Devoir de logique

A rendre avant le 25 octobre 2005.

Partie 1

On se propose d'étudier ici un calcul propositionnel utilisant une autre syntaxe et d'autres règles d'inférences que celles du cours.

Les *littéraux* sont des variables propositionnelles ou leur négation. Si L est un littéral, $\overline{L}$ est le littéral complémentaire ($\neg L$ si L est une variable propositionnelle, P si $L = \neg P$).

Un *multi-ensemble* à valeurs dans un ensemble fini A est une application S de A dans les entiers naturels. La somme de deux multi-ensembles S_1, S_2 est le multi-ensemble S défini par $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ pour tout $x \in A$. $S \subseteq S'$ si, pour tout P, $S(x) \leq S'(x)$. Si k est un entier naturel et S un multi-ensemble, on note $k \times S$ le multi-ensemble S' tel que $S'(x) = k \times S(x)$. On identifie aussi x au multi-ensemble S tel que $S(x) = 1$ et $S(y) = 0$ si $y \neq x$. Enfin, $|S| = \sum_{x \in A} S(x)$.

Syntaxe: $\mathcal{P}$ est un ensemble fini de variables propositionnelles. $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, notre nouvel ensemble de formules, est constitué des expressions $\mathsf{Atleast}_k(S)$ où k est un entier naturel et S est un multi-ensemble de littéraux.

Sémantique: Une interprétation I satisfait $\mathsf{Atleast}_k(S) \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ si

$$\sum_{P \in I} S(P) + \sum_{P \notin I} S(\neg P) \geq k$$

1. On identifie $\bot$ à $\mathsf{Atleast}_k(S)$ pour $k > |S|$. Justifier cette notation

2. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules $E \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{P})$, il existe un ensemble fini de formules $E' \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ ayant les mêmes modèles que E et, réciproquement, que pour tout sous-ensemble fini de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, il existe un sous-ensemble fini de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ qui a les mêmes modèles.

3. Si S est un multi-ensemble de littéraux, on note $\overline{S}$ son conjugué: $\overline{S}(L) = S(\overline{L})$. On considère les règles d'inférence de la figure 1. Montrer que ces règles sont correctes.

$$R \quad \frac{\mathsf{Atleast}_k(S_1 + S_2) \quad \mathsf{Atleast}_l(\overline{S_1} + S_3)}{\mathsf{Atleast}_{k+l-|S_1|}(S_2 + S_3)}$$

$$F \quad \frac{\mathsf{Atleast}_k((p+1) \times L + S_1 + S_2)}{\mathsf{Atleast}_1(L + S_1)} \qquad \text{Si } |S_2| = k - 1$$

Figure 1:

4. Montrer que les règles de la figure 1 sont réfutationnellement complètes (i.e. que si E est un ensemble de formules insatisfaisables, alors on peut déduire $\bot$)

5. Les règles de la figure 1 sont elles complètes ? Si non, proposer des règles supplémentaires permettant de montrer la complétude. Si oui, le prouver.

Partie 2

Dans le jeu de démineur, on considère un graphe fini $G = (V, E)$ (souvent une grille), une application I de V dans $\{0, 1\}$ et un entier $n = |\{v \in V \mid I(v) = 1\}|$. Une configuration du jeu est une fonction (partielle) f de $\{v \in V \mid I(v) = 0\}$ dans les entiers telle que $f(v)$ est le nombre de sommets adjacents v' à v tels que $I(v') = 1$:

$$f(v) = |\{v' \in V \mid (v, v') \in E, I(v') = 1\}|$$

Le problème est de déterminer, à partir d'une configuration f, de G et de n les sommets v tels qu'à coup sûr $I(v) = 1$ et ceux tels qu'à coup sûr $I(v) = 0$.

Expliquer pourquoi les questions précédentes permettent de répondre à cette question.