Fonctions séquentielles (2)

Fonctions séquentielles.

Exercice 1 (Codes à délai de déchiffrage fini)

1. Soit $\beta_1 : \{x, y\}^* \to A^*$ le morphisme défini par $\beta_1(x) = a$ et $\beta_1(y) = aba$. La relation β_1^{-1} est-elle une fonction séquentielle ?
2. Même question avec $\beta_2 : \{x, y, z\}^* \to A^*$ défini par $\beta_2(x) = ab$, $\beta_2(y) = abb$ et $\beta_2(z) = baab$.
3. Généralisation. Soit X un sous-ensemble fini de A^* ; X est dit *préfixe* si aucun mot de X n'est préfixe d'un autre mot de X. Soit $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble en bijection avec X ; cette bijection induit un morphisme $\beta : B^* \to A^*$. Par définition, X est un *code* si ce morphisme est injectif. Un code X est dit *à délai de déchiffrage* d si quand un mot $f = x_1 x_2 \cdots x_{d+1} \in X^{d+1}$ est *préfixe* (en tant que mot de A^*) d'un mot $g = y_1 y_2 \cdots y_r \in X^*$, alors on a $x_1 = y_1$.
   (a) Vérifier qu'un code préfixe est un code à délai de déchiffrage 0.
   (b) Donner un exemple de code qui n'est pas à délai de déchiffrage fini.
   (c) Montrer que si X est préfixe, β^{-1} est une fonction séquentielle pure.
   (d) Montrer que si X est un code à délai de déchiffrage fini, β^{-1} est une fonction séquentielle.
   (e) Réciproquement, montrer que si β^{-1} est une fonction séquentielle, alors X est un code à délai de déchiffrage fini.

   On a démontré la :

   Proposition 1
   Soit $\beta : B^* \to A^*$ un morphisme. L'ensemble $X = \beta(B)$ est un code à délai de déchiffrage fini si et seulement si β^{-1} est une fonction séquentielle.

Exercice 2 (Fonction caractéristique)
Soit Σ un alphabet fini. Montrer qu'un sous-ensemble L de Σ^* est rationnel si, et seulement si, sa fonction caractéristique χ_L (définie sur Σ^* par $\chi_L(u) = 1$ si et seulement si $u \in L$) est séquentielle.

Exercice 3 (Image directe d'un rationnel)
Montrer qu'une fonction séquentielle préserve la rationnalité par image directe.
En application, montrer que la fonction qui à un entier codé en binaire associe le codage du carré de cet entier n'est pas séquentielle.

Exercice 4 (Formules de Presbürger)
On considère les *fonctions affines* de la forme $\psi(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où les a_i sont des entiers naturels, et les x_i des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *formule atomique* une formule de la forme $f(\psi_1, \psi_2)$, avec ψ_1 et ψ_2 des fonctions affines et f un opérateur de comparaison du type $<, \leq, =, \geq, >$ ou $\equiv [b]$ pour $b \in \mathbb{N}$ fixé.
On définit l'ensemble des formules de Presbürger comme l'ensemble obtenu à partir des formules atomiques en le fermant par combinaison booléenne (opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) et par quantification existentielle ($\exists$) et universelle ($\forall$).
L'objectif de cet exercice est de montrer que les formules de Presbürger sont reconnaissables par automate, *i.e.* que pour toute formule de Presbürger φ, il existe un automate fini $\mathcal{A}_\varphi$ qui reconnaisse exactement les codages en binaire renversés satisfaisant la formule φ.

1. Montrer que toute fonction affine est séquentielle.
2. Montrer l'on peut supposer l'opérateur de comparaison égal à $=$.
3. Étant données deux fonctions affines ψ_1 et ψ_2 à variables $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_m$, montrer que le langage
$$L_{1,2} = \{(\overline{x_1}^2, \ldots, \overline{x_n}^2, \overline{y_1}^2, \ldots, \overline{y_m}^2) \mid \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = \psi_2(y_1, \ldots, y_m)\}$$
est reconnaissable ($\overline{u}^2$ dénote le codage en binaire renversé de $u \in \mathbb{N}$).
4. Conclure.

Exercice 5 (Séquentielle, ou non séquentielle ?)
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est ou non séquentielle. On pourra, au choix, exhiber un transducteur, utiliser le critère de préservation des reconnaissables par image inverse ou encore utiliser le critère des résiduels.
– $f_a : u \in A^* \mapsto c^{|u|_a} \in C^*$ pour $a \in A$,
– $f_{a,b} : u \in A^* \mapsto c^{min(|u|_a, |u|_b)} \in C^*$ pour $a \neq b \in A$

Exercice 6 (Minimisation par les résiduels)
Construire par la méthode des résiduels le transducteur minimal réalisant la multiplication par 5 en base 2.

Exercice 7 (Caractérisation topologique de la séquentialité)
Nous présentons dans cet exercice une caractérisation topologique de la séquentialité. Pour cela, nous définissons la *distance préfixe* de deux mots u et v de Σ^* par $d(u, v) = |u| + |v| - 2|u \wedge v|$. Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi une distance sur Σ^*. Nous pouvons à présent énoncer le :

Théorème 1
Soit $\varphi : A^* \to B^*$ une fonction dont le domaine est préfixiel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est séquentielle,

(ii) φ est lipschitzienne pour la distance d, et φ^{-1} préserve les langages reconnaissables.

1. Démontrer l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$.
2. Application : montrer que la multiplication par 3 en base 2 n'est pas séquentielle (pour la représentation classique).

Reprise d'exercices antérieurs.

Exercice 8 (Automates universels)
Un automate fini $\mathcal{A}$ peut-être interprété comme étant universel : un mot est accepté si tous les calculs sur ce mot sont accepteurs. On note $L_\forall(\mathcal{A})$ son langage.

(i) Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate fini, $L_\forall(\mathcal{A})$ est rationnel.

(ii) On suppose L rationnel, montrer que les langages suivants sont rationnels :
$L_1 = \{w \mid \exists(u,v)\ w = uv \text{ et } v \in L\}$ et $L_2 = \{w \mid \forall(u,v)\ w = uv \Rightarrow v \in L\}$

Exercice 9 (Double renversement)

1. Soit L un langage rationnel. Montrer que le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est l'automate minimal de L.
2. On note $\mathcal{A}^t$ l'automate $\mathcal{A}$ dans lequel on a inversé le sens des flèches et échangé états initiaux et finaux. Montrer que $(((\mathcal{A}^t)_{det})^t)_{det}$ est l'automate minimal de $L(\mathcal{A})$.

Exercice 10 (Langages sans étoile)
Le langage $L = ((a + cb^*a)c^*b)^*$ est-il sans étoile ?

Exercice 11 (Reconnaissables et concaténation)

1. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les reconnaissables sont stables par concaténation.
   Indication : Si L_i $(i = 1, 2)$ est reconnu par $\phi_i : A^* \to M_i$, on pourra considérer l'application
   $$\begin{array}{rccl} \phi : & A^* & \to & 2^{M_1 \times M_2} \\ & w & \mapsto & \{(\phi_1(u), \phi_2(v)) \mid w = uv\} \end{array}$$
2. En déduire que tout langage sans étoile est apériodique (ce qui correspond à une implication du théorème de Shützenberger).