Partiel de Logique

23 novembre 2005

Les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Durée : 3 heures. La longueur indiquée est celle du corrigé dactylographié. Le barême est indicatif.

Exercice 1

Soit $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ et $\mathcal{E} = \{P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q,\ P \vee R,\ \neg P \vee Q \vee \neg R\}$. On suppose que $P < Q < R$.

1. Donner l'arbre sémantique de $\mathcal{E}$
2. Quelles sont les interprétations qui satisfont $\mathcal{E}$?
3. Donner un ensemble de clauses $\mathcal{E}^*$, logiquement équivalent à $\mathcal{E}$, tel que toutes les clauses de $\mathcal{E}^*$ s'obtiennent par résolution et factorisation binaire à partir de $\mathcal{E}$ et ne contenant pas de paire de clauses distinctes C_1, C_2 telles que $C_1 \models C_2$.

[10 lignes, 3 points]

Exercice 2

On suppose l'ensemble (dénombrable) de variables propositionnelles totalement ordonné. L'ordre est étendu aux littéraux par : $\neg P > Q$ ssi $P > \neg Q$ ssi $\neg P > \neg Q$ ssi $P > Q$. On considère l'unique règle d'inférence :

$$\frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C_{-p} \vee C'} \qquad \text{Si} \begin{cases} P \text{ est maximal dans } C \vee P \\ \neg P \text{ est maximal dans } C' \vee \neg P \end{cases}$$

Où C_{-P} est la clause C dans laquelle toutes les occurrences de P ont été supprimées.

Cette unique règle est elle réfutationnellement complète ? justifier.

[18 lignes, 5 points]

Solution

Elle est réfutationnellement complète : il suffit d'utiliser la preuve par les arbres sémantiques. La même preuve que celle du cours s'applique : si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses insatisfaisables, soit $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des clauses obtenues par application de la règle de résolution ci-dessus. Si $\perp \notin \mathcal{E}^*$, alors $\mathcal{E}^*$ a un arbre sémantique fini (car insatisfaisable) et non vide (car $\perp \notin \mathcal{E}^*$). Il existe donc un noeud dont les deux fils sont des noeuds d'échec. Soient C_1 et C_2 les deux clauses de $\mathcal{E}^*$ falsifiant respectivement les deux extensions de l'interpétation partielle I par la variable propositionnelle P. Alors $C_1 = P \vee \ldots \vee P \vee C_1'$ où C_1' ne contient pas d'occurrence de P et, par conséquent I falsifie C_1'. De même, $C_2 = \neg P \vee \vee C_2'$. Par une étape d'inférence on a $C_1' \vee C_2' \in \mathcal{E}^*$.

Montrons, par récurrence sur le nombre d'occurrences de $\neg P$ dans C_2' que I falsifie une clause de $\mathcal{E}^*$.

Si C_2' ne contient pas d'occurrence de $\neg P$, alors I falsifie C_2'. et donc I falsifie $C_1' \vee C_2' \in \mathcal{E}^*$.

Si maintenant C_2' contient au moins une occurrence de $\neg P$, soit $C_2' = \neg P \vee C_2''$. $C_3 = C_1' \vee C_2'' \vee \neg P \in \mathcal{E}^*$ et l'extension de I par $P \mapsto 1$ falsifie C_3 qui contient strictement moins d'occurrences de $\neg P$ que C_2. Par hypothèse de récurrence on a donc une clause de $\mathcal{E}^*$ falsifiée par I..

On obtient donc une contradiction : I était déjà un noeud d'échec. Par conséquent $\bot \in \mathcal{E}^*$, ce qui prouve la complétude réfutationnelle.

Exercice 3

Pour chacun des séquents suivants, dire s'ils sont prouvables dans LJ_0, et s'ils sont prouvables dans LK_0, quelles que soient les formules ϕ, ψ, θ. Justifier en détail les réponses.

1. $\neg\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$
2. $\vdash \neg(\phi \rightarrow \neg\phi)$
3. $\neg\neg\phi, \neg\neg\neg\phi \vdash \neg\phi \vee \phi$
4. $\phi \rightarrow \neg\phi, \neg\phi \rightarrow \phi \vdash \bot$

[40 lignes, 6 points]

Solution

1. Le séquent est prouvable en LJ_0 et donc aussi en LK_0 :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\phi, \psi \vdash \phi$}
\RightLabel{$\neg l$}
\UnaryInfC{$\phi, \psi, \neg\phi \vdash \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\phi, \psi \vdash \psi$}
\RightLabel{$\neg l$}
\UnaryInfC{$\phi, \psi, \neg\psi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee l$}
\BinaryInfC{$\phi, \psi, \neg\phi \vee \neg\psi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\wedge l$}
\UnaryInfC{$\phi \wedge \psi, \neg\phi \vee \neg\psi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg r$}
\UnaryInfC{$\neg\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$}
\end{prooftree}
$$

2. Le séquent n'est pas valide en logique classique, puisque l'interprétation qui à A associe 0 satisfait $A \rightarrow \neg A$ et donc pas sa négation. Par le théorème de correction $\vdash \neg(\phi \rightarrow \neg\phi)$ n'est donc pas prouvable en LK_0 et donc pas non plus en LJ_0.
3. Il a été vu en TD que $\phi \vdash \neg\neg\phi$ est prouvable en LJ_0.On obtient alors la preuve dans LJ_0 :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\phi \vdash \neg\neg\phi$}
\RightLabel{$\neg l$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg\phi, \phi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg r$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg\phi \vdash \neg\phi$}
\RightLabel{Wl}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi, \neg\neg\neg\phi \vdash \neg\phi$}
\RightLabel{$\vee r$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi, \neg\neg\neg\phi \vdash \neg\phi \vee \phi$}
\end{prooftree}
$$

4. Ce séquent est prouvable dans LJ_0 (et donc dans LK_0)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\phi \vdash \phi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\neg\phi, \phi \vdash \phi$}
\RightLabel{$\rightarrow l$}
\BinaryInfC{$\phi, \phi \rightarrow \neg\phi \vdash \bot$}
\RightLabel{WL}
\UnaryInfC{$\phi, \neg\phi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \neg\phi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg r$}
\UnaryInfC{$\neg\phi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \neg\phi \vdash \neg\phi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\phi \vdash \phi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Axiom}
\UnaryInfC{$\neg\phi, \phi \vdash \phi$}
\RightLabel{$\rightarrow l$}
\BinaryInfC{$\phi \rightarrow \neg\phi, \phi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow l$}
\BinaryInfC{$\neg\phi \rightarrow \phi, \neg\phi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \neg\phi, \phi \rightarrow \neg\phi \vdash \bot$}
\RightLabel{CL}
\UnaryInfC{$\neg\phi \rightarrow \phi, \neg\phi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \neg\phi \vdash \bot$}
\RightLabel{CL}
\UnaryInfC{$\phi \rightarrow \neg\phi, \neg\phi \rightarrow \phi \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 4

$\mathcal{P}$ désigne un ensemble *fini* de variables propositionnelles.

On désigne par $C(\mathcal{P})$ le plus petit ensemble de formules tel que

- Si k est un entier naturel inférieur ou égal au nombre de variables propositionnelles et $S \subseteq \mathcal{P}$, alors $\mathsf{Atmost}_k(S)$ et $\mathsf{Atleast}_k(S)$ sont des formules de $C(\mathcal{P})$
- Si $\phi, \psi \in C(\mathcal{P})$, alors $\phi \wedge \psi \in C(\mathcal{P})$

Attention : S est ici un ensemble, pas un multi-ensemble. $|S|$ désigne le cardinal de S.

Étant donnée une interprétation I (sous-ensemble de $\mathcal{P}$) et une formule $\phi \in C(\mathcal{P})$, on dira que I *satisfait* ϕ (ce que l'on notera $I \models \phi$) si et seulement si,

- Ou bien ϕ est une conjonction $\phi_1 \wedge \phi_2$ et $I \models \phi_1$ et $I \models \phi_2$
- ou bien $\phi = \mathsf{Atmost}_k(S)$ et $|I \cap S| \leq k$
- ou bien $\phi = \mathsf{Atleast}_k(S)$ et $|I \cap S| \geq k$

[33 lignes, 5 points]

1. Montrer que, pour toute formule $\phi \in C(\mathcal{P})$ il existe une formule $\hat{\phi} \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ telle que $I \models \phi$ si et seulement si $I \models \hat{\phi}$.
2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse : donner une formule $\psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ telle qu'il n'existe aucune formule $\phi \in C(\mathcal{P})$ telle que $I \models \psi$ si et seulement si $I \models \phi$

Solution

1. Construisons d'abord $\hat{\phi}$ lorsque $\phi = \mathsf{Atmost}_k(S)$, par récurrence sur $k + |S|$:
   - si $k = 0$ et $|S| > 0$, alors $\hat{\phi} = \bigwedge_{P \in S} \neg P$
   - si $|S| = 0$ et $k \geq 0$, alors $\widehat{\mathsf{Atmost}_k(S)} = \top$
   - si S est non vide, soit $P \in S$. $\widehat{\mathsf{Atmost}_{k+1}(S)} = (P \wedge \widehat{\mathsf{Atmost}_k(S \setminus \{P\})}) \vee (\neg P \wedge \widehat{\mathsf{Atmost}_{k+1}(S \setminus \{P\})})$.

   De même,
   - $\widehat{\mathsf{Atleast}_0(S)} = \top$
   - $\widehat{\mathsf{Atleast}_k(S)} = \bot$ si $k > |S|$
   - Si S est non vide, soit $P \in S$.

   $$\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}(S)} = (P \wedge \widehat{\mathsf{Atleast}_k(S \setminus P)}) \vee (\neg P \wedge \widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}(S \setminus P)})$$

On montre ensuite que $I \models \mathsf{Atmost}_k(S)$ si et seulement si $I \models \widehat{\mathsf{Atmost}_k(S)}$ et $I \models \mathsf{Atleast}_k(S)$ si et seulement si $I \models \widehat{\mathsf{Atleast}_k(S)}$, par récurrence sur $k + |S|$:

- Si $k = 0$ et $S = \emptyset$, $\mathsf{Atmost}_0(\emptyset)$ et $\mathsf{Atleast}_0(\emptyset)$ sont valides.
- Si $k > 0$ et $S = \emptyset$, $\mathsf{Atmost}_k(()S)$ est valide et $\mathsf{Atleast}_k(()S)$ est insatisfaisable
- Si $k = 0$ et $|S| > 0$, alors $\mathsf{Atleast}_k(()S)$ est valide et $I \models \mathsf{Atmost}_k(()S)$ ssi $I \cap S = \emptyset$ ssi pour tout $P \in S$, $I \not\models P$ ssi $I \models \neg P$.
- Si $S \neq \emptyset$, soit $P \in S$. $I \models \mathsf{Atmost}_{k+1}(S)$ (resp. $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(S)$) si et seulement si
  - ou bien $P \in I$ et $|I \cap (S \setminus P)| = |I \cap S| - 1 \leq k$ (resp. $\geq k$)
  - ou bien $P \notin I$ et $|I \cap (S \setminus P)| = |I \cap S| \leq k + 1$ (resp. $\geq k + 1$)

  Par hypothèse de récurrence, $I \models \widehat{\mathsf{Atmost}_k(S \setminus P)}$ si et seulement si $I \models \mathsf{Atmost}_k(S \setminus P)$, $I \models \widehat{\mathsf{Atmost}_{k+1}(S \setminus P)}$ si et seulement si $I \models \mathsf{Atmost}_{k+1}(S \setminus P)$. Ainsi qu'un résultat similaire en remplaçant $\mathsf{Atmost}()$ par $\mathsf{Atleast}()$. D'où la propriété voulue pour $\mathsf{Atmost}_{k+1}(S)$ et $\mathsf{Atleast}_{k+1}(S)$.

Enfin, les conjonctions de formules sont traduites en les conjonctions des traductions, ce qui préserve les modèles.

2. On considère $\phi = P \vee \neg Q$. Les interprétations qui satisfont ϕ sont $\{\{P\}, \emptyset, \{P, Q\}\}$. Les formules atomiques qui sont satisfaites par ces interprétations sont $\mathsf{Atleast}_0(S)$, $\mathsf{Atmost}_2(S)$ et aucune autre. En effet, si ces trois interprétations satisfont $\mathsf{Atleast}_k(S)$, alors, en particulier l'interprétation qui envoie P et Q sur 0. Donc $k \leq 0$. De même, si ces trois interprétations satisfont $\mathsf{Atmost}_l(S)$, alors en particulier l'interprétation qui envoie toutes les variables sur 1, donc $l \geq 2$.

   Les seules formules de $C(\mathcal{P})$ qui sont satisfaites par les trois interprétations sont ainsi les conjonctions de $\mathsf{Atleast}_0(S_i)$ et $\mathsf{Atmost}_2(S'_j)$. Or toutes ces formules sont valides, ce qui n'est pas le cas de $P \vee \neg Q$.

Exercice 5

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution binaire et factorisation binaire. Montrer que, si P est une variable propositionnelle et E un ensemble de clauses satisfaisable, alors

$$E, \neg P \vdash \perp \quad \text{ssi} \quad E \vdash P$$

(**Ind** : on pourra ou bien généraliser la propriété en s'inspirant de la preuve de complétude de Résolution+factorisation+tiers exclu+affaiblissement (noter que l'on n'a pas ici ces deux dernière règles), ou bien utiliser une transformation de preuves).
[21 lignes, 5 points]

Première solution : par transformation de preuves

Si $E, \neg P \vdash \perp$, on transforme la preuve à l'aide des règles suivantes :

$$\dfrac{\dfrac{C \vee Q \vee P \quad \neg P}{C \vee Q}\,\text{Res} \qquad C' \vee \neg Q}{C \vee C'}\,\text{Res} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{C \vee Q \vee P \quad C' \vee \neg Q}{C \vee C' \vee P}\,\text{Res} \qquad \neg P}{C \vee C'}\,\text{Res}$$

$$\dfrac{\dfrac{C \vee L \vee L \vee P \quad \neg P}{C \vee L \vee L}\,\text{Res}}{C \vee L}\,\text{Fact} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{C \vee L \vee L \vee P}{C \vee L \vee P}\,\text{Fact} \qquad \neg P}{C \vee L}\,\text{Res}$$

$$\dfrac{C \vee P \vee P \qquad \neg P}{C \vee P}\,\text{Res} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{C \vee P \vee P}{C \vee P}\,\text{Fact}$$

La première règle suppose que $C' \vee \neg Q$ n'est pas identique à $\neg P$ (si c'est le cas, on applique la dernière règle !)

Pour montrer la terminaison de ces règles de transformation on peut, par exemple, les appliquer à chaque fois le plus haut possible dans la preuve. Dans ce cas, l'occurrence la plus haute de la clause $\neg P$ diminue strictement à chaque application de règle.

Si on considère maintenant une preuve irréductible, aucune résolution par $\neg P$ ne peut être suivie d'une autre résolution (à cause des règles de transformation 1 et 3 ci-dessus) et aucune résolution par $\neg P$ ne peut être suivie par une factorisation, à cause de la deuxième règle ci-dessus. Les preuves irréductibles contiennent donc au plus une résolution par $\neg P$ et dans ce cas c'est la dernière règle. Comme d'autre part E est satisfaisable, une preuve irréductible de $\perp$ contient nécessairement une occurrence de $\neg P$. On obtient ainsi $E \vdash P$.

Réciproquement, si $E \vdash P$, on a par résolution, $E, \neg P \vdash \perp$.

Deuxième solution

On montre par récurrence sur la longueur d'une preuve de longueur au moins 1 que, pour toute clause C, si $E, \neg P \vdash C$, alors ou bien $E \vdash C$, ou bien $E \vdash C \vee P$.

- Dans le cas de base, trois situations se présentent :
  - il existe deux clauses $C_1, C_2 \in E$ telles que, par résolution, $C_1, C_2 \vdash C$. Dans ce cas $E \vdash C$
  - il existe une clause $C_1 \in E$ telle que $C_1 \vdash C$ et, à nouveau $E \vdash C$
  - il existe une clause $C \vee P \in E$ et $C \vee P, \neg P \vdash C$. Dans ce dernier cas $C \vee P \in E$ et donc $E \vdash C \vee P$
- Supposons que la propriété est vraie pour des preuves de longueur $n \geq 1$ et considérons une preuve de longueur $n + 1$. On distingue alors deux cas, selon la dernière règle appliquée :
  - C'est une résolution entre C_1 et C_2 : $E, \neg P \vdash C_1$, $E, \neg P \vdash C_2$ et $C_1, C_2 \vdash_{res} C$. Par hypothèse de récurrence, ($E \vdash C_1$ ou $E \vdash C_1 \vee P$) et ($E \vdash C_2$ ou $E \vdash C_2 \vee P$). Dans

chaque cas, on peut, par résolution, obtenir C, $C \vee P$ ou $C \vee P \vee P$. Dans tous les cas, $E \vdash C$ ou bien $E \vdash C \vee P$.
– C'est une factorisation de C_1 : $E, \neg P \vdash C_1 \vdash_{fact} C$. Par hypothèse de récurrence, $E \vdash C_1$ ou $E \vdash C_1 \vee P$, dans les deux cas, par factorisation, on obtient $E \vdash C$ ou $E \vdash C \vee P$.

Il suffit alors d'appliquer ce résultat avec $C = \perp$: comme E est satisfaisable, si $E, \neg P \vdash \perp$, on obtient nécéssairement $E \vdash P$.

La réciproque s'obtient par une simple étape de résolution.