Cours de λ-calcul.*

CHAPITRE. Syntaxe du λ-calcul non typé

(3. Séparabilité et Théorème de Böhm).†

Ch. Berline

Notations et conventions sur les suites de termes ou de variables (dont rappels). Soient $\bar{x}, \bar{x}' \in V^{<\omega}$ et $\bar{t}, \bar{t}' \in \Lambda^{<\omega}$. L'assertion *$\bar{x}$ n'est pas libre dans $\bar{t}$* signifie qu'aucune des variables de la suite n'est libre dans l'un des t_i. L'expression $\bar{t} =_\beta \bar{t}'$ signifie que $l(\bar{t}) = l(\bar{t}')$ et pour tout $i \leq l(\bar{t})$ on a $t_i =_\beta t_i'$, idem pour $=_{\beta\eta}$. Pour $f : \Lambda \to \Lambda$ l'abbréviation $f(\bar{t})$ dénote la suite des $f(t_i)$, $i \leq l(\bar{t})$. L'ensemble sous-jacent à $\bar{x}$ sera noté de la même manière, en particulier $\bar{x} - \bar{x}'$ désigne l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui n'apparaissent pas dans $\bar{x}'$.

1 Introduction.

Definition 1 *Deux termes clos t, t' sont* separables *si il existe $\bar{v} \in \Lambda^{<\omega}$ tel que: $t\bar{v} =_\beta V$ et $t'\bar{v} =_\beta F$.*

Comme $Vww' =_\beta w$ et $Fww' =_\beta w'$ on a immédiatement:

Corollary 2 *Si t et t' sont clos séparables alors, pour tous termes w, w', il existe $\bar{u} \in \Lambda^{<\omega}$ telle que: $(t)\bar{u} =_\beta w$ et $(t')\bar{u} =_\beta w'$.*

Corollary 3 *Il est inconsistant d'égaler deux termes clos séparables.*

La signification précise étant qu'aucune λ-théorie (et donc aucun modèle non trivial du λ-calcul) ne peut égaler deux termes clos séparables. Ce corollaire est également vrai pour des termes séparables quelconques, au sens suivant.

Definition 4 *Plus généralement deux termes t et t' sont* séparables *si il existe $\bar{x} \in V^{<\omega}$ et $\bar{u}, \bar{v} \in \Lambda^{<\omega}$ tels que $t[\bar{x} := \bar{u}]\,\bar{v} =_\beta V$ et $t'[\bar{x} := \bar{u}]\,\bar{v} =_\beta F$.*

ON notera que deux termes séparables sont nécessairement résolubles. Par ailleurs il suit immédiatement que deux termes résolubles sont séparables ssi

*DEA de Logique et Fondements de l'Informatique (2000-2001), UFR de Mathématique, Université Paris 7.

†Version de Mars 1995, rev. 30 Mars 2001+.

leurs formes normales de tête (fnt) le sont. Dans la Section 3 nous montrerons, après avoir défini la similarité, que deux fnt non semblables sont toujours séparables. Dans la Section 4 nous montrerons que deux termes normaux non η-équivalents sont toujours séparables (Théorème de Böhm). La première démonstration est très facile, et la seconde nettement moins. Le lecteur intéressé par les questions d'effectivité pourra se convaincre assez facilement qu'il lui serait possible d'extraire de chacune des deux démonstrations un algorithme associant à chaque couple (t, t') de fnt non semblables, ou de termes normaux non η-équivalents, une paire $(\bar{u}, \bar{v})$ qui les sépare au sens ci-dessus.

Exercise 5 *Montrer que les couples suivants de termes résolubles sont des couples séparables:* (V, F), (I, V), (I, F), $(\hat{0}, \hat{1})$.

On donnera plus généralement dans la section suivante une condition suffisante de séparabilité pour les couples de fnt.

2 Transformations de Böhm.

Definition 6 *Une* transformation de Böhm F est une fonction de Λ *dans* Λ *qui est obtenue en composant des fonctions élémentaires de la forme :* $t \mapsto t\bar{v}$ *ou* $t \mapsto t[\bar{x} := \bar{u}]$*, notées respectivement* $B_{\bar{v}}$ *et* $B_{\bar{x},\bar{u}}$*.* F *est principalement close si tous les* $\bar{u}$ *des* $B_{\bar{x},\bar{u}}$ *qui la composent sont clos (on admet les suites de longueur nulle).*

Puisque $=_\beta, =_\eta$ et $=_{\beta\eta}$ passent au contexte et sont substitutives, toute transformation de Böhm F est compatible avec $=_\beta, =_\eta$ et $=_{\beta\eta}$; autrement dit: $t \simeq t'$ implique $F(t) \simeq F(t')$ pour les trois relations.
On notera que si $\bar{u}$ est clos alors $B_{\bar{x},\bar{u}}$ est égale à la composée, dans un ordre arbitraire, des B_{x_i,u_i} où $i \leq l(\bar{x})$.

Lemma 7 *Les transformations de Böhm principalement closes sont exactement les transformations* $t \mapsto t[\bar{x} := \bar{u}]\bar{v}$ *où* $\bar{u} \in \Lambda_0^{<\omega}$.

Preuve. $\Leftarrow$: est évident. $\Rightarrow$: par induction sur le nombre $l(F)$ d'applications élémentaires dont F est composée. Si $l(F) = 1$ c'est clair. Sinon $F = B_{\bar{w}} \circ G$ ou $F = B_{\bar{x}',\bar{u}'} \circ G$, avec G transformation de Böhm principalement close et $\bar{u}'$ clos. Si $G(t) = t[\bar{x} := \bar{u}]\bar{v}$ on a $F(t) = t[\bar{x} := \bar{u}]\bar{v}\bar{w}$ dans le premier cas et $F(t) = (t[\bar{x} := \bar{u}]\bar{v})[\bar{x}' := \bar{u}'] = (t[\bar{x} := \bar{u}][\bar{x}' := \bar{u}'])\bar{v}'[\bar{x}' := \bar{u}']$ dans le second. Il ne reste plus qu'à remarquer que, puisque $\bar{u}$ est clos $t[\bar{x} := \bar{u}][\bar{x}' := \bar{u}'] = t[\bar{x}\bar{x}" := \bar{u}\bar{u}"]$ où $\bar{x}" =_{def} \bar{x}' - \bar{x}$ et $\bar{u}"$ est la suite correspondante extraite de $\bar{u}'$.

Definition 8 *Deux termes* t, t' *sont* Böhm-séparables *si il existe une transformation de $\hat{B}$ohm* F principalement close *qui les sépare (au sens où* $F(t) =_\beta V$ *et* $F(t') =_\beta F$ *).*

Corollary 9 *(i) Deux termes* t, t' *Böhm-séparables sont séparables.*
(ii) Deux termes clos t, t' *sont séparables ssi ils sont Böhm-séparables.*

3 Séparabilité des fnt non semblables.

Definition 10 *Etant données deux formes normales de tête* $t =_{def} \lambda\bar{x}.x\bar{t}$ *et* $t' =_{def} \lambda\bar{x}'.x'\bar{t}'$ *on peut toujours supposer que* $\bar{x}' \equiv \bar{x}\bar{z}$ *avec* $\bar{z}$ *non libre dans* $\bar{t}$ *si* $l(\bar{x}') \geqslant l(\bar{x})$, *et symétriquement dans l'autre cas (*"Convention Var"*). On dira que les fnt* t *et* t' *sont* semblables *(noté* $t \sim t'$*) si, quand on respecte cette convention,* $x \equiv x'$, *et si de plus* $l(\bar{t}) - l(\bar{x}) = l(\bar{t}') - l(\bar{x}')$. *Noter qu'alors la variable de tête commune est liée dans* t *et dans* t' *ou libre dans ces deux termes.*

Notation 11 *Soit* t *une fnt* $\lambda\bar{x}.x\bar{t}$
$m(t)$ *est le nombre* $l(\bar{x})$ *de variables liées en tête .*
$n(t)$ *est le nombre* $l(\bar{t})$ *d'arguments de la variable de tête.*
$v(t) \in V \cup N$ *est la variable de tête de* t *si celle-ci est libre, et sinon l'entier* k *tel que* x *est la* $k^{ième}$ *variable liée.*
$d(t) = m(t) - n(t)$.

Avec ces notations la définition de similitude des fnt se reformule de la façon suivante, qui ne dépend plus que des classes de α-équivalence de t, t', et ne repose plus sur des conventions d'écriture.

Definition 12 *Deux* fnt t, t' *sont* semblables *si* $d(t) = d(t')$ *et* $v(t) = v(t')$.

Theorem 13 *Deux* fnt *non semblables sont Böhm-séparables.*

Preuve. Soient $t =_{def} \lambda\bar{x}.x\bar{t}$ et $t' =_{def} \lambda\bar{x}'.x'\bar{t}'$ deux fnt non semblables, supposées écrites avec la convention Var. Nous considérons d'abord 3 cas particuliers:
• $t \equiv x\bar{t}$ et $t' \equiv x'\bar{t}'$, avec $x \neq x'$. Alors il suffit de substituer (simultanément ou dans un ordre arbitraire) x par $\lambda\bar{y}.F$ et x' par $\lambda\bar{y}'.V$, avec $l(\bar{y}) = l(\bar{t})$ et $l(\bar{y}') = l(\bar{t}')$.
• x et x' sont liées et $x \neq x'$. On peut supposer $m(t) \geqslant m(t')$ et on se ramène au cas précédent en appliquant $B_{\bar{x}}$.
• $t \equiv x\bar{t}$ et $t' \equiv x\bar{t}'$, avec $n(t) \neq n(t')$. On peut supposer $n(t) > n(t')$ et on se ramène au cas précédent en appliquant $B_{x,\alpha}$ aux deux termes, où $\alpha = \lambda\bar{z}.\lambda z.z\bar{z}$ avec $l(\bar{z}) = n(t)$.
• Cas général. On peut supposer $m(t) \geq m'(t)$; on se ramène aux cas 1 ou 3 en appliquant $B_{\bar{x}}$ aux deux termes.

Compléments sur les fnt.
Tout $\beta\eta$-réduit d'une fnt t est clairement une fnt semblable, chaque étape de réduction ayant lieu dans un t_i, à moins que ce ne soit une étape de η-réduction qui fasse disparaître la dernière liaison de tête et le dernier argument de la variable de tête. De Church-Rosser il suit que $t =_{\beta\eta} t \Rightarrow t \sim t'$. Les deux remarques suivantes, qui affinent cette observation, sont aussi un corollaire facile de Church-Rosser:

Remark 14 *Soient* $t =_{def} \lambda\bar{x}.x\bar{t}$ *et* $t' =_{def} \lambda\bar{x}'.x'\bar{t}'$ *deux* fnt, *alors:*
$t =_\beta t' \iff (t \sim t'$ *et* $\bar{t} =_\beta \bar{t}')$ *tandis que:*

$$t =_{\beta\eta} t' \iff t \sim t' \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} t = \lambda\,\bar{x}"\;\lambda\bar{z}.x\,\bar{u}\,\bar{v} \text{ et } t' = \lambda\,\bar{x}"\;\lambda\bar{z}'.x'\,\bar{u}'\,\bar{v}' \\ \bar{v} =_{\beta\eta} \bar{z} \text{ et } \bar{v}' =_{\beta\eta} \bar{z}' \\ \bar{u} =_{\beta\eta} \bar{u}' \end{array} \right.$$

4 Le Théorème de Böhm.

Theorem 15 *(Böhm) Deux termes normaux non* η*-équivalents sont Böhm-séparables.*

Il est évidemment nécessaire que les deux termes ne soient pas η-équivalents, ou, ce qui revient au même pour des termes normaux, $\beta\eta$-équivalents, sinon V et F seraient équivalents, contradiction.

Le Théorème de Böhm se démontre par induction sur la somme $h(t) + h(t')$ des *hauteurs des arbres de Böhm* de t et t', arbres qui sont finis dans le cas de termes normaux, ou plus généralement normalisables. Dans le cas des termes normaux cette hauteur se definit directement par induction sur la longueur ou la complexite de t par :

$$h(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & t = \lambda\bar{x}.y \\ 1 + \sup\{h(t_i)\ /\ i \leq n\} & \text{si} & t = \lambda\bar{x}.yt_1...t_n \text{ et } n \geq 1 \end{array} \right.$$

Essai de démonstration. Il suffit de considérer le cas où t et t' sont semblables (dans l'autre cas la Proposition 5 permet de conclure), de plus on se ramène facilement au cas où:

$$t = (x)\bar{t} \text{ et } t' = (x)\bar{t}'$$

Comme $t \neq_{\beta\eta} t'$, on a $t_i \neq_{\beta\eta} t'_i$ pour un i au moins et comme $h(t_i) + h(t'_i) < h(t) + h(t')$, il suffit de trouver une transformation de Böhm qui permette d'extraire t_i et t'_i de t et t'. La substitution de $\pi_{i,n} = \lambda x_1...\lambda x_n.x_i$ à x serait naturelle; le seul problème c'est qu'elle substitue aussi dans t_i, t'_i si x a une occurrence libre dans ces sous-termes, et qu'au lieu de se retrouver avec t_i, t'_i , on se retrouve avec des substitués auxquels on ne peut pas appliquer l'hypothèse d'induction: ils ne sont pas normaux en général, et rien ne les empêche d'être $\beta\eta$-équivalents. On contourne ce problème en montrant par induction sur $h(t)+h(t')$ un théorème plus général qui permet, en particulier, de se débarrasser des variables libres des t_i avant de faire l'ultime substitution par $\pi_{i,n}$. Les variables libres en question seront substituées par les termes clos α_n déja rencontrés (constructeurs de n-uples) et dont on rappelle la définition tout de suite.

Notation 16 *1.* $\alpha_n =_{def} \lambda\bar{x}\lambda z.z\bar{x}$ *avec* $l(\bar{x}) = n$, *et* $U =_{def} \{\alpha_n\,/\,n \in N\}$.
2. Σ *est l'ensemble des injections partielles* $\sigma : V \to U$ *de domaine fini.*
3. Pour $\sigma \in \Sigma$ *et* $x \in dom(\sigma)$ *l'indice de* $\sigma(x)$ *sera désigné par* $i\sigma(x)$, *et* $\sigma \geq q$ *signifiera que pour tout* $x \in dom(\sigma)$ *on a* $i\sigma(x) \geq q$.

4. F_σ designe la transformation de Böhm principalement close $t \mapsto t[\bar{x} := \sigma(\bar{x})]$, où $\bar{x}$ est une énumération du domaine de $\sigma \in \Sigma$.
5. t^σ désignera la fnt de $F_\sigma(t)$ si ce terme est normalisable de tête.
6. $I(t)$ est l'ensemble des $\sigma \in \Sigma$ qui sont inopérantes sur la variable de tête de la fnt t, autrement dit :

$$I(t) = \begin{cases} \Sigma & si \quad v(t) \in N \\ \{\sigma \ / \ v(t) \notin dom(\sigma)\} & sinon \end{cases}$$

7. $O(t)$ est l'ensemble des $\sigma \in \Sigma$ qui sont opérantes sur la variable de tête de la fnt t et telles que $\sigma \geq n(t)$, autrement dit :

$$O(t) = \begin{cases} \emptyset & si \quad v(t) \in N \\ \{\sigma \geq n(t) \ / \ v(t) \in dom(\sigma)\} & sinon \end{cases}$$

Lemma 17 *Pour toute fnt t et toute $\sigma \in O(t) \cup I(t)$, $F_\sigma(t)$ est h-normalisable et:*

$$\begin{array}{llll} si\ \sigma \in I(t), & alors & t^\sigma = F_\sigma(t) \sim t,\ v(t^\sigma) = v(t) \in V \cup N \ et\ d(t^\sigma) = d(t), \\ si\ \sigma \in O(t), & alors & v(t^\sigma) = i\sigma(v(t)) + d(t) + 1 \in N \ et\ d(t^\sigma) = d(t) + 1 \end{array}$$

Preuve. Supposons $t = \lambda\bar{x}.x\bar{t}$.
Les assertions du lemme résultent immédiatement de ce que :
Si $\sigma \in I(t)$, alors $F_\sigma(t) = \lambda\bar{x}.xF_{\sigma^-}(\bar{t})$, où σ^- coincide avec σ sauf sur les variables de $\bar{x}$, où elle n'est pas définie; tandis que:
Si $\sigma \in O(t)$, alors $F_\sigma(t) = \lambda\bar{x}.\alpha_n F_{\sigma^-}(\bar{t})$, pour $\alpha_n = \sigma(x)$, et la réduction de tête de $F_\sigma(t)$ aboutit sur $t^\sigma = \lambda\bar{x}.\lambda\bar{z}.\lambda z.zF_{\sigma^-}(\bar{t})\bar{z}$ avec $l(\bar{z}) = n - n(t)$.

Lemma 18 *Soient t et t' deux fnt, alors :*

$$t \not\sim t' \Longrightarrow \exists q \in N \ \forall\sigma \geq q \ t^\sigma \not\sim t'^\sigma$$

Démonstration. Il suffit en fait de prendre q plus grand que: $n(t), n(t')$, que $v(t) - d(t) + 1$ si $v(t) \in N$, et que $v(t') - d(t') + 1$ si $v(t') \in N$.
En effet ceci permet de traiter les quatre cas qui peuvent se présenter:
• $\sigma \in I(t) \cap I(t')$. Ce cas est bien clair puisqu'alors $t^\sigma \sim t \not\sim t' \sim t'^\sigma$.
• $\sigma \in I(t) \cap O(t')$. Alors $t^\sigma \sim t$, d'autre part $v(t') \in V$ et $v(t'^\sigma) \in N$.
Supposons que $d(t^\sigma) = d(t'^\sigma)$, alors $d(t') + 1 = d(t)$ et :
$v(t'^\sigma) = i\sigma(v(t')) + d(t') + 1 = i\sigma(v(t')) + d(t) > v(t) = v(t^\sigma)$
(puisque $\sigma > v(t) - d(t)$). Donc $v(t'^\sigma) > v(t^\sigma)$ et $t^\sigma \not\sim t'^\sigma$.
• $\sigma \in I(t') \cap O(t)$ est symétrique du cas précédent.
• $\sigma \in O(t) \cap O(t')$.
Supposons que $d(t^\sigma) = d(t'^\sigma)$, alors $d(t) = d(t')$ et :
$v(t^\sigma) - v(t'^\sigma) = i\sigma(v(t)) - i\sigma(v(t'))$.
Comme $t \not\sim t'$ on a $v(t) \neq v(t')$. Comme iσ est injective on en conclut que $v(t^\sigma) \neq v(t'^\sigma)$ et $t^\sigma \not\sim t'^\sigma$.

Corollary 19 *Soient t et t' deux fnt non semblables, alors:*

$$\exists q \in N \, \forall\sigma \geq q \ (F_\sigma(t) \ et \, F_\sigma(t') \ sont\ Böhm\text{-}séparables).$$

Preuve. En effet, puisque les transformations de Böhm sont compatibles avec $=_\beta$, toute transformation G séparant t^σet t'^σ conviendra pour $F_\sigma(t)$ et $F_\sigma(t')$, puisqu'ils ont ces termes pour fnt.

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat général :

Theorem 20 *Soient t et t' deux termes normaux tels que $t \neq_\eta t'$, alors:*

$$\exists q \in N\ \forall \sigma \geq q\ (F_\sigma(t) \text{ et } F_\sigma(t') \text{ sont Böhm-séparables}).$$

Preuve. On montre l'existence de $q \equiv q(t,t')$ par induction sur $h(t)+h(t')$.
• Si $t \nsim t'$ il suffit d'appliquer directement le Corollaire précédent ; c'est le cas en particulier si $h(t)+h(t') = 0$ et $t \neq_\eta t'$.
• Supposons donc maintenant que $t \neq_\eta t'$ et $t \sim t'$ et $h(t)+h(t') \neq 0$, c'est à dire $\sup(n(t), n(t')) \geq 1$. Nous supposons que $t \equiv \lambda\bar{x}.x\bar{t}$ et $t' \equiv \lambda\bar{x}'.x\bar{t}'$ sont écrits en suivant la convention Var, en particulier la suite de variables $\bar{x}$" telle que $\bar{x}' \equiv \bar{x}\bar{x}$" n'est pas libre dans $\bar{t}$. On peut supposer de plus, sans perte de généralité, que $m(t') \geq m(t) \geq 0$ (ce qui implique $n(t') \geq n(t) \geq 0$).
Comme $t =_\eta \lambda\bar{x}'.x\bar{t}\bar{x}$" et $t \neq_\eta t'$, il existe un $i \leq n(t')$ tel que $t_i \neq_\eta t'_i$, en posant $t_{n(t)+k} = x"_k$ pour $k \leq n(t') - n(t)$.
De plus $h(t'_i) < h(t')$ et $h(t_i) \leq h(t)$ (l'égalité est possible si $n(t) = 0$).
On peut appliquer l'hypothèse d'induction à (t_i, t'_i) .
On est donc ramené à montrer qu'il existe $q = q(t,t')$ tel que pour toute $\sigma \geq q$ il existe $\tau \geq q(t_i, t'_i)$ et une transformation de Böhm G principalement close telles que $G(F_\sigma(t)) =_\beta F_\tau(t_i)$ et $G(F_\sigma(t')) =_\beta F_\tau(t'_i)$.
Prenons pour $q(t,t')$ le sup de $n(t), n(t')$, et de tous les $q(t_i, t'_i)$, $i \leq n(t')$.
Soit $\sigma \geq q \geq n'$. Noter que $dom(\sigma)$ peut contenir certains des x_i, et que x peut être l'un des x_i (ou non). Soit σ^- la restriction de σ à $dom(\sigma) - \bar{x}'$.
Soit τ le prolongement de σ^- à $dom(\sigma^-) \cup \{x\}$ qui vaut $\sigma(x)$ sur x si $x \in dom(\sigma)$ et α_q sinon.
Notons que $\tau \geq q(t_i, t'_i)$.
Soit r tel que $\tau(x) = \alpha_r$ et soit $H =_{def} F_\tau \circ B_{\bar{x}'}$.
On vérifie facilement, en considérant séparément le cas où σ est dans $I(t)$ ou dans $O(t)$, et de même pour t', que:

$H(F_\sigma(t)) =_\beta \alpha_r F_\tau(\bar{t}) F_\tau(\bar{x}") =_\beta \lambda\bar{z}.\lambda z.(z) F_\tau(\bar{t}) F_\tau(\bar{x}')\bar{z}$

$H(F_\sigma(t')) =_\beta \alpha_r F_\tau(\bar{t}') =_\beta \lambda\bar{z}\lambda z.(z) F_\tau(\bar{t}')\bar{z}$ avec $l(\bar{z}) = r - n(t')$.

Soit maintenant $K =_{def} B_{\pi_{i,r}} \circ B_{\bar{z}}$ on a clairement
$K(H(F_\sigma(t)) =_\beta F_\tau(t_i)$ et $K(H(F_\sigma(t')) =_\beta F_\tau(t'_i)$
donc $G \equiv K \circ H$ répond à question.

Notes bibliographiques: Bohm, Hyland, Krivine, Barendregt. Changer plus tard pour autre preuve (Ronchi ou Joly), et traiter la séparabilité faible.