Langages formels, calculabilité et complexité

Magistère MMFAI

Examen du 23 janvier 2002

durée 3 heures

Les documents sont autorisés.

Toutes les réponses devront être correctement justifiées.

Il va sans dire que la rigueur des raisonnements, la clarté des explications, mais aussi la qualité de la présentation influeront sensiblement sur la note.

1 Algorithmes de Markov

On fixe un alphabet Σ. Un algorithme de Markov est une suite numérotée d'instructions de la forme

$$\begin{array}{ccccc} 1 & : & x_1/y_1 & : & \ell_1 \\ 2 & : & x_2/y_2 & : & \ell_2 \\ & & \vdots & & \\ k & : & x_k/y_k & : & \ell_k \\ k+1 & : & \text{STOP} & & \end{array}$$

avec $1 \leq \ell_i \leq k+1$ et $x_i,y_i \in \Sigma^*$ pour $1 \leq i \leq k$. Une donnée de l'algorithme est un mot de Σ^*. L'algorithme commence son exécution par l'instruction 1. L'instruction i opère sur un mot $w \in \Sigma^*$ de la façon suivante : on cherche dans w la première occurrence de x_i ; si on la trouve, on la remplace par y_i et on passe à l'instruction ℓ_i ; sinon, on passe à l'instruction $i+1$. L'algorithme s'arrête lorsqu'il est envoyé à l'instruction $k+1$.

On considère l'algorithme de Markov suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & : & D/DT & : & 2 \\ 2 & : & F/EF & : & 3 \\ 3 & : & T0/0T & : & 6 \\ 4 & : & T1/1T & : & 7 \\ 5 & : & TE/\varepsilon & : & 8 \\ 6 & : & F/0F & : & 3 \\ 7 & : & F/1F & : & 3 \\ 8 & : & \text{STOP} & & \end{array}$$

a) Sur quel mot s'arrête cet algorithme lorsque la donnée est $D101F$?

b) Quel est l'action de cet algorithme sur une donnée $w \in D\{0,1\}^*F$?

c) Montrer qu'un algorithme de Markov peut être simulé par une machine de Turing.

d) Une machine de Turing peut-elle être simulée par un algorithme de Markov ? Justifier la réponse.

2 Mélanges de mots

Soit Σ un alphabet et $u,v \in \Sigma^*$ deux mots. Le mélange de u et v est le langage

$$u \sqcup\!\sqcup v = \{u_1v_1 \cdots u_nv_n \mid n \geq 0,\ u_i,v_i \in \Sigma^*,\ u = u_1 \cdots u_n \text{ and } v = v_1 \cdots v_n\}.$$

Cette opération est étendue aux langages en posant pour $K,L \subseteq \Sigma^*$

$$K \sqcup\!\sqcup L = \bigcup_{u \in K, v \in L} u \sqcup\!\sqcup v.$$

Pour les trois questions qui suivent, on fixe l'alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ et les langages $K = \Sigma^* ab \Sigma^*$ et $L = \Sigma^* b \Sigma^*$.

a) Donner des automates non déterministes pour les langages K, L et $K \sqcup\!\sqcup L$.

b) Déterminiser l'automate de $K \sqcup\!\sqcup L$.

c) Minimiser l'automate obtenu à la question précédente.

Dans la suite, l'alphabet Σ et les langages K et L sont de nouveau arbitraires. On introduit une copie $\overline{\Sigma}$ de l'alphabet Σ et les morphismes Π, Π_1 et Π_2 de $(\Sigma \cup \overline{\Sigma})^*$ dans Σ^* définis pour $a \in \Sigma$ par $\Pi(a) = \Pi(\overline{a}) = a$, $\Pi_1(a) = \Pi_2(\overline{a}) = a$, et $\Pi_1(\overline{a}) = \Pi_2(a) = \varepsilon$.

d) Montrer que $K \sqcup\!\sqcup L = \Pi(\Pi_1^{-1}(K) \cap \Pi_2^{-1}(L))$.

e) Montrer que si K et L sont rationnels alors $K \sqcup\!\sqcup L$ est aussi rationnel.

On définit le langage $E(K,L) = \{v \in \Sigma^* \mid (K \sqcup\!\sqcup v) \cap L \neq \emptyset\}$.

f) Montrer que si K et L sont rationnels alors $E(K,L)$ est aussi rationnel.

On définit le langage $A(K,L) = \{v \in \Sigma^* \mid K \sqcup\!\sqcup v \subseteq L\}$.

g) Montrer qu'il existe un langage $K' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup K' = L$ si et seulement si $K \sqcup\!\sqcup A(K,L) = L$.

h) Montrer que si K et L sont rationnels alors on peut décider de l'existence d'un langage $K' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup K' = L$.

i) Montrer que si K et L sont rationnels et qu'il existe un langage $K' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup K' = L$, alors on peut effectivement construire un langage rationnel $K'' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup K'' = L$

On considère dans la suite le langage $K = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$ et le langage $L = \{u \in \{c,d\}^* \mid |u|_c = |u|_d\}$.

j) Montrer que les langages K et L sont algébriques.

k) Le langage $K \sqcup\!\sqcup L$ est-il algébrique? Justifier la réponse.

3 Complexité

On considère le problème SATG suivant :

Donnée : Une expression booléenne φ (pas nécessairement en FNC).
Question : φ est-elle satisfaisable ?

a) Montrer que le problème SATG est **NP**-complet.

On considère le problème fonctionnel FSAT suivant :

Donnée : Une expression booléenne φ.
Résultat : Une assignation σ des variables propositionnelles de φ telle que $\sigma \models \varphi$, si φ est satisfaisable ; ou bien le fait que φ n'est pas satisfaisable.

b) Montrer que si le problème FSAT peut se résoudre de façon déterministe en temps polynomial alors SATG $\in \mathbf{P}$.

c) Réciproquement, montrer que si SATG $\in \mathbf{P}$, alors il existe un algorithme polynomial déterministe pour résoudre FSAT.
Indication : Considérer les formules $\varphi[x := \texttt{vrai}]$ et $\varphi[x := \texttt{faux}]$ obtenues à partir de φ en remplaçant la variable propositionnelle x par `vrai` et `faux` respectivement.

On rappelle que le problème du voyageur de commerce avec budget (VCB) est le suivant :

Donnée : Un graphe $G = (S,A)$, une fonction de coût $c : A \to \mathbb{N}$ et un budget $B \in \mathbb{N}$.
Question : Existe-t-il dans G un circuit Hamiltonien (i.e. visitant exactement une fois chaque sommet) de coût inférieur ou égal à B ?

La version fonctionnelle (VC) de ce problème est la suivante :

Donnée : Un graphe $G = (S,A)$ et une fonction de coût $c : A \to \mathbb{N}$.
Question : Trouver un circuit Hamiltonien de G de coût minimal.

d) Montrer que si le problème VC peut se résoudre de façon déterministe en temps polynomial alors VCB $\in \mathbf{P}$.

e) Réciproquement, montrer que si VCB $\in \mathbf{P}$, alors il existe un algorithme polynomial déterministe pour résoudre VC.
Indication : Calculer le coût optimal B pour le graphe G et la fonction c. Choisir une arête de G, lui affecter le coût $B + 1$ et calculer le coût optimal avec cette nouvelle fonction de coût.