$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta} \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi} \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \theta \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta} \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \rightarrow \psi \vdash \theta} \rightarrow \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot} \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi} \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} \text{ Axiom}$$

FIG. 2.13 – Règles de déduction de LJ_0 , premier ensemble

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} \text{ WL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi} \text{ WR}$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi} \text{ CL} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \phi \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi} \text{ Cut}$$

FIG. 2.14 – Règles structurelles de LJ_0

2.7 Calcul des séquents intuitioniste

Les formules de la logique intuitioniste (propositionnelle) sont les séquents $\Gamma \vdash \phi$ où Γ est un multi-ensemble fini de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ et ϕ est une formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. La différence avec le calcul des séquents classique est donc que la partie droite du séquent ne comporte qu'une seule formule, au lieu d'un ensemble fini de formules.

Les règles de déduction de cette logique, appelée LJ_0 , sont les mêmes que celles de la logique classique, restreinte à cette forme particulière de séquents. Pour être plus précis, ces règles sont données dans les figures 2.13 (règles d'introduction et d'élimination) et 2.14 (règles structurelles).

Dans ces figures, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ sont des multi-ensembles finis de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, ϕ, ψ, θ sont des formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

Lemme 2.7.1 *Les séquents suivants sont prouvables dans LJ_0 , pour toute formule ϕ du calcul propositionel :*

1. $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$

2. $\phi \vee \neg\phi, \neg\neg\phi \vdash \phi$

<u>Preuve:</u>

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,A}{\phi \vdash \phi \vee \neg\phi}\,\vee R}{\phi, \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \perp}\,\neg L}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \neg\phi}\,\neg R}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \phi \vee \neg\phi}\,\vee R}{\neg(\phi \vee \neg\phi), \neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \perp}\,\neg L}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \perp}\,CL}{\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)}\,\neg R$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\phi \vdash \neg\phi}\,A}{\neg\phi, \neg\neg\phi \vdash \perp}\,\neg L}{\neg\phi, \neg\neg\phi \vdash \phi}\,WR}{\phi \vee \neg\phi, \neg\neg\phi \vdash \phi}\,\vee L$$

Exercice 50 (5)
Montrer que, dans LJ_0 , les séquents suivants sont prouvables, pour toutes formules ϕ et ψ de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$:

1. $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$
2. $\vdash \neg(\phi \wedge \neg\phi)$
3. $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$
4. $\neg\phi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\phi \vee \psi)$
5. $\phi \wedge (\psi \vee \theta) \vdash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)$
6. $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta) \vdash \phi \wedge (\psi \vee \theta)$

Théorème 2.7.1 *Si l'on ajoute à LJ_0 l'une des règles suivantes :*

$$\dfrac{}{\vdash \phi \vee \neg\phi}\; TE \qquad \dfrac{}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\; DN \qquad \dfrac{\neg\phi, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}\; RA$$

on obtient un système équivalent à LK_0. Plus précisément, les mêmes séquents $\Gamma \vdash \phi$ sont prouvables dans LJ_0 + TE, LK_0, LJ_0 + DN, LJ_0 + RA respectivement.

Preuve:
On montre tout d'abord qu'il est équivalent de rajouter l'une des règles TE, DN, RA à LJ_0 :

1. Avec TE on prouve DN :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \phi \vee \neg\phi}\,TE \qquad \dfrac{\vdots}{\neg\neg\phi, \phi \vee \neg\phi \vdash \phi}\,\text{lemme 2.7.1}}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\,\text{cut}$$

2. Avec DN, on prouve RA :

$$\dfrac{\dfrac{\neg\phi, \Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}\,\neg R \qquad \dfrac{}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\,DN}{\Gamma \vdash \phi}\,\text{cut}$$

3. Avec RA on prouve TE :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\neg(\phi \vee \neg\phi) \vdash \bot}\,\text{lemme 2.7.1}}{\vdash \phi \vee \neg\phi}\,RA$$

On pourra donc utiliser ensuite indifféremment ces trois règles dès que l'on suppose disposer de l'une d'elles

On remarque ensuite que tout séquent prouvable dans LJ_0 + TE est aussi valide (avec l'interprétation classique) et donc prouvable dans LK_0 par le théorème de complétude.

Il ne reste alors qu'à prouver la réciproque. Soit $\Gamma \vdash \phi$ un séquent dans lequel ϕ est une formule et soit Π une preuve de ce séquent dans LK_0. Par le théorème d'élimination des coupures on peut supposer sans perte de généralité que la preuve de $\Gamma \vdash \phi$ est sans coupure. On montre par récurrence sur la paire (taille de ϕ, taille de Γ) que $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans LJ_0 + TE. (La taille est ici le nombre de symboles logiques de la formule ou du multi-ensemble de formules).

Le cas de base est immédiat : les axiomes de LK_0 sont des axiomes de LJ_0 .

On envisage maintenant tous les cas possibles pour la dernière règle d'inférence appliquée. Seuls les deux premiers cas sont considérés ici, les autres étant laissés en exercice.

La dernière règle est $\wedge L$

$$\dfrac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta}\,\wedge L$$

Dans ce cas, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta$: il en existe une preuve Π dans LJ_0 + TE. On obtient alors une preuve de $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta$ dans LJ_0 +TE par $\wedge L$ en fin de preuve.

La dernière règle est $\vee R$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi, \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,\vee R$$

Dans ce cas, on ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence puisque $\Gamma \vdash \phi, \psi$ n'est pas un séquent de LJ_0 . Par contre, si ce séquent est prouvable dans LK_0, il en est de même de $\Gamma, \neg\phi \vdash \psi$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à ce dernier séquent et construire la preuve suivante dans LJ_0 + TE :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\phi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \phi \vee \psi}\,\vee R}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi), \neg\phi \vdash \bot}\,\neg L}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\neg\phi}\,\neg R \qquad \dfrac{}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\,DN}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \vdash \phi}\,cut}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \vdash \phi \vee \psi}\,\vee R}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi), \neg(\phi \vee \psi) \vdash \bot}\,\neg R}{\Gamma, \neg(\phi \vee \psi) \vdash \bot}\,CL}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,RA$$

Exercice 51 (6)
Compléter la preuve du théorème 2.7.1.

Théorème 2.7.2 *Si un séquent est prouvable dans LJ_0 , alors il est prouvable dans LJ_0 sans la règle de coupure.*

Preuve:
On s'inspire des règles d'élimination des coupures pour LK_0 (mais en toute rigueur, on ne peut pas les appliquer telles quelles pour deux raisons : d'abord, les règles de LJ_0 ne sont pas des cas particuliers de règles de LK_0, en particulier la règle de coupure est différente, ensuite et surtout, les règles d'élimination des coupures de LK_0, même appliquées à des séquents de LJ_0 , peuvent introduire des séquents comportant plus d'une formule à droite.)

Pour se ramener à la règle de coupure de LK_0, on commence par réécrire les preuves en remplaçant les coupures de la manière suivante :

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \psi \quad \Gamma_2 \vdash \phi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}\,\text{cut} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \phi \vdash \psi \quad \Gamma_2 \vdash \phi}{\Gamma_1 \setminus \{\phi\}, \Gamma_2 \vdash \psi}\,\text{CUT}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}\,\text{WL*}$$

Les règles de simplification des preuves sont alors très semblables à celles de LK_0, et la preuve de terminaison est identique. Par souci de complétude, donnons la seule règle qui n'est pas une traduction directe : quand la formule coupée est une disjonction qui vient d'être créee des deux côtés.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\vee R \qquad \dfrac{\phi_1, \Gamma_1 \vdash \theta \quad \phi_2, \Gamma_2 \vdash \theta}{\phi_1 \vee \phi_2, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta}\vee L}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2' \vdash \theta}CUT \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \phi_1, \Gamma_1 \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \theta}CUT}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2' \vdash \theta}WL^*$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\vee R \qquad \dfrac{\phi_1, \phi_1 \vee \phi_2 \Gamma_1 \vdash \theta \quad \phi_2, \Gamma_2 \vdash \theta}{\phi_1 \vee \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta}\vee L}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2' \vdash \theta}CUT$$

$$\Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\vee R \qquad \phi_1, \phi_1 \vee \phi_2, \Gamma_1 \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma_1', \phi_1 \vdash \theta}CUT \qquad \Gamma \vdash \phi_1}{\Gamma, \Gamma^*, {\Gamma_1'}^* \vdash \theta}CUT}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2' \vdash \theta}WL^*$$

On utilise ici deux règles selon que la disjonction apparaissait ou non dans la partie gauche Γ_1. Les séquences de formules primées ou étoilées correspondent à des séquents dans lesquels la formule coupée est supprimée.

Corollaire 2.7.1 *Soit A une variable propositionnelle, $\vdash A \vee \neg A$ n'est pas prouvable en LJ_0*

Preuve:
En effet, s'il y avait une preuve dans LJ_0 de $\vdash A \vee \neg A$, il y en aurait une preuve sans coupure. Vu la structure des règles de LJ_0 , la dernière règle d'une telle preuve ne peut être que $\vee R$ ou WR. Dans le premier cas on aurait une preuve de $\vdash A$ ou une preuve de $\vdash \neg A$, dans le deuxième cas on aurait une preuve de $\vdash \perp$. Or aucun de ces trois séquents n'est valide (classiquement) donc aucun des trois n'est prouvable dans LJ_0 . D'où une contradiction.

Exercice 52 (3)
Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans LJ_0 et ψ est une formule arbitraire de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, alors $\Gamma\{A \Rightarrow \psi\} \vdash \phi\{A \Rightarrow \psi\}$, c'est à dire le séquent $\Gamma \vdash \phi$ dans lequel toutes les occurrences de la variable propositionnelle A sont remplacées pas ψ, est aussi prouvable dans LJ_0 .

Exercice 53 (4)
Montrer que les séquents suivants, dans lesquels A, B sont des variables propositionnelles, ne sont pas prouvables dans LJ_0 :

1. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$

2. $A \to B \vdash \neg A \vee B$
3. $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

Exercice 54 (3)
Montrer que toutes les formules qui apparaissent dans une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \phi$, sont des sous-formules des formules de Γ, ϕ.

Exercice 55 (5)
On définit l'ensemble des *formules de Harrop* comme le plus petit ensemble $\mathcal{H}$ de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ tel que :

- Les variables propositionnelles sont dand $\mathcal{H}$
- si $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, alors $\phi \wedge \psi \in \mathcal{H}$
- si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P}), \psi \in \mathcal{H}$, alors $\phi \to \psi \in \mathcal{H}$

Montrer le théorème de Harrop : si $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ est prouvable en LJ_0 et $\Gamma \subseteq \mathcal{H}$, alors $\Gamma \vdash \phi$, ou $\Gamma \vdash \psi$ est prouvable dans LJ_0 .

Pourquoi ce résultat n'est-il pas généralisable à tous les séquents $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$?

Le problème de la déductibilité :

> étant donné un séquent $\Gamma \vdash \phi$, ce séquent est prouvable ou non dans LJ_0 ?

n'est pas aussi facile en logique intuitioniste qu'en calcul des séquents classique, car il n'est pas possible de se passer de la contraction à gauche.

On peut bien entendu se limiter à la recherche des preuves sans coupure, et en fait, il suffit de rechercher des preuves sans coupure ne contenant que des sous-formules de Γ, ϕ (ou $\perp$). La difficulté vient du fait qu'une formule peut apparaitre plusieurs fois dans la partie gauche d'un séquent. C'est même nécessaire pour certaines preuves sans coupure (cf. exercice 53).

Théorème 2.7.3 *On peut décider (en temps exponentiel) si un séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans LJ_0 .*

Preuve:
Soit S l'ensemble des sous-formules de $\Gamma \vdash \phi$ (cet ensemble contient un nombre linéaire de formules). Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des séquents $\Gamma_1 \vdash \phi_1$ où $\phi_1 \in S$, $\Gamma_1 \subseteq S$ ne contient pas de répétition. $\mathcal{E}$ contient un nombre exponentiel de séquents. On applique alors le calcul de point fixe suivant :

Soit $\mathcal{E}_0 = \emptyset$
Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des séquents de $\mathcal{E}$ qui sont prouvables à l'aide de l'axiome seul.

Tant que $\mathcal{E}_1 \neq \emptyset$ faire

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &:= \text{one-step}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}) \\
\mathcal{E}_0 &:= \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1 \\
\mathcal{E}_1 &:= \mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_0
\end{aligned}$$

one-step$(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E})$ calcule intuitivement tous les séquents de $\mathcal{E}$ déductibles à partir de $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ en une étape (mais peut-être plusieurs règles d'inférence ; l'idée est qu'il n'y a pas alors de séquent intermédiaire qui est dans $\mathcal{E}$) et comportant

$$\dfrac{\Gamma, \phi, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi, \phi \wedge \psi \vdash \theta}\ \wedge\text{-l} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}\ CL}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta}\ \wedge - l}{\Gamma, \phi \wedge \psi, \phi \vdash \theta}\ WL$$

$$\dfrac{\Gamma_1, \phi, \phi \vdash \theta \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \phi, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta}\ \vee\text{-l} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \phi, \phi \vdash \theta}{\Gamma_1, \phi \vdash \theta}\ CL \qquad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta}\ \vee - l}{\Gamma_1, \phi, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta}\ WL$$

$$\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \phi \vdash \theta}\ \wedge\text{-l} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \vdash \theta}\ CL}{\Gamma, \phi \wedge \phi \vdash \theta}\ I\wedge$$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \psi, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \to \psi, \psi \vdash \theta}\ \to\text{l} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \phi \qquad \dfrac{\Gamma_2, \psi, \psi \vdash \theta}{\Gamma_2, \psi \vdash \theta}\ CL}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \to \psi \vdash \theta}\ \to l}{\Gamma_1, \Gamma_2, \psi, \phi \to \psi \vdash \theta}\ WL$$

Fig. 2.15 –

au moins une prémisse dans $\mathcal{E}_1$. Après n passages dans la boucle, $\mathcal{E}_0$ doit contenir tous les séquents prouvables de $\mathcal{E}$ dont il existe une preuve n'utilisant que des sous-formules de $\mathcal{E}$ et dont la “hauteur” est au plus n.

Il reste à définir one-step, ainsi que la “hauteur”. On introduit d'abord une règle spéciale :

$$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \phi \vdash \theta}\ \mathrm{I}\wedge$$

Puis, on remarque que pour tout séquent de $\mathcal{E}$ qui est prouvable, il existe une preuve dans laquelle toutes les règles, sauf la contraction gauche, sont appliquées à des séquents de $\mathcal{E}$, en utilisant éventuellement I$\wedge$. Pour démontrer ce résultat, on réécrit les preuves (sans coupure) à l'aide des règles de la figure 2.15.

Montrons que l'application de ces règles se termine, lorsque la conclusion de la preuve à laquelle elles sont appliquées est un séquent de $\mathcal{E}$. Pour cela on considère la mesure suivante sur la preuve : $m(\mathcal{P})$ est la somme pour tous les noeuds de $\mathcal{P}$ étiquetées par une formule de $\mathcal{E}$ et obtenue par $\wedge$-l, $\vee$-l, ou $\rightarrow$-l du nombre de formules répétées dans les prémisses. Ce nombre décroît strictement à chaque application de règle.

Si l'on considère maintenant les preuves irréductibles pour ces règles, on constate que chacune des formules de $\mathcal{E}$ étiquetant un noeud de la preuve est obtenu à partir de formules de $\mathcal{E}$, application d'une règle de LJ_0 (ou de $I\wedge$) suivie éventuellement de contractions. On en déduit la définition de one-step :

one-step($\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}$) =
    Soit $\mathcal{E}_2 = \emptyset$
    Pour toute règle R de LJ_0 (sauf contraction, coupure, échange) faire :
        Si R a une seule prémisse faire :
            Pour tout séquent Σ de $\mathcal{E}_1$ faire :
                Appliquer R à Σ si c'est possible
                    (et de toutes les manières possibles)
                Contracter à gauche autant que possible
                    chacun des résultats obtenus
                Ajouter les résultats qui sont aussi dans $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}_2$
        Si R a deux prémisses faire :
            Pour tout séquent Σ_1 de $\mathcal{E}_1$
                et pourtout séquent Σ_2 de $\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ faire
                    Appliquer R à Σ_1, Σ_2 (de toutes les façons possibles)
                    Contracter à gauche autant que possible
                        chacun des résultats obtenus
                    Ajouter les résultats qui sont aussi dans $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}_2$
    Renvoyer $\mathcal{E}_2$ après élimination des doublons

Si l'on définit la hauteur d'une preuve comme le nombre maximal de séquents de $\mathcal{E}$ qui apparaissent sur une branche, après n passages dans la boucle principale (n appels à one-step), tous les séquents de $\mathcal{E}$ possédant une preuve de hauteur au plus n sont dans $\mathcal{E}_0$.

L'algorithme permet donc de calculer tous les séquents de $\mathcal{E}$ qui sont prouvables. Il se termine après au plus autant d'étapes qu'il y a d'éléments de $\mathcal{E}$, puisque $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ et, à chaque étape, on ajoute au moins un élément à $\mathcal{E}_0$. Il reste maintenant à appliquer un algorithme simple pour décider si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable. Si Γ ne contient pas de répétition, il suffit de tester son appartenance à $\mathcal{E}_0$. Si Γ contient des répétitions, il suffit de tester si le séquent obtenu en contractant au maximum est dans $\mathcal{E}$: en effet, si c'est le cas on peut l'obtenir par affaiblissement de son contracté.