Partiel de Logique

1 décembre 2004

Les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Durée : 3 heures.

Exercice 1

Une *clause de Horn* est une clause qui contient au plus un littéral positif. Si I_1 et I_2 sont deux interprétations, on note $I_1 \cap I_2$ l'interprétation définie par $I_1 \cap I_2(P) = 1$ ssi $I_1(P) = 1$ et $I_2(P) = 1$.

1. Montrer que, si E est un ensemble de clauses de Horn, alors l'intersection de deux interprétations qui satisfont E, satisfait encore E.
2. Montrer que la proposition ci-dessus n'est plus vraie si E est un ensemble de clauses quelconques.

Exercice 2

Les séquents suivants sont-ils prouvables en logique intuitioniste (LJ_0), pour toutes formules ϕ, ψ ? Justifier.

1. $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\phi \vee \neg\psi$
2. $\neg\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

Exercice 3

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution binaire et factorisation binaire. Montrer que, si P est une variable propositionnelle et E un ensemble de clauses satisfaisable, alors

$$E, \neg P \vdash \bot \quad \text{ssi} \quad E \vdash P$$

(**Ind** : on pourra ou bien généraliser la propriété en s'inspirant de la preuve de complétude de Résolution+factorisation+tiers exclu+affaiblissement (noter que l'on n'a pas ici ces deux dernière règles), ou bien utiliser une transformation de preuves).

Exercice 4

On suppose ici que $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Une clause est *positive* si elle ne contient que des littéraux positifs (c'est-à dire des variables propositionelles). On considère la stratégie

suivante de résolution (*résolution positive*) : la règle de résolution binaire n'est appliquée que si l'une des deux prémisses est une clause positive. On note alors $\overset{+}{\vdash}$ la relation de déduction définie par la règle de factorisation binaire et la règle de résolution positive.

Étant donné un ensemble de clauses E, on définit la suite I_n d'interprétation partielles comme suit :

- I_0 a un domaine vide
- Si $n \geq 0$ on note I_n^0 le prolongement de I_n par $P_{n+1} \mapsto 0$ et I_n^1 le prolongement de I_n par $P_{n+1} \mapsto 1$.
- Si I_n^0 ne falsifie aucune clause de E, alors $I_{n+1} = I_n^0$.
- So I_n^0 falsifie une clause de E et que I_n^1 ne falsifie aucune clause de E, alors $I_{n+1} = I_n^1$.
- Si I_n^0 et I_n^1 falsifient tous deux des clauses de E, la suite s'arrête. (I_{n+1} n'est pas défini).

1. Soit $E_0 = \{P \vee Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee \neg Q, Q \vee \neg P\}$ Montrer que $E_0 \overset{+}{\vdash} \bot$.
2. Montrer que, si la suite I_n est infinie, alors E est satisfaisable.
3. Montrer que, si $\bot \notin E$ et I_n^0 falsifie une clause de E, alors il existe une clause positive C_n telle que $E \overset{+}{\vdash} C_n$ et I_n^0 falsifie C (**Ind** : on pourra raisonner par récurrence sur n, puis par récurrence sur le nombre de littéraux négatif de la clause falsifiée).
4. Montrer que la stratégie positive est réfutationellement complète