rosen : Si $\to_1$ et $\to_2$ sont deux systèmes de réécriture confluents qui commutent (ie. $u_1 \leftarrow v \to_2 w$ implique $u \to_2^* t_1^* \leftarrow w$), alors $(\to_1 \cup \to_2)*$ est confluent.

Exercice 5 – Réduction parallèle

On définit une nouvelle règle de réduction $\Rightarrow$, appellée *réduction parallèle*, par :

- $u \Rightarrow u$ pour tout terme u ;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $uv \Rightarrow u'v'$;
- si $u \Rightarrow u'$, alors $\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'$;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']$.

1. Montrez que $\Rightarrow$ est fortement confluent.
2. Montrez que $\to_\beta \subsetneq \Rightarrow \subsetneq \to_\beta^*$ (exhiber des contre-exemples pour les implications strictes).
3. En déduire que $\to_\beta$ est confluent.
4. Montrer que $\to_\eta$ est fortement confluent.
5. Montrer que $\to_\eta$ et $\to_\beta$ commuttent, au sens du lemme de Hindley-Rosen. En déduire que $\to_{\beta\eta}$ est confluent.