Langages formels

7. Grammaires algébriques

19 mars 2007

Exercice 1 – *Exemples de grammaires*

Pour chacun des langages suivants, déterminer s'il est contextuel et s'il est algébrique. On pourra utiliser le lemme d'itération.

$L_1 := \{a^i b^j \mid i \neq j\}$

$L_2 := \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$

$L_3 := \{a^{n^2} \mid n > 0\}$

$L_4 := \{w\bar{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$

$L_5 := \{ww \mid w \in \{a,b\}^+\}$

$L_6 := \{w \mid w \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$

Exercice 2 – *Ambiguïté*

Montrer que la grammaire suivante est ambiguë :

$$S \to \text{if c then } S \text{ else } S + \text{if c then } S + a$$

Montrer que le langage engendré n'est pas ambigu.

Exercice 3 – *Dick à n paires de parenthèses*

Soit $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Un mot $w \in \Sigma^*$ est *bien parenthésé* s'il est équivalent au mot vide dans la congruence engendrée par $a_i\bar{a}_i \equiv \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que le langage de Dick $D_n^* = \{w \mid w \in \Sigma^*, w \equiv \varepsilon\}$ est engendré par la grammaire $S \to a_1 S \bar{a}_1 S + \ldots + a_n S \bar{a}_n S + \varepsilon$.

Exercice 4 – *Langage de Lukasiewicz*

Le langage de Lukasiewicz est le langage L sur $\{a,b\}$ engendré par la règle $S \to aSS + b$ à partir de l'unique non-terminal S.

1. Montrer que tout mot $u \in L$ vérifie la propriété (1) : $|u|_b = |u|_a + 1$.
2. Montrer que tout mot $u \in L$ vérifie aussi la propriété (2) :
   pour tout v facteur gauche strict de u, $|v|_a \geqslant |v|_b$.
3. En déduire que L est l'ensemble des mots vérifiant (1) et (2).
4. On considère le langage de Dick D_1^* à une paire de parenthèses. Montrer que $L = D_1^* b$.

Exercice 5 – *Forme normale des grammaires contextuelles*

Rappelons qu'une grammaire $G = (\Sigma, V, P, S)$ est dite *contextuelle* si toute règle $(\alpha, \beta) \in P$ vérifie $|\alpha| \leqslant |\beta|$. Une grammaire contextuelle $G = (\Sigma, V, P, S)$ est dite en *forme normale* si toute règle est de la forme $(\alpha_1 X \alpha_2, \alpha_1 \beta \alpha_2)$ avec $X \in V$ et $\beta \neq \varepsilon$. Démontrer que tout langage engendré par une grammaire contextuelle est également engendré par une grammaire contextuelle en forme normale.