Langages formels

4. Fonctions séquentielles, automates d'arbres

26 février 2007

Exercice 1 – *Fonction caractéristique*

Soit Σ un alphabet fini. Montrer qu'un sous-ensemble L de Σ^* est rationnel si, et seulement si, sa fonction caractéristique χ_L (définie sur Σ^* par $\chi_L(u) = 1$ si et seulement si $u \in L$) est séquentielle.

Exercice 2 – *Image directe d'un rationnel*

Montrer qu'une fonction séquentielle préserve la rationnalité par image directe. En application, montrer que la fonction qui à un entier codé en binaire associe le codage du carré de cet entier n'est pas séquentielle.

Exercice 3 – *Séquentielle, ou non séquentielle ?*

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est ou non séquentielle. On pourra, au choix, exhiber un transducteur, utiliser le critère de préservation des reconnaissables par image inverse ou encore utiliser le critère des résiduels.

1. $f_a : u \in A^* \mapsto c^{|u|_a} \in C^*$ pour $a \in A$,

2. $f_{a,b} : u \in A^* \mapsto c^{\min(|u|_a, |u|_b)} \in C^*$ pour $a \neq b \in A$

Exercice 4 – *Formules de Presbürger*

On considère les *fonctions affines* de la forme $\psi(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$ où les a_i sont des entiers naturels, et les x_i des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *formule atomique* une formule de la forme $f(\psi_1, \psi_2)$, avec ψ_1 et ψ_2 des fonctions affines et f un opérateur de comparaison du type $<, \leqslant, =, \geqslant, >$ ou $\equiv [b]$ pour $b \in \mathbb{N}$ fixé.

On définit l'ensemble des formules de Presbürger comme l'ensemble obtenu à partir des formules atomiques en le fermant par combinaison booléenne (opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) et par quantification existentielle ($\exists$) et universelle ($\forall$).

L'objectif de cet exercice est de montrer que les formules de Presbürger sont reconnaissables par automate, *i.e.* que pour toute formule de Presbürger φ, il existe un automate fini $\mathcal{A}_\varphi$ qui reconnaisse exactement les codages en binaire renversés satisfaisant la formule φ.

1. Montrer que toute fonction affine est séquentielle.
2. Montrer l'on peut supposer que l'opérateur de comparaison est toujours $=$.
3. Étant données deux fonctions affines ψ_1 et ψ_2 à variables $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_m$, montrer que le langage

$$L_{1,2} := \left\{ (\overline{x_1}^2, \ldots, \overline{x_n}^2, \overline{y_1}^2, \ldots, \overline{y_m}^2) \;\middle|\; \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = \psi_2(y_1, \ldots, y_m) \right\}$$

   est reconnaissable ($\overline{u}^2$ dénote le codage en binaire renversé de $u \in \mathbb{N}$).
4. Conclure.

Exercice 5 – *Exemples de langages d'arbres*

Donner pour les langages d'arbres réguliers suivants des automates qui les reconnaissent.

1. L'ensemble des arbres d'arité au plus p qui ont un nombre pair de noeuds internes
2. L'ensemble des arbres binaires stricts (pas nécessairement équilibrés) qui ont pour frontière un mot dans $(ab)^*$.
3. L'ensemble $T_{L,p}$ des arbres d'arité au plus p dont la frontière est dans le langage rationnel L.
4. Un ensemble T d'arbres d'arité au plus 3 tel que $Fr(T) = \{ a^n b^n \mid n \geqslant 1 \}$.
5. L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble de variables propositionnelles vide et qui s'évaluent à vrai.
6. L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles fixé et qui sont satisfaisables.