3.5 Le théorème de Herbrand

3.5.1 Motivation

Bien que la satisfaisabilité (et aussi la validité) des formules propositionnelles soit décidable, ce problème est indécidable pour la logique du premier ordre comme nous allons voir plus tard dans ce chapitre (Théorème 3.5.7). Notre objectif principal dans ce paragraphe est d'obtenir une énumération récursive des formules *valides* de la logique du premier ordre, ce qui revient au même problème que de trouver une énumération récursive des formules *non-satisfaisables* (puisqu'une formule est valide si et seulement si sa négation est non-satisfaisable). Au passage, nous obtiendrons quelques théorèmes fondamentaux de la théorie des modèles de la logique du premier ordre (voir Paragraphe 3.5.4).

Comment peut-on faire pour énumérer récursivement les formules non-satisfaisables de la logique du premier ordre ? Contrairement à la logique propositionnelle, où on peut toujours bêtement tester toutes les interprétations possibles (dont il y a un nombre fini quand on se restreint aux variables qui paraissent dans la formule), l'extension à la logique du premier ordre n'est pas évidente. La difficulté principale est qu'il y a un nombre infini de structures pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ donnés. Non seulement il y a un nombre infini de structures à domaine fini, mais il y a aussi des structures à domaine dénombrable, de la cardinalité de $\mathbb{R}$, et même plus. Dans le sens strict de la théorie des ensembles, on ne peut même pas parler de l'ensemble de toutes les structures, mais seulement de la *classe* de toutes les structures.

Nous construisons l'énumération des formules non-satisfaisables en plusieurs étapes :

1. Simplifier syntaxiquement la formule, en conservant la satisfaisabilité.

   Nous avons déjà vu dans le paragraphe 3.4 qu'on peut réduire la question de la (non-)satisfaisabilité d'une formule quelconque à la question de la (non-)satisfaisabilité d'un ensemble fini de formules en forme clausale.

2. Pour les formules simplifiées trouvées dans l'étape précédente, remplacer l'espace de toutes les structures possibles par une classe plus simple de structures, telle qu'une formule (en forme clausale) est satisfaisable si et seulement si elle a un modèle dans la classe simple.

3. Finalement, nous obtiendrons un lien entre la logique propositionnelle et la logique du premier ordre, qui nous permettra de construire l'énumération effective cherchée des formules non-satisfaisables de la logique du premier ordre.

Dans ce paragraphe nous allons d'abord discuter la notion de *plongement* entre structures (Paragraphe 3.5.2 et ensuite en Paragraphe 3.5.3 présenter la classe souhaitée plus simple des structures. Dans la Paragraphe 3.5.4 nous en tirerons quelques conséquences intéressantes, et établirons le lien entre la logique propositionnelle et la logique du premier ordre qui nous donnera l'énumération récursive cherchée.

3.5.2 Homomorphismes et plongements

Definition 3.5.1 *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structures. Un* homomorphisme *h de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application de $D_{\mathcal{A}}$ dans $D_{\mathcal{B}}$ telle que h est un homomorphisme de la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{A}$ vers la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{B}$, et de plus pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n \in D_{\mathcal{A}}$ et pour tout symbole de prédicat $P \in \mathcal{P}$,*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P_{\mathcal{A}} \quad \textit{implique} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P_{\mathcal{B}}$$

h est un plongement *(angl. : embedding) ssi h est un homomorphisme, et de plus*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P_{\mathcal{A}} \quad \textit{ssi} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P_{\mathcal{B}}$$

Exemple 3.5.1 On reprend l'exemple 3.2.2 : Soient $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. On considère la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure $\mathbb{N}$, la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure $\mathbb{Z}_2$, et la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure $\mathbb{R}$.

L'application qui à tout entier n associe le réel n est un homomorphisme, et même un plongement, de la structure $\mathbb{N}$ dans la structure $\mathbb{R}$.

L'application qui à tout entier associe son reste modulo 2 est un homomorphisme de la structure $\mathbb{N}$ vers la structure $\mathbb{Z}_2$, mais ce n'est pas un plongement (pourquoi ?).

Exercice 79 (3)
Suite à l'exemple 3.5.1, montrer qu'il n'y a ni homomorphisme de $\mathbb{Z}_2$ vers $\mathbb{N}$, ni de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{N}$.

Proposition 3.5.1 *Si $h\colon A \to B$ est un plongement et ϕ une formule sans quantificateur alors pour toute $\mathcal{A}$-affectation α*

$$\alpha, \mathcal{A} \models \phi \quad \textit{ssi} \quad h \circ \alpha, \mathcal{B} \models \phi$$

<u>Preuve:</u>
Par récurrence :

Pour les formules atomiques c'est la définition d'un plongement.

Soit $\psi = \neg\phi$, et supposons que l'énoncé est vrai pour la formule ϕ. On a

$$\begin{array}{lcll} \alpha, \mathcal{A} \models \psi & \Leftrightarrow & \alpha, \mathcal{A} \not\models \phi & \text{définition sémantique} \\ & \Leftrightarrow & h \circ \alpha, \mathcal{B} \not\models \phi & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & \Leftrightarrow & h \circ \alpha, \mathcal{B} \models \psi & \text{définition sémantique} \end{array}$$

Les cas $\wedge$, $\vee$, et $\rightarrow$ sont démontrés de manière similaire. □

Exercice 80 (4)
Montrer que la validité n'est pas conservée par homomorphisme :

Donner un exemple d'un homomorphisme h d'une structure $\mathcal{A}$ dans une structure $\mathcal{B}$ et une formule close ϕ tel que $\mathcal{A} \models \phi$ et $\mathcal{B} \not\models \phi$.

Est-ce que la validité est conservée par plongement ?

Lemme 3.5.1 *La validité des formules existentielles closes est conservée par plongement : Si $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un plongement, ϕ une $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formule existentielle close, et $\mathcal{A} \models \phi$ alors $\mathcal{B} \models \phi$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{A} \models \exists x_1, \ldots, x_n\, \phi$ où ϕ est sans quantificateur, et $\mathrm{Var}(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Par définition de la sémantique, il existe $a_1, \ldots, a_n \in a$ tels que

$$[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n], \mathcal{A} \models \phi$$

Donc, par la proposition 3.5.1, on a

$$[x_1 \mapsto h(a_1), \ldots, x_n \mapsto h(a_n)], \mathcal{B} \models \phi$$

Par conséquent, $\mathcal{B} \models \exists x_1, \ldots, x_n\, \phi$. □

Exercice 81 (5)
Pour quelle classe de formules, la validité est-elle conservée par homomorphisme ?

Lemme 3.5.2 *La satisfaisabilité des formules universelles closes est conservée par plongement inverse : Si $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un plongement, ϕ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formule universelle close, et $\mathcal{B} \models \phi$ alors $\mathcal{A} \models \phi$.*

Preuve:
Supposons, sous les hypothèses du lemme sur h et ϕ que $\mathcal{B} \models \phi$ et $\mathcal{A} \not\models \phi$. Donc, $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Or, $\neg\phi$ est équivalente à une formule existentielle close ψ, donc par lemme 3.5.1 $B \models \psi$ et $\mathcal{B} \not\models \phi$. Absurde. □

Nous avons vu dans le p¡aragraphe 3.4 que, pour les questions de satisfaisabilité, on peut toujours se retirer aux formules universelles closes puisque toute forme clausale est une formule universelle close. D'après le lemme 3.5.2, la classe des structures « simples » devrait alors avoir la propriété que pour toute structure il y a une structure « simple » qui est plongée dedans.

3.5.3 Les structures de Herbrand

Definition 3.5.2 *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de symboles de fonctions qui contient une constante, et $\mathcal{P}$ un ensemble de symboles de prédicats.*

1. *Le $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-*univers de Herbrand *est $T(\mathcal{F})$.*
2. *Une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-*structure de Herbrand *$\mathcal{H}$ est une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure avec domaine $T(\mathcal{F})$, et telle que $f_H(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ pour tous les $f \in \mathcal{F}$ et tous les $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F})$.*
3. *La $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-*base de Herbrand *est l'ensemble des atomes clos sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$: $\{P(t_1, \ldots, t_n\} \mid t_i \in T(\mathcal{F}), P \in \mathcal{P}\}$.*

Étant données $\mathcal{F}, \mathcal{P}$, toutes les structures de Herbrand ont le même univers et interprètent les symboles de fonction de la même façon. La seule liberté qui reste dans le choix d'une structure de Herbrand est le choix des interprétations des symboles de prédicat.

On peut donc identifier chaque $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand avec une partie de la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-base de Herbrand : On identifie une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand $\mathcal{H}$

avec la partie de la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-base de Herbrand qui consiste en tous les atomes clos qui sont vrais en $\mathcal{H}$. Ainsi, la structure de Herbrand où tous les prédicats sont toujours faux correspond à l'ensemble vide, et la structure de Herbrand où tous les prédicats sont toujours vrais correspond à la base de Herbrand elle-même

L'ordre d'inclusion sur les sous-ensembles de la base de Herbrand entraîne un ordre sur les structures de Herbrand : Une structure de Herbrand $\mathcal{H}_1$ est dite plus petite qu'une structure de Herbrand $\mathcal{H}_2$ si pour tout symbole de prédicat P, $P_{\mathcal{H}_1} \subseteq P_{\mathcal{H}_2}$. De plus, toutes les opérations sur les parties de la base de Herbrand, comme complément, union, intersections, se transfèrent maintenant de manière naturelle vers les structures de Herbrand. On peut donc parler de l'intersection, l'union, etc. de deux structures de Herbrand (sur le même $\mathcal{F},\mathcal{P}$).

Exercice 82 (3)
Donner un exemple d'une formule qui possède plusieurs modèles de Herbrand minimaux (et qui n'a donc pas de plus petit modèle de Herbrand).

Dans la suite nous supposons que $\mathcal{F}$ contient toujours une constante. Remarquons que, si S est un ensemble de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules et $\mathcal{F}$ ne contient pas de constante, alors S possède un $\mathcal{F},\mathcal{P}$-modèle si et seulement si S possède un $\mathcal{F}\cup\{a\},\mathcal{P}$-modèle où a est un symbole de constante.

Lemme 3.5.3 *Pour chaque $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure $\mathcal{A}$ il existe une structure de Herbrand $\mathcal{H}$ unique telle que $\mathcal{H}$ est plongée dans A. De plus, le plongement est unique.*

Preuve:
Étant donnée la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure $\mathcal{A}$, la structure de Herbrand $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ plongée dans $\mathcal{A}$ est donnée par $\{P(t_1,\dots,t_n) \mid (\llbracket t_1\rrbracket_\mathcal{A},\dots,\llbracket t_n\rrbracket_\mathcal{A}) \in P_\mathcal{A}\}$.

On vérifie que $h_\mathcal{A}\colon \mathcal{H}_\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $h_\mathcal{A}(t) := \llbracket t\rrbracket_\mathcal{A}$, est un plongement. C'est un homomorphisme d'algèbres parce que

$$\begin{array}{rcl} h_\mathcal{A}(f_{\mathcal{H}_\mathcal{A}}(t_1,\dots,t_n)) & = & h_\mathcal{A}(f(t_1,\dots,t_n) \\ & = & \llbracket f(t_1,\dots,t_n)\rrbracket_\mathcal{A} \\ & = & f_\mathcal{A}(\llbracket t_1\rrbracket_\mathcal{A},\dots,\llbracket t_n\rrbracket_\mathcal{A}) \\ & = & f_\mathcal{A}(h_\mathcal{A}(t_1),\dots,h_\mathcal{A}(t_n)) \end{array}$$

C'est un plongement parce que

$$\begin{array}{rcl} (t_1,\dots,t_n) \in P_{\mathcal{H}_\mathcal{A}} & \Leftrightarrow & (\llbracket t_1\rrbracket_\mathcal{A},\dots,\llbracket t_n\rrbracket_\mathcal{A}) \in P_\mathcal{A} \\ & \Leftrightarrow & (h_\mathcal{A}(t_1),\dots,h_\mathcal{A}(t_n)) \in P_\mathcal{A} \ \Box \end{array}$$

□

Exercice 83 (3)
On considère $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$, et la structure $(\mathbb{R}, 0, x \mapsto x+1)$. Quelle est la $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure de Herbrand plongée dans cette structure ?

Même question pour $\mathcal{F} = \{0(0), 1(0), +(2)\}$ et la structure $(\mathbb{R}, 0, 1, +, =)$.

Théorème 3.5.1 (Herbrand) *Soit S un ensemble de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules universelles closes. S est satisfaisable si et seulement si S est satisfaisable par une $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure de Herbrand.*

Preuve:
Soit $\mathcal{A} \models S$. Par Lemme 3.5.3, il y a une structure de Herbrand $\mathcal{H}$ qui est plongée dans $\mathcal{A}$. Par Lemme 3.5.2, $\mathcal{H} \models S$. □

Exercice 84 (3)
Est-ce que chaque ensemble satisfaisable de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules closes possède un $\mathcal{F},\mathcal{P}$-modèle de Herbrand ?

Théorème 3.5.2 *Soit S un ensemble de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules closes. S est satisfaisable si est seulement s'il existe un $\mathcal{F}'$ avec $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ et une $\mathcal{F}',\mathcal{P}$-structure de Herbrand qui satisfait S.*

Preuve:
Pour montrer que quand S est satisfaisable alors S possède un $\mathcal{F}', P$-modèle de Herbrand pour un $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ (l'autre direction est triviale) :

Étant donné S, on construit l'ensemble S_{pr} des formes prénexes des formules de S. Les ensembles S et S_{pr} ont les mêmes modèles.

Puis, on construit l'ensemble S_{sk} de toutes les skolémisations des formules en S_{pr}. La skolémisation introduit des nouveaux symboles de fonction, on obtient donc une extension $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ (Attention, $\mathcal{F}' - \mathcal{F}$ peut être infini dans le cas où S est infini). D'après la proposition 3.4.1, S_{pr} possède un $\mathcal{F},\mathcal{P}$-modèle si et seulement si S_{sk} possède un $\mathcal{F}',\mathcal{P}$-modèle. En fait, chaque modèle de S_{sk} est un modèle de S_{nf} dans le langage étendu $(\mathcal{F}',\mathcal{P})$.

Si $\mathcal{A} \models S$ alors $\mathcal{A} \models S_{pr}$, et S_{sk} est satisfaisable. S_{sk} est un ensemble de formules universelles closes. Donc, par Théorème 3.5.1, S_{sk} possède un $\mathcal{F}',\mathcal{P}$-modèle de Herbrand, qui est dans le langage étendu alors aussi un modèle de S_{pr} et de S. □

Exercice 85 (3)
Soit $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{P(2)\}$, et S l'ensemble des deux formules

$$\begin{array}{l} \forall x \exists y\, R(x,y) \\ \exists x \forall y (R(x,y) \rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge \neg R(z,y))) \end{array}$$

Construire un $\mathcal{F}'$ et une $\mathcal{F}',\mathcal{P}$-structure de Herbrand qui est un modèle de S.

Le théorème de Herbrand nous fait avancer un peu dans la question : « Étant donné un ensemble S de formules, est-il non-satisfaisable ? » puisqu'on peut transformer S en un ensemble S' de formules universelles (éventuellement en introduisant des nouvelles symboles de fonction) tel que S est non-satisfaisable ssi S' est non-satisfaisable, et puis restreindre la recherche d'un modèle de S' aux structures de Herbrand. Malheureusement, cela ne nous donne pas un algorithme de semi-décision parce que le nombre de structures de Herbrand est en général (c'est-à-dire, quand l'ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F}$ contient au moins un symbole qui n'est pas une constante) infini. On ne peut donc pas en tester en temps fini toutes les structures de Herbrand. Un tel algorithme existe (voir la section suivante), mais il nous faut une nouvelle idée pour y arriver.

De plus, on n'obtient pas une énumération récursive des formules *satisfaisables* : Même quand l'univers de Herbrand est dénombrable, l'ensemble de toutes les structures de Herbrand est non-dénombrable. Il n'y a donc pas d'énumération exhaustive de toutes les structures de Herbrand. En fait, l'ensemble des des formules *satisfaisables* n'est pas récursivement énumérable.

3.5.4 Conséquences du théorème de Herbrand

Nous revenons à la question d'une méthode de sémi-décision de la validité (ou non-satifaisabilité) à la fin de cette section. D'abord nous donnons quelques conséquences du théorème de Herbrand.

Une première conséquence est le théorème de Skolem et Löwenheim, disant que chaque théorie satisfaisable a un « petit » modèle. Remarquez que le Théorème 3.5.1 ne s'applique qu'aux formules universelles.

Théorème 3.5.3 (Skolem et Löwenheim) *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables. Si un ensemble S de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules a un modèle alors S a un modèle dénombrable (c'est-à-dire, un modèle avec un domaine dénombrable).*

Plus généralement si S a un modèle alors S à un modèle de cardinalité $\leq \max(\aleph_0, \mathit{card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$.

(La cardinalité dénombrable est notée $\aleph_0$, prononcée « Aleph Zéro ».)

Preuve:
La preuve est un raffinement de la preuve du Théorème 3.5.2, il faut simplement « compter » les cardinalités des ensembles de formules construits dans cette preuve.

Dans le cas d'un langage dénombrable : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables. L'ensemble de tous les $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules est donc aussi dénombrable. En particulier, pour un ensemble S donné, sa forme prénexe S' est dénombrable. Puisque chaque formule ne contient qu'un nombre fini de quantificateurs, la skolémisation de S' peut introduire un ensemble dénombrable de nouvelles symboles de fonctions. La cardinalité de l'univers de Herbrand est donc dénombrable.

Pour le cas général : Soit $\alpha = \mathrm{card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{P})$. Il y a $\max(\alpha, \aleph_0)$ formules construites sur $\mathcal{F},\mathcal{P}$. Pour un ensemble S donné, sa forme prénexe S' ne peut pas contenir plus que $\max(\alpha, \aleph_0)$ formules. Puisque chaque formule ne contient qu'un nombre fini de quantificateurs, la skolémisation de S' peut introduire au maximum $\max(\alpha, \aleph_0)$ nouvelles symboles de fonctions. La cardinalité de l'univers de Herbrand est donc au maximum $\max(\max(\alpha, \aleph_0), \aleph_0) = \max(\alpha, \aleph_0)$. □

Exercice 86
Supposant que $\mathcal{F},\mathcal{P}$ sont dénombrables. Le théorème 3.5.3 est le théorème de Löwenheim-Skolem *descendant*. Montrer le théorème *ascendant* : si S est un ensemble de $\mathcal{F},\mathcal{P}$-formules qui a un modèle de cardinal $\alpha \geq \aleph_0$, alors, pour

tout $\beta \geq \alpha$, S a un modèle de cardinal β. (On rappelle que les cardinaux sont des classes d'équivalence d'ensembles pour la relation d'équivalence "être en bijection". L'ordre sur les cardinaux est défini par $\beta \geq \alpha$ s'il existe une surjection de β dans α ou, de manière équivalente, s'il existe une injection de α dans β).

Une autre conséquence du théorème de Herbrand est qu'on peut maintenant transférer certains théorèmes de la logique propositionnelle vers la logique du premier ordre. L'idée est, étant donnée une formule universelle, de construire ses *instances de Herbrand* :

$$H(\forall x_1, \ldots, x_n\, P) := \{P[x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F})\}$$

et, pour un ensemble S, $H(S) := \{H(s) \mid s \in S\}$.

Théorème 3.5.4 *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ comme d'habitude, et S un ensemble de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules universelles closes, et soit $\mathcal{P}'$ la base de Herbrand sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$. S a un $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-modèle si et seulement si l'ensemble de formules propositionnelles $H(S)$ a un modèle propositionnel, où $\mathcal{P}'$ est considéré comme l'ensemble des variables propositionnelles.*

Preuve:
Par Théorème 3.5.1. Remarquez que, pour toute structure de Herbrand $\mathcal{H}$ et toute formule universelle close ϕ, $\mathcal{H} \models \phi$ ssi $\mathcal{H} \models H(\phi)$. □

Théorème 3.5.5 (Compacité) *Un ensemble de formules est satisfaisable si et seulement si chacun des ses sous-ensembles finis est satisfaisable.*

Preuve:
Si $\mathcal{A}$ est un modèle de S alors $\mathcal{A}$ est évidemment aussi un modèle de chaque sous-ensemble (fini) de S.

Pour une formule ϕ, nous notons $su(\phi)$ sa forme prénexe et skolemisée. Supposons que T n'a pas de modèle. Donc, $su(T)$ n'a pas de modèle. Par Théorème 3.5.4, $H(su(T))$ n'a pas de modèle (propositionnel). Par la compacité de la logique propositionnelle, il y a un sous-ensemble fini $H' \subseteq H(su(T))$ qui n'a pas de modèle propositionnel. Donc, il existe un sous-ensemble fini $S' \subseteq su(T)$ tel que $H' \subseteq H(S')$. Évidemment, $H(S')$ n'a pas de modèle propositionnel, donc, par Théorème 3.5.4, S' n'a pas de modèle. Par conséquence, il y a un sous-ensemble fini $T' \subseteq T$ tel que $su(T') = S'$, et qui n'a donc pas de modèle. □

Le théorème de compacité a des conséquences importantes pour les limites de l'expressivité de la logique du premier ordre. Ces conséquences sont plus significatives dans la logique du premier ordre *avec égalité*, nous envoyons donc cette discussion vers le chapitre **??**.

Definition 3.5.3 *Une* présentation *d'une théorie T est un ensemble E de formules tel que T et E ont les mêmes modèles.*

En particulier, une présentation d'une théorie peut être finie, tandis qu'une théorie n'est jamais finie (parce qu'une théorie contient toujours toutes les formules valides).

Definition 3.5.4 *Une* clause universelle *est une formule de la forme*

$$\forall x_1, \ldots, x_n\, (L_1 \vee \ldots \vee L_n)$$

où chacun des L_i est un littéral.

Une clause de Horn universelle *est une clause universelle, où un littéral au maximum est positif.*

Une théorie universelle de Horn *est une théorie qui a une présentation par un ensemble de clauses universelles de Horn.*

Théorème 3.5.6 *L'ensemble de modèles de Herbrand d'une théorie universelle de Horn est clos par intersection.*

Chaque théorie universelle de Horn satisfaisable a un modèle de Herbrand le plus petit.

Exercice 87
Démontrer Théorème 3.5.6.

Théorème 3.5.7 *L'ensemble des formules valides n'est pas décidable.*

Preuve:
Soit $P = \{(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)\}$ une instance du problème de Post sur l'alphabet $\{a, b\}$. Soit l'ensemble de de symboles fonctions $\mathcal{F} = \{\epsilon(0), a(1), b(1)\}$, et l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{R(2)\}$. Si w est un mot $c_1, \ldots, c_n \in \{a, b\}^*$, alors on note $w(t)$ comme abréviation du terme $c_1(\cdots(c_n(t))\cdots)$.

Considérons la formule $Solv_P$ suivante :

$$\begin{aligned} &\Big[R(\epsilon, \epsilon) \quad \wedge \quad \forall x, y\Big(R(x, y) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} R(p_i(x), q_i(y))\Big)\Big] \\ \rightarrow \quad &\exists x\Big(R(a(x), a(x)) \vee R(b(x), b(x))\Big) \end{aligned}$$

On peut montrer que P a une solution si et seulement si la formule $Solv_P$ est valide. $\square$

Exercice 88
Compléter la preuve du théorème 3.5.7.

Remarquons que, si $\mathcal{F}$ contient une constante et un symbole de fonction, il y a un nombre non-dénombrable de modèles de Herbrand. Pourtant, on obtient un premier résultat de sémi-décidabilité de la logique du premier ordre :

Théorème 3.5.8 *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ sont récursivement énumérables, alors l'ensemble des formules valides est récursivement énumérable.*

Preuve:
Soit ϕ une formule. Puisque ϕ ne peut contenir qu'un nombre fini de symboles de fonction et de symboles de prédicats, nous pouvons supposer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ sont finis. Nous construisons, par mise en forme prénexe et skolémisation de la *négation de* ϕ, un ensemble de formules universelles U qui est non-satisfaisable si et seulement si ϕ est valide. Remarquons que l'ensemble U est fini, et que le nombre de symboles de fonction introduits par la skolémisation est fini. $H(U)$ est donc dénombrable. Par le Théorème 3.5.4, il suffit de tester si $H(U)$ est non-satisfaisable dans la logique propositionnelle.

Si, $H(U)$ est fini, il suffit de tester si $H(U)$ est non-satisfaisable.

Sinon, $H(U) = \{u_i \mid i \geq 0\}$, et cette énumération est effective. Par le théorème de compacité de la logique propositionnelle, il suffit de tester s'il y a un sous-ensemble fini de $H(U)$ qui est non-satisfaisable. Au lieu de faire ce test pour tous les sous-ensembles finis de $H(U)$, il est plus facile de tester successivement si les ensembles $\{u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ sont non-satisfaisable. L'algorithme peut donc être écrit en pseudo-code comme

```
T := ∅ ;
n := 0 ;
while satisfaisable(T) do begin
   T := T ∪ { u_n } ;
   n := n+1 ;
end ;
print "la formule est valide" ;
```

Si $H(U)$ est satisfaisable alors le test de la boucle donne toujours vrai, et l'exécution de l'algorithme ne termine pas. Si $H(U)$ n'est pas satisfaisable alors l'exécution s'arrête dès qu'on tombe sur un sous-ensemble fini et non-satisfaisable de $H(U)$. $\square$

Corollaire 3.5.1 *L'ensemble des formules satisfaisables n'est pas récursivement énumérable.*

Preuve:
Supposons que l'ensemble des formules satisfaisables soit récursivement énumérable. L'ensemble des formules non-valides l'est alors aussi (par passage d'une formule à sa négation), ce qui est en contradiction avec les théorèmes 3.5.7 et 3.5.8. $\square$