$$\text{TE} \quad \frac{}{P \vee \neg P}$$

$$\text{A} \quad \frac{C}{C \vee L}$$

FIG. 2.6 – Tiers exclu et affaiblissement

En fait, on peut généraliser ce résultat (mais il n'est pas demandé de le montrer) : il existe des ensembles de clauses insatisfaisables dont *aucune* preuve de contradiction n'est de taille polynômiale.

On considère maintenant, en plus des règles d'inférence de la figure 2.4, les deux règles d'inférence de la figure 2.6. Dans ces règles, C est une clause quelconque, L est un littéral quelconque et P est une variable propositionnelle quelconque. On note $\vdash$ la relation de déduction associée.

Théorème 2.4.2 (Complétude) *Si E est un ensemble de clauses et C est une clause. Alors $E \models C$, si et seulement si $E \vdash C$. (Autrement dit $\models = \vdash$).*

Preuve:
La correction des règles d'inférence de la figure 2.6 est une vérification de routine. Il en résulte, par récurrence sur la longueur de la preuve que $E \vdash C$ entraine $E \models C$.

Réciproquement, montrons, par récurrence sur la longueur de la preuve par résolution que, pour tout ensemble de clauses E, tous littéraux $L_1, \dots, L_k$ et toute clause C,

$$E, L_1, \dots, L_k \vdash_R C$$

entraine

$$E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k}$$

– Si la preuve ne contient aucune application de règle d'inférence : ou bien il existe un i tel que $C = L_i$ ou bien $C \in E$. dans le premier cas, par la règle du tiers exclu $\vdash L_i \vee \overline{L_i}$, puis, par affaiblissements, $\vdash L_i \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k}$. Dans le deuxième cas, $E \vdash C$ et, par affaiblissements, $E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k}$.
– Sinon, au moins une règle d'inférence est appliquée. Considérons la dernière règle appliquée dans la preuve.
  – Si c'est une factorisation : $C = L \vee C_1$ et $E, L_1, \dots, L_k \vdash_R L \vee L \vee C_1$. Par hypothèse de récurrence,

$$E \vdash L \vee L \vee C_1 \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k}$$

  et, par factorisation,

$$L \vee L \vee C_1 \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k} \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \dots \vee \overline{L_k}.$$

– Si c'est une résolution : $C = C_1 \vee C_2$ et $E, L_1, \ldots, L_k \vdash_R C_1 \vee P$, $E, L_1, \ldots, L_k \vdash_R C_2 \vee \neg P$. Par hypothèse de récurrence (appliquée deux fois) :
$$E \vdash C_1 \vee P \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$
et
$$E \vdash C_2 \vee \neg P \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$
Par résolution, on obtient alors
$$E \vdash C_1 \vee C_2 \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k} \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$$
puis, par factorisations, $E \vdash C \vee \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$.

On applique maintenant ce résultat avec $C = \perp$: pour une clause $C_0 = \overline{L_1} \vee \ldots \vee \overline{L_k}$ arbitraire, $E, \neg C_0 \vdash_R \perp$ entraine $E \vdash C_0$.

Si maintenant $E \models C_0$, alors $E, \neg C_0$ est insatisfaisable et, par le théorème 2.4.1, $E, \neg C_0 \vdash_R \perp$. D'après ce que nous venons de voir, cela entraine $E \vdash C_0$. □

Exercice 27 (3)
On considère ici un raffinement de la résolution. On définit un ordre sur les littéraux de la manière suivante : $L > L'$ si la variable propositionnelle de L a un indice strictement plus grand que la variable propositionnelle de L'. (autrement dit, on étend l'ordre sur les variables propositionnelles aux littéraux). On restreint alors l'application de la résolution binaire
$$\frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$
au cas où P est un littéral maximal de $P \vee C$ et $\neg P$ est un littéral maximal de $\neg P \vee C'$. De même, la règle de factorisation
$$\frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$
est restreinte au cas où L est maximal dans $L \vee C$.

Montrer qu'avec ces restrictions, l'ensemble de règles d'inférence est encore réfutationnellement complet.

Exercice 28 (3)
On considère le système d'inférence constitué de l'unique règle :
$$\frac{P \vee P \ldots \vee P \vee C \quad \neg P \vee \ldots \vee \neg P \vee C'}{C \vee C'}$$
Montrer que cette règle est (à elle seule) réfutationellement complète.

Exercice 29 (3)
On dira qu'une clause C *subsume* une clause C' si $C \models C'$.

On considère la stratégie de résolution+factorisation suivante : on n'applique une règle d'inférence que lorsqu'aucune des prémisses n'est subsumée par une clause différente ancêtre dans l'arbre de preuve.

Montrer que cette stratégie est réfutationnellement complète.

Definition 2.4.1 *On appelle* clause de Horn *une clause qui contient au plus un littéral positif.*

Exercice 30 (6)
On considère ici un autre raffinement de la résolution : la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse au moins est dans E (l'ensemble de clauses initial). Cette stratégie est dite *input*.

1. Montrer que cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète en général.
2. Montrer qu'elle est réfutationnellement complète lorsque E est un ensemble de clauses de Horn

Exercice 31 (5)
Donner un algorithme polynômial qui permet, étant donné un ensemble fini de clauses de Horn, de dire s'il est satisfaisable ou non.

Exercice 32 (6)
Une clause est *négative* si elle ne contient que des littéraux négatifs. On se propose d'étudier la stratégie suivante de résolution, appelée *stratégie négative* : l'application de la règle de résolution est restreinte au cas où l'une des prémisse est négative. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

1. Soit E un ensemble de clauses tel que toute clause de E contient au moins un littéral positif. Montrer que E est satisfaisable.
2. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \perp$ (exhiber une preuve).
3. Si I, J sont des interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que
   (a) pour tout $j < k$, P_j est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_j) = J(P_j)$
   (b) P_k est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

   On note aussi $I \leq J$ l'ordre de prolongement des interprétations partielles. Montrer que $\geq_{lex}$ est un ordre sur les interprétations partielles et que, pour toutes interprétations partielles, $I \leq J$ ou $J \leq I$ ou $I \leq_{lex} J$ ou $J \leq_{lex} I$
4. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fini, non vide et que toutes ses feuilles sont des noeuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\geq_{lex}$ qui soit un noeud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E.

5. Montrer la complétude réfutationnelle de $\vdash_\neg$ par la méthode des arbres sémantiques

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi}\ \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta}\ \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \vee \psi}\ \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta}\ \to \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi}\ \to \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi}\ \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \text{Axiom}$$

FIG. 2.7 – Le calcul G_0

2.5 Calcul des séquents classiques (sans coupure)

On s'intéresse au problème de la satisfaisabilité : étant donné ϕ, ϕ a-t-elle un modèle ? Ou au problème de la conséquence logique : est-ce que ψ est une conséquence logique de ϕ ?

Remarquer qu'on a un algorithme : il suffit d'énumérer les 2^n interprétations. Mais il y a plusieurs inconvénients : c'est très lourd (pas efficace) et on ne peut pas généraliser au calcul des prédicats, par exemple.

Definition 2.5.1 *Un* séquent *(propositionnel) est une paire d'ensembles finis de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, notée* $\Gamma \vdash \Delta$*. On suppose de plus que $\bot \notin \Gamma$ et $\top \notin \Delta$.*

Cette définition suppose les propriétés ensemblistes de Γ et Δ, associativité, commutativité, affaiblissement (on les explicitera plus loin). On identifie également $\Gamma, \top$ avec Γ d'une part et $\Delta, \bot$ avec Δ d'autre part, si Γ est la partie gauche d'un séquent et Δ sa partie droite (en particulier lorsque Γ ou Δ est vide). Le fait d'interdire $\bot \in \Gamma$ (resp. $\top \in \Delta$) n'est pas une restriction forte car on peut toujours remplacer $\bot$ par une formule insatisfaisable (resp. valide).

Si I est une interprétation, $I \models \Gamma \vdash \Delta$ si et seulement si $I \not\models \Gamma$ ou bien il existe une formule ϕ de Δ telle que $I \models \phi$.

Les règles de déduction du calcul des séquents propositionnel classique sans coupure (noté G_0 dans la suite) sont données dans la figure 2.7.

Lemme 2.5.1 (correction de G_0) *Si Σ est obtenu par application d'une règle d'inférence aux séquents $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, alors I est un modèle de Σ si et seulement* *si I est un modèle de tous les séquents Σ_i.*

Preuve:
Par exemple pour $\rightarrow$ left. (Les autres cas sont laissés en exercice) Si $I \models \Gamma, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta$, alors, par définition, ou bien $I \not\models \Gamma, \phi \rightarrow \psi$, ou bien il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$.

Premier cas : $I \not\models \Gamma, \phi \rightarrow \psi$. Deux cas se présentent à nouveau :

- ou bien il existe une formule $\eta \in \Gamma$ telle que $I \not\models \eta$ et, dans ce cas, $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$, $I \models \psi, \Gamma \vdash \Delta$,
- ou bien $I \not\models \phi \rightarrow \psi$. Par définition, ceci entraine que $I \models \phi$ et $I \not\models \psi$. Il en résulte que $I \not\models \psi, \Gamma$ et donc $I \models \psi, \Gamma \vdash \Delta$ d'une part et il existe une formule $\theta \in \phi, \Delta$ (en fait $\theta = \phi$) telle que $I \models \theta$ d'autre part. Ceci entraine $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$.

Dans tous les cas, I satisfait les deux prémisses.

Deuxième cas : il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$. Alors, par définition des modèles des séquents, $I \models \Gamma \vdash \phi, \Delta$ et $I \models \Gamma, \psi \vdash \Delta$.

Réciproquement, si I satisfait les deux prémisses, alors

- ou bien $I \not\models \Gamma$ et $I \models \Gamma, \phi \rightarrow \psi \vdash \Delta$
- ou bien il existe $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$ et on conclut directement
- ou bien $I \not\models \psi$ et $I \models \phi$ et, dans ce cas, $I \not\models \phi \rightarrow \psi$, ce qui entraine à nouveau la conclusion voulue.

□

Exercice 33 (2)
Compléter la preuve du lemme 2.5.1.

Exercice 34 (2)
Peut on remplacer la règle d'introduction de la flèche à droite par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{right}$$

Justifier la réponse.

Exercice 35 (2)
Peut on remplacer la règle d'introduction de la flèche à gauche par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma, \psi \rightarrow \phi \vdash \Delta} \rightarrow \text{left}$$

Un *arbre de preuve* obtenu à l'aide des règles de G_0 est un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des séquents, chaque étiquette d'un noeud étant obtenue par application d'une des règles aux étiquettes de ses fils.

Exemple 2.5.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\text{ axiom} \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\text{ axiom}}{A, B \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{ right}}{A \vdash B \to (A \wedge B)}\ \to\text{ right}}{\vdash A \to (B \to (A \wedge B))}\ \to\text{ right}$$

Exercice 36 (1)
Donner une preuve du tiers exclu $\vdash \phi \vee \neg\phi$.

Un séquent Σ est *prouvable* (sous-entendu à l'aide de G_0) s'il existe un arbre de preuve dont la racine est étiquetée par Σ. On dit aussi que Σ est un *théorème.*

Lemme 2.5.2 *Si* Γ, Δ *ne contiennent que des variables, le séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est valide si et seulement si* $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

Preuve:
Si le séquent est valide, pour toute interprétation I, $I \models \Gamma \vdash \Delta$. Prenons l'interprétation I qui associe 1 à toutes la variables de Γ et 0 à toutes les autres variables propositionnelles. $I \models \Gamma$ et donc il existe $\theta \in \Delta$, $I \models \theta$, ce qui signifie que l'une des variables de Δ est interprétée à 1 et donc que $\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Réciproquement, si $A \in \Delta \cap \Gamma$, pour toute interprétation I, ou bien $I(A) = 1$ et il existe une formule $\theta \in \Delta$ telle que $I \models \theta$, ou bien $I(A) = 0$ et $I \not\models \Gamma$. □

Théorème 2.5.1 (Complétude) *Un séquent* $\Gamma \vdash \Delta$ *est valide si et seulement s'il est prouvable.*

Preuve:
Si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable, on montre par récurrence sur la longueur de la preuve que $\Gamma \vdash \Delta$ est valide : le cas de base est donné par le lemme 2.5.2 et la récurrence par le lemme 2.5.1.

Réciproquement, si $\Gamma \vdash \Delta$ est valide, on montre le résultat par récurrence sur le nombre de connecteurs logiques de Γ et Δ. Si ce nombre est nul, on applique le lemme 2.5.2. Supposons maintenant que $\Gamma = \phi \to \psi, \Gamma'$ (resp. $\phi \vee \psi, \Gamma'$, resp. $\phi \wedge \psi, \Gamma'$, resp. $\neg\phi, \Gamma'$). Par le lemme 2.5.1, $\Gamma' \vdash \phi, \Delta$ et $\Gamma', \psi \vdash \Delta$ sont valides. Par hypothèse de récurrence, ces deux séquents sont prouvables, et donc $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable par la règle $\to$ left. Les règles d'introduction gauche de $\wedge, \vee, \neg$ permettent de conclure de manière analogue pour les autres connecteurs logiques à gauche. Les règles droites permettent de conclure de manière analogue pour les connecteurs logiques à droite. □

Exercice 37 (3)
Donner des règles d'introduction à gauche et à droite de $\leftrightarrow$, dans le style de G_0.

Exercice 38 (6)
Montrer qu'il existe une preuve de taille polynômiale (en n)du séquent

$$\vdash \neg A_1 \wedge A_2,\ \neg A_2 \wedge A_3,\ \ldots\ , \neg A_{n-1} \wedge A_n,\ \neg A_n \wedge A_1,\ A_1 \wedge \ldots \wedge A_n,\ \neg A_1 \wedge \ldots \neg A_n$$

Exercice 39 (3)
Expliquer pourquoi l'algorithme de décision de la validité résultant du théorème ci-dessus est exponentielle dans la taille du séquent.

Exercice 40 (7)
A chaque séquent valide Σ on associe la taille de sa preuve de taille minimale, $\tau(\Sigma)$. On note aussi $|\Sigma|$ la taille du séquent Σ.

Montrer qu'il existe une suite de séquents valides Σ_n telle qu'il n'existe aucun polynôme P vérifiant $P(|\Sigma_n|) \geq \tau(\Sigma_n)$.

Exercice 41 (4)
(Théorème d'interpolation) On appelle *partition* d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ un quadruplet $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2)$ tel que Γ_1, Γ_2 est une partition de Γ et Δ_1, Δ_2 est une partition de Δ.

Montrer que si on peut dériver $\Gamma \vdash \Delta$, alors il existe une partition de $\Gamma \vdash \Delta$ et une formule ϕ tels que $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \phi$ et $\Gamma_2, \phi \vdash \Delta_2$ sont prouvables et les variables de ϕ sont dans $Var(\Gamma_1 \cup \Delta_1) \cap Var(\Gamma_1 \cup \Delta_2)$.