$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \text{ weakening left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \phi} \text{ weakening right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \text{ contraction left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \phi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi} \text{ contraction right}$$

FIG. 2.8 – Régles structurelles de LK_0

2.6 Les coupures

Nous introduisons ici des règles de calcul supplémentaires qui étaient implicites dans G_0 (les règles structurelles) ainsi que la règle de *coupure* qui consiste à ajouter la possibilité d'utiliser des lemmes.

Le calcul obtenu est celui de Gentzen, classiquement noté LK dans le cas de la logique classique. (ici LK_0 puisque nous sommes dans le cas propositionnel).

Les séquents sont désormais de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des *multi-ensembles* de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. La différence entre un ensemble et un multi-ensemble est qu'il est possible de répéter une formule dans un multi-ensemble. Plus précisément un multi-ensemble de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ est une application de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{N}$ qui vaut 0 sauf pour un nombre fini de formules. On note $\underbrace{\phi, \dots, \phi}_{n}, \Gamma$ si le multi-ensemble M satisfait $M(\phi) \geq n$, autrement dit, s'il contient n occurrences de ϕ. On note encore Γ, Γ' pour la réunion des multi-ensembles Γ et Γ', c'est à dire l'appication qui à ϕ associe $\Gamma(\phi) + \Gamma'(\phi)$.

L'intérêt du raffinement des ensembles en multi-ensembles (ce qui contraint à introduire explicitement les règles de contraction de la figure 2.8 ne pourra apparaître que dans le paragraphe 2.7

Les règles de LK_0 sont

- celles de la figure 2.9
- les règles structurelles de la figure 2.8
- la règle de coupure de la figure 2.10.

Exercice 42 (2)
Démontrer un lemme de correction pour LK_0, analogue au lemme 2.5.1.

Exercice 43 (3)
Donner un exemple montrant que les règles de LK_0, contrairement à celles de G_0, ne sont pas réversibles : la conclusion d'une règle d'inférence peut être satisfaite par une interprétation I sans que toutes ses prémisses soient satisfaites par I.

Exercice 44 (4)
Montrer que pour toute preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans LK_0, il existe une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ (où Γ et Δ sont vus comme des ensembles) dans G_0 et réciproquement.

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge\ \text{left} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \phi \wedge \psi}\ \wedge\ \text{right}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, \psi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \vee\ \text{left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \vee \psi}\ \vee\ \text{right}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi \quad \Gamma_2, \psi \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \rightarrow\ \text{left} \qquad \frac{\Gamma \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\ \text{right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg\ \text{left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi}\ \neg\ \text{right}$$

$$\frac{}{\phi \vdash \phi}\ \text{Axiom}$$

FIG. 2.9 – Règles d'introduction de LK_0

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi^+ \quad \phi^+, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}$$

FIG. 2.10 – La règle de coupure de LK_0

On peut donner une autre preuve de ce résultat d'élimination de coupure, par transformation de preuves. Cette autre démonstration présente de nombreux intérêts, bien qu'elle soit beaucoup plus difficile :

1. C'est une preuve directe, *constructive*
2. Elle s'applique au cas intuitioniste et s'étend au calcul des prédicats.
3. Elle se traduit, dans le cas intuitioniste, via la correspondance de Curry-Howard en un résultat de normalisation du λ-calcul simplement typé

On considère les règles de transformation de preuves des figures 2.11 et 2.12.

Remarques sur les notations utilisées pour écrire ces règles

- Nous avons ici abrégé par "*l-r" n'importe quelle règle d'introduction gauche ou droite. Tel que c'est écrit dans la figure 2.11, nous supposons que la règle "*l-r" possède deux prémisses. Dans le cas où elle n'en a qu'une, il suffit de supprimer les sous-arbres correspondants.
- Les notations S_1, S_2, S_3 sont utilisées pour représenter n'importe quelle preuve dont la conclusion est le séquent approprié. Elles sont omises quand il n'y a pas de duplication de preuve.
- On note ϕ^+ pour un nombre arbitraire non nul de formules ϕ et ϕ^* pour un nombre arbitraire de formules ϕ.
- Une double barre d' inférence est utilisée lorsque la règle est suivie d'un certain nombre de contractions.
- Les deux premières règles concernent les cas où l'une des règles précédant la coupure ne fait pas intervenir la formule coupée ϕ. Les autres considèrent les divers cas de superposition entre construction de ϕ et coupure.
- Lorsque la formule coupée vient d'être construite dans les deux prémisses de la coupure, il faut en toute rigueur envisager les cas où elle serait déjà présente dans les séquents ; la coupure élimine alors plus d'une occurrence de la formule coupée. Nous envisageons les deux cas où $\phi_1 \wedge \phi_2$ était déjà présente à gauche et déjà présente à droite respectivement. Nous n'examinons pas le cas où elle était déjà présente des deux côtés, le résultat étant alors une tautologie qui s'obtient directement par affaiblissements de l'axiome.
  Bien entendu, si $\phi_1 \wedge \phi_2$ n'était éliminée qu'une fois par la coupure, il faut enlever la dernière coupure du membre droit de la règle.
- Par souci de simplicité nous n'avons figuré les cas généraux que lorsque la formule coupée est une conjonction. Dans la suite des règles nous avons supposé qu'un seul exemplaire de la formule était éliminé par la coupure.

Exercice 45 (2)

Eliminer les coupures (en appliquant les règles des figures d'élimination de cou-

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi^+} \quad \dfrac{S2}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi^*}}{\Gamma \vdash \Delta, \phi^+}{*l-r} \qquad \dfrac{S_3}{\phi^+, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\mathit{cut} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{S_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi^+} \quad \dfrac{S_3}{\phi^+, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma_1, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta'}\mathit{cut} \qquad \dfrac{\dfrac{S_2}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi^*} \quad \dfrac{S_3}{\phi^+, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}{*l-r}$$

$$\dfrac{\dfrac{S_3}{\Gamma \vdash \Delta, \phi^+} \qquad \dfrac{\dfrac{S_1}{\Gamma_1, \phi^+ \vdash \Delta_1} \quad \dfrac{S_2}{\Gamma_2, \phi^* \vdash \Delta_2}}{\phi^+, \Gamma' \vdash \Delta'}{*l-r}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\mathit{cut} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{S_3}{\Gamma \vdash \Delta, \phi^+} \quad \dfrac{S_1}{\phi^+, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \Delta, \Delta_1}\mathit{cut} \qquad \dfrac{\dfrac{S_3}{\Gamma \vdash \Delta, \phi^+} \quad \dfrac{S_2}{\Gamma_2, \phi^* \vdash \Delta_2}}{\Gamma_2, \Gamma \vdash \Delta_2, \Delta}\mathit{cut}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}{*l-r}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2)^* \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi_2, (\phi_1 \wedge \phi_2)^*}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, (\phi_1 \wedge \phi_2)^+}\wedge r \qquad \dfrac{\phi_1, \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}{\phi_1 \wedge \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}\wedge l}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}$$

$$\Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi_2, (\phi_1 \wedge \phi_2)^* \quad \dfrac{\phi_1, \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}{\phi_1 \wedge \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}\wedge l}{\Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_2, \Delta', \phi_2}\mathit{cut} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2)^* \quad \dfrac{\phi_1, \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}{\phi_1 \wedge \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}\wedge l}{\Gamma_1, \Gamma' \vdash \Delta_1, \phi_1, \Delta'}\mathit{cut} \qquad \phi_1, \phi_2, \Gamma' \vdash \Delta'}{\phi_2, \Gamma_1, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta'}\mathit{cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \phi_1 \wedge \phi_2}\wedge r \qquad \dfrac{\phi_1, \phi_2, (\phi_1 \wedge \phi_2)^*, \Gamma' \vdash \Delta'}{(\phi_1 \wedge \phi_2)^+, \Gamma' \vdash \Delta'}\wedge l}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}$$

$$\Longrightarrow \quad \dfrac{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi_2 \qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \phi_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \phi_1 \wedge \phi_2}\wedge r \qquad \phi_1, \phi_2, (\phi_1 \wedge \phi_2)^*, \Gamma' \vdash \Delta'}{\phi_1, \phi_2, \Gamma', \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta', \Delta_1, \Delta_2}\mathit{cut}}{\phi_2, \Gamma_1, \Gamma_2\Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'}\mathit{cut}$$

FIG. 2.11 – Règles de simplification de preuves dans LK_0

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\phi_1 \vdash \Delta,\phi_2}{\Gamma \vdash \Delta,\phi_1 \to \phi_2}\to r \qquad \dfrac{\Gamma_2,\phi_2 \vdash \Delta_2 \quad \Gamma_1 \vdash \Delta_1,\phi_1}{\Gamma_1,\Gamma_2,\phi_1 \to \phi_2 \vdash \Delta_1,\Delta_2}\to l}{\Gamma,\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta_1,\Delta_2,\Delta}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma_1 \vdash \phi_1,\Delta_1 \qquad \dfrac{\Gamma,\phi_1 \vdash \Delta,\phi_2 \; \Gamma_2,\phi_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_2,\Gamma,\phi_1 \vdash \Delta,\Delta_2}\,cut}{\Gamma,\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta_1,\Delta_2,\Delta}\,cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta,\phi_1,\phi_2}{\Gamma \vdash \Delta,\phi_1 \vee \phi_2}\vee r \qquad \dfrac{\phi_1,\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \phi_2,\Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\phi_1 \vee \phi_2,\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta_1,\Delta_2}\vee l}{\Gamma,\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta,\Delta_1,\Delta_2}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta,\phi_1,\phi_2 \quad \phi_1,\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma,\Gamma_1 \vdash \Delta,\Delta_1,\phi_2}\,cut \qquad \phi_2,\Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma,\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta,\Delta_1,\Delta_2}\,cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi,\Delta}\neg r \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta',\phi}{\Gamma',\neg\phi \vdash \Delta'}\neg l}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma' \vdash \phi,\Delta' \quad \Gamma,\phi \vdash \Delta}{\Gamma.\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\phi,\phi^+ \vdash \Delta}{\Gamma,\phi^+ \vdash \Delta}\,cl \qquad \Gamma' \vdash \Delta',\phi^+}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma,\phi,\phi^+ \vdash \Delta \quad \phi^+,\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \vdash \Delta,\phi,\phi^+}{\Gamma \vdash \phi^+,\Delta}\,cr \qquad \Gamma',\phi^+ \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma,\phi^+ \vdash \Delta \quad \phi,\phi^+,\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta,\phi}\,wr \qquad \phi,\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,(wl)^*(wr)^*$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta,\phi \quad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\phi,\Gamma' \vdash \Delta'}\,wl}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,(wl)^*(wr)^*$$

$$\dfrac{\phi \vdash \phi \quad \phi,\Gamma \vdash \Delta}{\phi,\Gamma \vdash \Delta}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \phi,\Gamma \vdash \Delta$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta,\phi \quad \phi \vdash \phi}{\Gamma \vdash \Delta,\phi}\,cut \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \vdash \Delta,\phi$$

FIG. 2.12 – Règles de simplification de preuves dans LK_0 (suite)

pures) de la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{axiom}}{A, B \vdash A}\,\text{w left}}{A \vdash B \to A}\,\to\text{right} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{axiom}}{A, B \vdash A}\,\text{w left} \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\text{axiom}}{B \vdash A, B}\,\text{w right}}{B, B \to A \vdash A}\,\to\text{left}}{A, B \vdash A}\,\text{cut}$$

Le résultat principal concernant ces règles d'élimination des coupures est le *Hauptsatz* de Gentzen :

Théorème 2.6.1 (normalisation faible) *Les règles d'élimination de coupures terminent, en utilisant une stratégie d'élimination appropriée. Les preuves irréductibles pour cette stratégie d'élimination sont des preuves sans coupure.*

<u>Preuve:</u>

La stratégie consiste à appliquer les règles d'élimination à des coupures dont les prémisses ne contiennent pas de coupure (stratégie d'appel par valeurs).

Montrons d'abord la deuxième partie du théorème : les preuves irréductibles sont sans coupure. Considérons une preuve qui contient au moins une coupure et montrons qu'elle peut être simplifiée. On considère une sous-preuve dont la dernière inférence est une coupure et les prémisses sont sans coupure. Tous les cas de construction sont couverts par les règles de réduction (c'est une vérification fastidieuse laissée au lecteur).

Revenons maintenant à la preuve de terminaison. On considère d'abord les preuves qui ne contiennent qu'une seule coupure, à la fin de la preuve. Celles-ci sont donc de la forme

$$\mathcal{P} = \dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Gamma \vdash \Delta}\, cut$$

où Π_1, Π_2 sont sans coupure. On montre que la normalisation de ces preuves termine. Le résultat du théorème en découle puisqu'alors, par récurrence sur le nombre de coupures d'une preuve, on peut successivement éliminer toutes les coupures suivant la stratégie choisie.

On montre la terminaison de l'élimination des coupures sur les preuves ne comportant qu'une coupure terminale par récurrence sur la paire (ordonné lexicographiquement) $(\delta(\mathcal{P}), \tau(\mathcal{P}))$ où δ et τ sont définis comme suit.

Pour toute formule ϕ, on note $d(\phi)$ sa *profondeur* :

– $d(\phi \wedge \psi) = d(\phi \vee \psi) = d(\phi \to \psi) = \max(d(\phi), d(\psi)) + 1$
– $d(\neg\phi) = 1 + d(\phi)$
– $d(A) = 1$ si A est une variable propositionnelle

On définit alors le *degré* d'une règle de coupure comme la profondeur de la formule éliminée par la coupure. Le degré $\delta(\mathcal{P})$ d'une preuve $\mathcal{P}$ est le degré maximal des coupures qu'elle contient.

La *taille* d'une preuve est définie comme pour un arbre : $\tau(\mathcal{P}) = 1+\tau(\mathcal{P}_1)+\ldots+\tau(\mathcal{P}_n))$ si $\mathcal{P}$ est obtenu par une inférence à partir de $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$.

Le cas de base $\delta(\mathcal{P}) = 0$ ne correspond pas à des preuves comportant une coupure. Il n'y a donc rien à prouver.

On envisage maintenant tous les cas de simplification, en fonction de la formule ϕ éliminée par la coupure et des dernières règles de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Dans chaque cas on montre que $\mathcal{P}$ se simplifie en une étape en une preuve qui se réduit en une preuve sans coupure par applications de l'hypothèse de récurrence, ce qui montre que $\mathcal{P}$ se réduit en une preuve sans coupure.

– Si l'une des deux premières règles de la figure 2.11 s'applique, noter que le membre droit est de la forme :

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Sigma} \text{*l-r}$$

avec $\delta(\Pi_1) = \delta(\Pi_2) = \delta(\mathcal{P})$, et $\tau(\Pi_1) < \tau(\mathcal{P})$, $\tau(\Pi_2) < \tau(\mathcal{P})$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à Π_1, Π_2 et on obtient une preuve sans coupure.

– ou bien la formule éliminée par la coupure est une conjonction (troisième règle de réduction de la figure 2.11) : On obtient une preuve

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Sigma_1}\,cut \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi_3 \quad \Pi_2}{\Sigma_2}\,cut \qquad \Pi_4}{\Sigma_4}\,cut}{\Sigma}\,cut$$

Avec les propriétés suivantes :

– $\tau(\Pi_1), \tau(\Pi_2), \tau(\Pi_3), \tau(\Pi_4) < \tau(\mathcal{P})$

– $\phi_1 \wedge \phi_2$ est la formule coupée dans $\Pi_5 = \dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Sigma_1}\,cut$

– $\phi_1 \wedge \phi_2$ est la formule coupée dans $\Pi_6 = \dfrac{\Pi_3 \quad \Pi_2}{\Sigma_1}\,cut$

– ϕ_1 est la formule coupée dans $\Pi_7 = \dfrac{\Sigma_2 \quad \Pi_4}{\Sigma_4}\,cut$

– ϕ_2 est la formule coupée dans $\Pi_8 = \dfrac{\Sigma_2 \quad \Pi_4}{\Sigma_4}\,cut$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à Π_5 et Π_6 puisque $\delta(\Pi_5) = \delta(\Pi_6) = \delta(\mathcal{P})$ et que les tailles des preuves sont strictement plus petites. On obtient alors des preuves sans coupures Π'_5, Π'_6. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à

$$\Pi_9 = \frac{\Pi'_6 \quad \Pi_4}{\Sigma_4}\,cut$$

puisque $\delta(\Pi_9) < \delta(\mathcal{P})$, la formule coupée étant ϕ_1. On obtient alors une preube Π'_9 sans coupure.

Puis on applique enfin l'hypothèse de récurrence à

$$\Pi_{10} = \genfrac{}{}{1.5pt}{}{\Pi'_5 \quad \Pi'_9}{\Sigma}\ \mathit{cut}$$

puisque $\delta(\Pi_{10}) < \delta(\mathcal{P})$, la formule coupée étant ϕ_2. On obtient alors une preuve sans coupure.

- Le raisonnement est similaire pour la dernière règle de la figure 2.11.
- De même, quand les règles appliquées pour obtenir les prémisses de la coupure sont des introductions de $\to$ ou $\vee$ ou $\neg$, ou bien la coupure a lieu sur une preuve strictement plus petite avec la même formule coupée, ou bien le degré de la preuve obtenue est strictement plus petit, et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.
- Pour la règle de contraction, la formule coupée est identique dans les deux membres et la taille de la preuve diminue. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.
- Les autres règles d'élimination de coupures donnent directement le résultat et il n'est pas nécessaire d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

Exercice 46 (3)
Montrer que $\Gamma \vdash \phi_1, \phi_2$ est prouvable en LK_0 si et seulement si $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ est prouvable en LK_0.

Exercice 47 (3)
Normaliser la preuve suivante de deux manières différentes et en déduire qu'il existe des preuves ayant deux formes normales distinctes (la normalisation des preuves de LK_0 n'est pas confluente) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{axiom}}{A \vdash A, B}\,\mathit{wr}}{\vdash A, A \to B}\,\to r \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{axion}}{A, B \vdash A}\,\mathit{wl}}{A \vdash B \to A}\,\to r}{\vdash A \to B, B \to A}\,\mathit{cut}$$

Exercice 48 (3)
Montrer l'inutilité du raisonnement par l'absurde : Si $\neg\phi \vdash \psi \wedge \neg\psi$ est prouvable, alors il existe une preuve directe de $\vdash \phi$ (sans coupure, sans référence à ψ).

Exercice 49 (7)
Montrer qu'il existe des séquents $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ dont la preuve dans LK_0 est de taille $O(n)$ et dont toutes les preuves sans coupure ont pour taille au moins $O(2^n)$.