Exemple 3.1.9 $\mathcal{F} = \{*(2)\}$. $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. On suppose les axiomes de l'égalité. Les axiomes des groupes sont alors obtenus en ajoutant les formules :

$$\begin{array}{l}\forall x, y, z. x * (y * z) = (x * y) * z \\ \exists e. \forall x. x * e = x \wedge e * x = x \\ \forall x. \exists y. \forall z. (x * y) * z = z \wedge x * y = y * x \wedge z * (x * y) = z\end{array}$$

Les quantificateurs *lient* les variables. On définit ainsi les variables liées ($\mathsf{VB}(\phi)$) et les variables libres ($\mathsf{VL}(\phi)$) d'une formule ϕ (resp. d'un terme t), par récurrence sur le terme t, puis la formule :

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{VL}(x) & = & \{x\} & \text{Si } x \in \mathcal{X} \\
\mathsf{VB}(x) & = & \emptyset & \\
\mathsf{VL}(f(t_1, \ldots, t_n)) & = & \mathsf{VL}(t_1) \cup \ldots \cup \mathsf{VL}(t_n) & \text{Pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ d'arité } n \\
\mathsf{VB}(f(t_1, \ldots, t_n)) & = & \emptyset & \text{Pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ d'arité } n \\
\mathsf{VL}(P(t_1, \ldots, t_n)) & = & \mathsf{VL}(t_1) \cup \ldots \cup \mathsf{VL}(t_n) & \text{Pour tout } P \in \mathcal{P} \text{ d'arité } n \\
\mathsf{VB}(P(t_1, \ldots, t_n)) & = & \emptyset & \text{Pour tout } P \in \mathcal{P} \text{ d'arité } n \\
\mathsf{VL}(\bot) = \mathsf{VL}(\top) & = & \emptyset & \\
\mathsf{VB}(\bot) = \mathsf{VL}(\bot) & = & \emptyset & \\
\mathsf{VL}(\phi \wedge \psi) = \mathsf{VL}(\phi \vee \psi) & = & \mathsf{VL}(\phi) \cup \mathsf{VL}(\psi) & \\
\mathsf{VL}(\phi \to \psi) & = & \mathsf{VL}(\phi) \cup \mathsf{VL}(\psi) & \\
\mathsf{VB}(\phi \wedge \psi) = \mathsf{VB}(\phi \vee \psi) & = & \mathsf{VB}(\phi) \cup \mathsf{VB}(\psi) & \\
\mathsf{VB}(\phi \to \psi) & = & \mathsf{VB}(\phi) \cup \mathsf{VB}(\psi) & \\
\mathsf{VL}(\neg\phi) & = & \mathsf{VL}(\phi) & \\
\mathsf{VB}(\neg\phi) & = & \mathsf{VB}(\phi) & \\
\mathsf{VL}(\exists x.\phi) = \mathsf{VL}(\forall x.\phi) & = & \mathsf{VL}(\phi) \setminus \{x\} & \\
\mathsf{VB}(\exists x.\phi) = \mathsf{VB}(\forall x.\phi) & = & \mathsf{VB}(\phi) \cup \{x\} &
\end{array}$$

Exemple 3.1.10 Si ϕ est la formule

$$P(x) \wedge \exists x. Q(f(x)) \wedge \exists x, z. Q(g(x, y, z))$$

Alors $\mathsf{VL}(\phi) = \{x, y\}$ et $\mathsf{VB}(\phi) = \{x, z\}$.

L'exemple ci-dessus montre que l'ensemble des variables liées et l'ensemble des variables libres d'une formule ne sont pas nécessairement des ensembles disjoints. De plus, une variable peut avoir deux *occurrences de liaison*. Par exemple, ci dessus, x a deux occurrences de liaison ; chacune d'elles correspond à une quantification sur x.

3.2 Sémantique

3.2.1 $\mathcal{F}$-algèbres

Etant donné un ensemble de symboles de fonction avec leur arité une *$\mathcal{F}$-algèbre* $\mathcal{A}$ est constituée d'un domaine (ensemble) $D_{\mathcal{A}}$ et, pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, d'une fonction $f_{\mathcal{A}}$ de $D_{\mathcal{A}}^n$ dans $D_{\mathcal{A}}$.

$T(\mathcal{F})$ et $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ sont des $\mathcal{F}$-algèbres, avec $f_{T(\mathcal{F})} = f = f_{T(\mathcal{F},\mathcal{X})}$.

Exemple 3.2.1 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2)\}$. Alors $(\mathbb{N}, succ_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}})$ est une $\mathcal{F}$-algèbre et $(\mathbb{Q}_+, 1, \div 2, \div)$ est aussi une $\mathcal{F}$-algèbre. ($\mathbb{Q}_+$ est l' ensemble des rationnels strictement positifs).

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathcal{F}$-algèbres, un *homomorphisme* h de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application de $D_{\mathcal{A}}$ dans $D_{\mathcal{B}}$ telle que, pour tout symbole $f \in \mathcal{F}$, pour tous éléments $a_1, \ldots, a_n \in D_{\mathcal{A}}$,

$$h(f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Exemple 3.2.2 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2)\}$. On considère la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathbb{N}$ et la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathbb{Z}_2$. L'application qui a tout entier associe son reste modulo 2 est un homomorphisme de $\mathcal{F}$-algèbres.

Exercice 59 (2)
Montrer que le logarithme népérien est un homomorphisme de F-algèbre de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $F = \{0(0);\ h(1);\ f(2)\}$. On précisera les structures de F-algèbres de $]0, +\infty[$ et de $\mathbb{R}$.

Exercice 60 (3)
Reprenant l'exemple 3.2.1, existe-t-il un homomorphisme entre ces deux algèbres ?

Exercice 61 (4)
Soit $F = \{0(0);\ f(2)\}$. Donner une opération $f_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ telle que l'application qui à tout entier associe son opposé soit un morphisme de $(\mathbb{Z}, 0, *)$ dans $(\mathbb{Z}, 0, f_{\mathbb{Z}})$ (considérés comme F-algèbres).

Théorème 3.2.1 (propriété universelle de $T(F, X)$)
Soit $\mathcal{A}$ une F-algèbre. Soit i l'injection (canonique) de X dans $T(F, X)$. Pour toute application f de X dans $\mathcal{A}$, il existe un unique homomorphisme $\widehat{f}$ de $T(F, X)$ dans $\mathcal{A}$ tel que

$$\forall x \in X, \quad \widehat{f} \circ i(x) = f(x)$$

La construction de $\widehat{f}$ est effectuée par récurrence structurelle sur les termes (ou, si l'on préfère, par récurrence sur la profondeur des termes).

Si $\mathcal{A}$ est une F-algèbre, on appelle $\mathcal{A}$-*affectation* toute application σ de X dans $\mathcal{A}$. D'après le théorème 3.2.1, on confond σ et le morphisme $\widehat{\sigma}$ de $T(F, X)$ dans $\mathcal{A}$ correspondant. On note $t\sigma$ l'application d'une affectation σ à t.

Les endomorphismes de $T(F,X)$ sont appelés *substitutions*. On note Σ l'ensemble des substitutions. Les homomorphismes de $T(F,X)$ dans $T(F)$ sont appelés *substitutions closes*. L'ensemble des substitutions closes est noté Σ_g.

Si σ est une substitution, on appelle *domaine* de σ l'ensemble $\{x \in X \mid x\sigma \neq x\}$ noté $Dom(\sigma)$.

Lorsque σ est de domaine fini, on note aussi $VIm(\sigma)$ le sous-ensemble de X :

$$VIm(\sigma) = \bigcup_{x \in Dom(\sigma)} Var(x\sigma)$$

Une substitution σ est dite *idempotente* si $\sigma \circ \sigma = \sigma$.

On note $\{x_1 \to t_1; \ldots; x_n \to t_n\}$ la substitution de domaine $Dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et telle que $\forall i, x_i\sigma = t_i$. Bien sûr, on suppose ici que $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables distinctes et que, pour tout i, x_i est de même sorte que t_i.

Cette notation est aussi employée pour les $\mathcal{A}$-affectations dont les seules valeurs significatives sont celles qui sont prises sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Un *renommage* est une substitution σ qui associe à toute variable une variable et qui est une bijection de $Dom(\sigma)$ sur $VIm(\sigma)$. On supposera toujours implicitement que le domaine d'un renommage contient les variables des termes auxquels il est appliqué.

Exercice 62
Existe-t-il des renommages idempotents autres que l'identité ?

Si t est un terme tel que $\mathsf{VL}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ et si σ est l'affectation $\{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\}$ dans la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{A}$, on notera

$$[\![t]\!]_{\sigma,\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\sigma}(t)$$

Exemple 3.2.3

$$[\![x + x]\!]_{x \mapsto 1, \mathbb{N}} = 2$$

3.2.2 $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures

Definition 3.2.1 *Une* $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure $\mathcal{S}$ *est une* $\mathcal{F}$*-algèbre* $\mathcal{A} = (D_{\mathcal{A}}, \{f_{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\})$ *et, pour chaque symbole de prédicat* P*, d'arité* n*, une relation* $P_{\mathcal{A}} \subseteq D^n_{\mathcal{A}}$.

On confondra parfois (abusivement), une structure et la $\mathcal{F}$-algèbre sous-jacente.

3.2.3 Modèles des formules

Soit ϕ une formule, $\mathsf{VL}(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{S}$ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure (d'algèbre sous-jacente $\mathcal{A}$) et σ une $\mathcal{A}$-affectation dont le domaine contient $\{x_1, \ldots, x_n\}$. On définit la relation de satisfaction $\sigma, \mathcal{S} \models \phi$ par récurrence sur ϕ :

- $\sigma, \mathcal{S} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement si $([\![t_1]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}) \in P_{\mathcal{S}}$
- $\sigma, \mathcal{S} \models \phi * \psi$ où $*$ est l'un des connecteurs logiques binaires est défini, comme en calcul propositionnel, à partir des modèles de ϕ et des modèles de ψ. Par exemple, $\sigma, \mathcal{S} \models \phi \vee \psi$ si et seulement si ($\sigma, \mathcal{S} \models \phi$ ou $\sigma, \mathcal{S} \models \psi$)

– $\sigma, \mathcal{S} \models \neg\phi$ si et seulement si $\sigma, \mathcal{S} \not\models \phi$
– $\sigma, \mathcal{S} \models \exists x.\phi$ si et seulement si il existe $a \in D_{\mathcal{A}}$ tel que $\sigma \uplus \{x \mapsto a\}, \mathcal{S} \models \phi$.
– $\sigma, \mathcal{S} \models \forall x.\phi$ si et seulement si pour tout $a \in D_{\mathcal{A}}$ tel que $\sigma \uplus \{x \mapsto a\}, \mathcal{S} \models \phi$.

Ici $\sigma \uplus \{x \mapsto a\}$ désigne l'affectation σ' dont le domaine est $Dom(\sigma') = Dom(\sigma) \cup \{x\}$, qui coïncide avec σ, sur $Dom(\sigma) \setminus \{x\}$ et telle que $\sigma'(x) = a$.

Si ϕ ne contient pas de variable libre, une structure $\mathcal{S}$ est un *modèle* de ϕ si $\mathcal{S} \models \phi$.

Voyons quelques exemples sous forme d'exercice :

Exercice 63 (4)
On reprend l'exemple 3.1.4 : l'algèbre des entiers naturels (avec l'ordre habituel sur les entiers) satisfait la formule

$$\begin{array}{ll} & \forall x. \geq (x, 0) \\ \wedge & \forall x. \geq (x, x) \\ \wedge & \forall x, y. \geq (x, y) \rightarrow \geq (s(x), s(y)) \end{array}$$

Donner une autre interprétation de $\geq$ (mais toujours sur les entiers naturels avec l'interprétation usuelle de s (sucesseur) et 0).

Quels sont tous les modèles de cette formule, si l'on fixe seulement l'algèbre des entiers naturels comme $\mathcal{F}$-algèbre sous-jacente à la structure ?

Exercice 64
Même que dans l'exercice précédent, mais en remplaçant la formule de l'exemple 3.1.4 par la formule de l'exemple 3.1.5 et l'algèbre par l'algèbre des listes dans laquelle *nil* est interprété par la liste vide et *cons* par l'ajout d'un élément à une liste.

On étend les notions de conséquence logique, d'équivalence logique définies dans le paragraphe 2.2 sur les formules et ensembles de formules du calcul propositionnel au calcul des prédicats.

Exercice 65 (2)
Montrer que les formules $\exists x.\forall y.P(x, y)$ et $\forall y.\exists x.P(x, y)$ ne sont pas logiquement équivalentes. L'une d'elles est une conséquence logique de l'autre. Laquelle ?

Exercice 66 (2)
Mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais avec les formules $\forall x.(P(x) \vee Q(x))$ et $(\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$.

Si σ est la substitution $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$, on note $\phi\sigma$ la formule ϕ dans laquelle toutes les occurrences libres de $x_1, \ldots, x_n$ ont été remplacées respectivement par $t_1, \ldots, t_n$. Plus formellement, par récurrence sur la structure de la formule, cette substitution a été définie au paragraphe 3.2.1 pour les formules atomiques, $(\phi * \psi)\{x \mapsto t\} \stackrel{\text{def}}{=} (\phi\{x \mapsto t\}) * (\psi\{x \mapsto t\})$ pour tous les connecteurs logiques $*$ et enfin :

– $(\exists y.\phi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \exists y.(\phi\sigma)$ si $y \notin Dom(\sigma)$ et $y \notin VIm(\sigma)$
– $(\forall y.\phi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.(\phi\sigma)$ si $y \notin Dom(\sigma)$ et $y \notin VIm(\sigma)$

– $(\exists x.\phi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\phi$ si $x \in Dom(\sigma)$
– $(\exists x.\phi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \exists y.(\phi\{x \mapsto y\})\sigma$ si $y \notin \mathsf{VL}(\phi)$, $x \in Vim(\sigma)$ et $x \notin Dom(\sigma)$.

Proposition 3.2.1 *Si $y \notin \mathsf{VL}(\phi)$, alors $\exists x.\phi \models\!\mid \exists y.\phi\{x \mapsto y\}$.*

Grâce à cette proposition, on pourra supposer désormais, sans perdre de généralité, que les variables n'ont qu'une occurrence liée dans chaque formule et que les variables liées sont disjointes des variables libres.

Deux stuctures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules du premier ordre.

Exercice 67 (8)

1. Donner deux structures élémentairement équivalentes et non isomorphes.
2. Même question, en supposant de plus que $\mathcal{P}$ contient un prédicat interprété comme l'égalité.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est vide, $\mathcal{P} = \{=\}$, alors deux structures de domaine dénombrable qui sont élémentairement équivalentes et satisfont les axiomes de l'égalité sont isomorphes.
4. On suppose que $\mathcal{F} \subseteq \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} \subseteq \{=\}$. Donner deux structures élémentairement équivalentes, non isomorphes, dénombrables et dans lesquelles $=$ est interprété comme l'égalité.

Exercice 68 (7)
Supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles de prédicat unaires, et $\mathcal{F}$ ne contient que des symboles de fonction unaires, montrer que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle a un modèle fini. (On pourra se limiter au cas où $\mathcal{F}$ est vide).

Exercice 69 (6)
Donner un exemple de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ et d' une formule ϕ qui est satisfaisable mais n'a pas de modèle dont le domaine est fini.

3.3 Théories logiques

Une *théorie du premier ordre* est un ensemble $\mathcal{T}$ de formules closes (i.e. sans variable libre) tel que toute formule ϕ telle que $\mathcal{T} \models \phi$ est dans $\mathcal{T}$. Une théorie logique peut bien sûr être infinie.

La *théorie d'une structure* $\mathcal{S}$ est l'ensemble des formules dont $\mathcal{S}$ est un modèle. C'est une théorie du premier ordre.

Une théorie $\mathcal{T}$ est *axiomatisée* par A si $\mathcal{T} = \{\phi \mid A \models \phi\}$.

Une théorie $\mathcal{T}$ est *complète* si pour toute formule du premier ordre ϕ, ou bien $\phi \in \mathcal{T}$, ou bien $\neg\phi \in \mathcal{T}$. Par exemple, la théorie d'une structure est toujours complète.

Remarquons aussi que si $\mathcal{T}$ est complète et récursivement énumérable, alors elle est récursive.