Partiel de Logique

12 novembre 2002

Tous les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Durée : 3heures. Sauf mention contraire, $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n, \ldots\}$ est un ensemble infini dénombrable de variables propositionnelles. On pourra admettre certaines questions d'un exercice pour traîter les questions suivantes.

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$. Construire l'arbre sémantique de l'ensemble de clauses

$$\neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_3, P_2 \vee \neg P_3$$

2. Construire le diagramme de décision binaire pour la formule suivante, supposant $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$ et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$:

$$\neg(P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3 \rightarrow P_4) \wedge (\neg P_4 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3)))$$

Exercice 2

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution et factorisation binaire sur les formules du calcul propositionnel en forme clausale. On considère la stratégie suivante de résolution (*stratégie unitaire*) : on restreint l'application de la résolution au cas où l'une des prémisses est une clause réduite à un littéral. On note $\vdash_1$ la relation de déduction associée. (Donc $\vdash_1 \subseteq \vdash$).

1. Montrer que la stratégie unitaire n'est pas réfutationnellement complète. (On pourra considérer l'ensemble $E = \{P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2\}$).
2. Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.
   Si E est un ensemble de clauses de Horn, soit I_E l'interprétation définie par $I_E = \{P \mid E \vdash_1 P\}$. En utilisant I_E, montrer que si E est insatisfaisable, alors $E \vdash_1 \bot$ (i.e. la stratégie unitaire est complète pour les clauses de Horn).

Exercice 3

Une clause est *négative* si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée *stratégie négative* : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses tel que toute clause de E contient au moins un littéral positif. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_{\neg} \bot$ (exhiber une preuve).
3. Si I, J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que
   (a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_j) = J(P_j)$
   (b) P_k est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

   On note aussi $I \leq J$ l'ordre de prolongement des interprétations partielles.

   Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre sur les interprétations partielles et que, pour toutes interprétations partielles, $I \leq J$ ou $J \leq I$ ou $I \leq_{lex} J$ ou $J \leq_{lex} I$
4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des noeuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\geq_{lex}$ qui soit un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E.
5. Montrer la complétude réfutationnelle de $\vdash_{\neg}$ par la méthode des arbres sémantiques

Exercice 4

Montrer que, si E est un ensemble de clauses satisfaisable et P est une variable propositionnelle, alors $E, \neg P \vdash \bot$ si et seulement si $E \vdash P$. (Ind : on pourra montrer que, si $E, \neg P \vdash C$, alors $E \vdash C \vee P$ ou $E \vdash C$ ou $C = \neg P$).

Exercice 5

Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est *maximal cohérent* si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

1. Supposant que $\mathcal{P}$ est fini, montrer que tout ensembe de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.
2. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner (toujours dans le cas où $\mathcal{P}$ est fini) un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.
3. Que devient le résultat de la première question lorsque $\mathcal{P}$ est infini dénombrable ?