Exemple 3.3.1 On considère $\mathcal{F} = \{0(0), 1(0), +(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2), \geq(2)\}$. Soit la structure définie par $D_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$ muni du 0, du 1, et de l'addition. $=$ et $\geq$ sont interprétés par l'égalité et l'ordre habituel sur les entiers.

L'ensemble des formules dont cette structure est un modèle est *l'arithmétique de Presburger*.

La théorie contient par exemple $\forall y.\exists x.(y = x + x \vee y = x + (x+1))$.

Cette théorie est récursive, résultat dû à Presburger (1929). Il en existe de nombreuses preuves.

Exemple 3.3.2 On considère $\mathcal{F} = \{0, 1, +, *\}$ et $\mathcal{P} = \{=, \geq\}$. Comme dans l'exemple précédent, la structure est définie par les entiers naturels avec les interprétations usuelles des symboles.

La théorie de cette structure est appelée *arithmétique de Peano*. Cette théorie est indécidable (pas récursivement énumérable), résultat dû, entre autres, à Gödel.

Exemple 3.3.3 Reprenant l'exemple 3.1.9, l'ensemble des conséquences logiques des axiomes de l'égalité et des axiomes des groupes est la *théorie du premier ordre des groupes*. C'est une théorie qui possède une axiomatisation finie, mais qui n'est pas complète. (cf. exercice ci-dessous).

Exercice 70 (4)
Soit ϕ la formule $\forall x.\forall y.x = y$. Montrer que ni ϕ ni $\neg\phi$ n'est une conséquence logique des axiomes de la théorie des groupes (donnés dans les exemples 3.1.9, 3.1.7).

En déduire que la théorie des groupes est incomplète.

Exemple 3.3.4 Reprenant les formules de l'exemple 3.1.8, la théorie qu'ils engendrent est la *théorie des ordres denses*. On peut montrer qu'elle est récursive mais pas complète. (Pourquoi ?)

Exemple 3.3.5 On considère $\mathcal{P} = \{\geq(2), =(2)\}$ et les axiomes suivants des *ordres discrets* : on reprend les trois premiers axiomes de l'exemple 3.1.8, le dernier axiome étant remplacé par les axiomes suivants :

$$\begin{array}{l} \exists x.\forall y.y \geq x \\ \forall x.\exists y.y \geq x \wedge (\forall z.(z \geq x \wedge z \neq y \rightarrow z \geq y)) \\ \forall x.(\forall y.y \geq x) \vee (\exists z.z \leq x \wedge (\forall y.y \geq z \rightarrow (y = z \vee y \geq x))) \end{array}$$

Ces axiomes engendrent la *théorie des ordres discrets* $\mathcal{TOD}$.

Exercice 71
Montrer que la formule suivante est dans $\mathcal{TOD}$:

$$\forall x.\forall y.\forall y'.(y \geq x \wedge y \geq x' \wedge (\forall z.z \geq x \rightarrow z \geq y) \wedge (\forall z.z \geq x \rightarrow z \geq y')) \rightarrow y = y'$$

La théorie $\mathcal{TOD}$ est en fait complète (et récursive). Cependant :

Exercice 72 (4)
Donner deux modèles de $\mathcal{TOD}$ qui ne sont pas isomorphes.

Comme la théorie est complète, les deux modèles sont par contre élémentairement équivalents.

$$
\begin{array}{rcll}
(\forall x.\phi) * \psi & \Rightarrow & \forall x.(\phi * \psi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \text{ et } * \in \{\wedge, \vee\} \\
(\exists x.\phi) * \psi & \Rightarrow & \exists x.(\phi * \psi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \text{ et } * \in \{\wedge, \vee\} \\
\psi * (\forall x.\phi) & \Rightarrow & \forall x.(\psi * \phi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \text{ et } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\
\psi * (\exists x.\phi) & \Rightarrow & \exists x.(\psi * \phi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \text{ et } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\
(\forall x.\phi) \rightarrow \psi & \Rightarrow & \exists x.(\phi \rightarrow \psi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \\
(\exists x.\phi) \rightarrow \psi & \Rightarrow & \forall x.(\phi \rightarrow \psi) & \text{Si } x \notin \mathsf{VL}(\psi) \\
\neg(\exists x.\phi) & \Rightarrow & \forall x.\neg\phi & \\
\neg(\forall x.\phi) & \Rightarrow & \exists x.\neg\phi &
\end{array}
$$

FIG. 3.2 – Mise sous forme prénexe

3.4 Mise sous forme clausale

3.4.1 Mise sous forme prénexe

Une formule du premier ordre est en *forme prénexe* si elle s'écrit

$$Q_1 x_1. \cdots Q_n x_n.\phi$$

où $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ et ϕ est sans quantificateurs.

On utilise les règles de la figure 3.2. Chacune de ces règles transforme une formule en une formule logiquement équivalente et les règles se terminent. De plus les formules irréductibles sont en forme prénexe.

Exercice 73 (2)
Montrer que la forme prénexe n'est pas unique : donner une formule ϕ qui se réduit de deux façons par les règles de la figure 3.2

Exercice 74
Plus généralement, on appelle *alternance de quantificateurs* d'une formule $\phi = Q_1 x_1. \cdots Q_n x_n.\psi$ en forme prénexe le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $Q_i \neq Q_{i+1}$. Pour tout N donner une formule ϕ_N ayant deux formes prénexes, l'une dont l'alternance de quantificateurs est 1, l'autre dont l'alternance de quantficateurs est N.

Une formule est *purement universelle* (resp. *purement existentielle*), ou simplement *universelle* (resp. *existentielle*) si elle est en forme prénexe et ne contient que des quantificateurs universels (resp. existentiels).

3.4.2 Skolémisation

La *skolémisation* est une transformation de formules qui permet d'éliminer les quantificateurs existentiels, mais ne préserve pas les modèles de la formule.

$$\exists x.\phi \Rightarrow \overline{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \phi\{x \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)\} \quad \text{si } \mathsf{VL}(\exists x.\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } f \notin \mathcal{F}$$

Ainsi, la règle ci-dessus associe à une formule de $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ une formule de $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F} \uplus \{f\}, \mathcal{X})$.

Si ϕ est une formule irréductible pour les quatre dernière règles de la figure 3.2, on généralise la règle de Skolémisation par :

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{\phi \wedge \psi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \overline{\phi} \wedge \overline{\psi} & \\
\overline{\phi \vee \psi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \overline{\phi} \vee \overline{\psi} & \\
\overline{\phi \to \psi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \phi \to \overline{\psi} & \text{Si } \phi \text{ est sans quantificateur} \\
\overline{\forall x.\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \forall x.\overline{\phi} & \\
\overline{\exists x.\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \overline{\phi\{x \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)\}} & \text{si } \mathsf{VL}(\exists x.\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } f \notin \mathcal{F} \\
\overline{\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} & \phi & \text{Si } \phi \text{ est sans quantificateur}
\end{array}
$$

Exemple 3.4.1 En reprenant l'exemple 3.1.9, si E est un ensemble de formules contenant les axiomes de la théorie des groupes, on peut remplacer

$$\exists e.\forall x.x * e = x \wedge e * x = x$$

par skolémisation, par la formule :

$$\forall x.x * e = x \wedge e * x = x$$

où, cette fois, e est une nouvelle constante dans l'alphabet.

De même, la troisième formule, après introduction d'un nouveau symbole de fonction I est transformée en :

$$\forall x.\forall z.x * I(x) = I(x) * x \wedge (I(x) * x) * z = z \wedge z * (I(x) * x) = z$$

Si l'on démontre ensuite l'unicité de l'élément neutre, on aura en fait $I(x) * x = x * I(x) = e$.

Exercice 75 (2)
Donner une forme Skolémisée de la formule

$$\forall x.(\exists y.\forall z.P(x, y, z)) \wedge (\forall z.\exists y.Q(x, y, z))$$

Proposition 3.4.1 *La skolémisation préserve la satisfaisabilité : si $\overline{\phi}$ est une formule obtenue à partir de ϕ par skolémisation, alors $E \cup \{\phi\}$ est satisfaisable si et seulement si $E \cup \{\overline{\phi}\}$ est satisfaisable.*

Corollaire 3.4.1 *E est satisfaisable si et seulement si $\{\overline{\phi} \mid \phi \in E\}$ est satisfaisable.*

La Skolémisation ne permet pas d'étudier les théories logiques, mais permet de ramener le problème de la conséquence logique à celui de formules purement universelles : $E \models \phi$ si et seulement si $E, \neg\phi$ est insatisfaisable, si et seulement si $\overline{E} \cup \{\overline{\neg\phi}\}$ est insatisfaisable.

C'est pourquoi dans la suite on s'interessera essentiellement à la complétude réfutationnelle d'un système de déduction.

Exercice 76 (3)
Donner une suite de formules ϕ_n telle que, selon la stratégie de mise en forme prénexe, la somme des arités des symboles de fonction après Skolémisation est n ou 2^n.

3.4.3 Forme clausale

Après mise en forme prénexe et Skolémisation, on ramène le problème de la satisfaisabilité d'un ensemble de formules à celui de la satisfaisabilité d'un ensemble de formules purement universelles :

$$\forall x_1, \ldots, x_n . \phi$$

où ϕ est sans quantificateur.

On peut alors utiliser les règles du paragraphe 2.3, et supposer de plus ϕ en forme clausale. On utilise alors la règle :

$$\forall x.(\phi \wedge \psi) \Rightarrow (\forall x.\phi) \wedge (\forall x.\psi)$$

si bien que la satisfaisabilité de E est ramenée à la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses dans lesquelles on omet souvent les quantifications universelles.

Definition 3.4.1 *Une formule est* sous forme clausale *si c'est* $\bot, \top$ *ou bien une conjonction de formules purement universelles* $\forall x_1, \ldots, x_n.\phi$ *où* ϕ *est une disjonction de formules atomiques (littéraux).*

Exercice 77
Mettre sous forme clausale les formules suivantes :

1. $(\exists x.\forall y.P(x, y)) \vee \neg(\exists x.\forall y.Q(x, y))$
2. $\forall y_1.\exists x_1.\forall y_2.\exists x_2.P(x_1, x_2) \wedge \neg P(y_1, y_2)$
3. $(\forall x.\exists y.P(x, y)) \rightarrow (\exists x.\forall y.P(x, y))$

Exercice 78
On s'autorise ici, lors de la mise en forme clausale (ce qui comprend les étapes de mise en forme prénexe et Skolémisation), à introduire des nouveaux symboles de prédicats :

$$\psi[\phi] \Rightarrow \psi[P(x_1, \ldots, x_n)] \wedge (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi)$$

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de ϕ et P est un nouveau symbole de prédicat.

1. Montrer que la règle ci-dessus préserve la satisfaisabilité (et l'insatisfaisabilité).
2. Montrer que, pour tout n, il existe une formule ϕ_n dont toutes les formes clausales sont de taille $O(2^n)$, alors qu'avec la règle supplémentaire cidessus, on obtient une forme clausale de taille $O(n)$.