Cours de λ-calcul

CHAPITRE 8. Dualité Modèles-Système. *

Ch. Berline

Table des matières

1 Introduction.

L'idée générale c'est que tout modèle de trame a une lecture logique, en ce sens que l'on peut produire un système de déduction susceptible d'engendrer les triplets Γ, t, α tels que $\alpha \in |t|_\Gamma$. Les articles fondateurs du sujet sont [1] et [2].

Cette présentation par système rend plus évidente la part d'effectivité qui est cachée dans *certains* modèles : à savoir, que si la trame du modèle peut être engendrée récursivement, alors on peut engendrer récursivement les interprétations des termes.

*Il s'agit d'une version partielle et provisoire issue de mes notes de cours de 95,96. *Version du 30 Avril 2001.*

On met ainsi une évidence une dualité modèles/systèmes, qui suggère qu'on peut utiliser les techniques de réductibilité pour étudier les propriétés des modèles, et en particulier obtenir des renseignements sur leur théorie équationnelle. De fait la réductibilité peut-être conduite directement dans les modèles, sans passer par le détour d'un système de typage [3].

La présentation de la dualité modèles/systèmes que nous donnons ici est, en un sens, plus générale que la présentation traditionnelle (qui ne concerne la plupart du temps que des modèles particuliers, et ne peut traiter que de modèles qui satisfont une certaine propriété de "semi-extensionnalité"). Ici nous incluons par exemple tous les modèles de graphes, alors qu'aucun modèle de graphe n'est semi-extensionnel en ce sens.

Les systèmes que nous produirons sont tous *analogues* au Système E, et ils admettent aussi des présentations alternatives comme *extensions* de ce système. Il s'agit donc de "systèmes de types avec intersection", sous une forme "nettoyée" où on évite les redondances qui sont dans les présentations traditionnelles, qui sont elles basées sur le système $D\Omega$ de Dezani. Cette simplification est possible dès que l'on considère des modèles dont le domaine sous-jacent est premier-algébrique : quand le domaine est seulement algébrique il faut nécessairement travailler avec des extensions du Système $D\Omega$ (et des "modèles de filtres").

Dans ce cours nous commencerons par présenter les systèmes duaux des modèles de graphes, puis nous généraliserons aux K-modèles. Le cas général des pcs-modèles (de la sémantique continue) ne sera évoqué qu'en quelques mots, de même que le cas de la sémantique stable.

2 Brefs rappels sur le Système E.

Les *types* sont les éléments de l'ensemble de formules F.

Rappelons que F est par définition le plus petit ensemble satisfaisant $F = P \cup \{\, a \to \alpha \;/\; \alpha \in F^{fin} \times F\}$, où P est un ensemble non vide dont les éléments sont considérés comme des variables propositionnelles, et $\to$ est un constructeur "libre" d'implication [1]. Rappelons que a est pensé comme la conjonction de ses éléments quand il est non vide [2], et que nous nous abstenons d'introduire un symbole explicite pour la conjonction, dont la gestion alourdirait inutilement la présentation. Noter que F ne dépend que de P; quand on voudra rendre ceci explicite on écrira F_P (et E_P).

Les *schémas de règles* sont :

[1] au sens qu'il permet la construction inductive de F sans être soumis à d'autres contraintes que les évidentes.

[2] $\emptyset$, quant à lui, joue ici le rôle que joue la constante Ω dans les systèmes de types avec intersection classiques.

- 1. axiome $\alpha \in \Gamma(x) \implies \Gamma \vdash x : \alpha$
- 2. $\to$-intro $\Gamma, x : a \vdash v : \alpha \implies \Gamma \vdash \lambda x.v : a \to \alpha$
- 3. $\leftarrow$-élim $\left.\begin{array}{l}\Gamma \vdash u : a \to \beta \\ \Gamma \vdash v : a\end{array}\right\} \implies \Gamma \vdash (u)v : \beta$

Pour plus de détails nous renvoyons au Chapitre 4.

3 Lecture logique des modèles de graphe.

3.1 Les systèmes S_W.

Nous nous interessons dans cette section aux couples $W =_{def} (D, i)$, où D est un ensemble non vide quelconque et i est une injection de $D^{fin} \times D$ dans D (c'est-à-dire aux trames de modèles de graphes). A chaque W on associe un système, qu'on notera S_W, et qui est défini de façon analogue à E, sauf que l'on travaille maintenant avec D pour ensemble de types, et avec i à la place de $\to$.

Contrairement à F, D n'admet en général pas de définition inductive récursive, bien que cela soit vrai pour des cas particuliers.

Les *types* de S_W sont donc les éléments de D.
Les *contextes* sont donc les expressions Γ de la forme $\bar{x} : \bar{a}$ avec les x_i distinctes et les a_i dans D^{fin}.
Les *séquents* sont les expressions de la forme $\Gamma \vdash_W t : \alpha$, avec $t \in \Lambda$ et $\alpha \in D$.
$\Gamma \vdash_W t : a$ est une abbréviation pour : $\forall \alpha \in a \; \Gamma \vdash_W t : \alpha$.

Les *schémas de règles* sont :

- 1. axiome $\alpha \in \Gamma(x) \implies \Gamma \vdash_W x : \alpha$
- 2. $\to$-intro $\Gamma, x : a \vdash_W v : \alpha \implies \Gamma \vdash_W \lambda x.v : i(a, \alpha)$
- 3. $\leftarrow$-élim $\left.\begin{array}{l}\Gamma \vdash_W u : i(a, \beta) \\ \Gamma \vdash_W v : a\end{array}\right\} \implies \Gamma \vdash_W (u)v : \beta$

Remarque 1 *Le système E correspond au choix de la paire $(F, \to)$; plus précisément : E_P correspond au choix de $(F_P, \to)$.*

Les propriétés suivantes se démontrent comme pour E *:*

Lemme 2 Propriétés élémentaires des S_W.
- *Si $y \notin dom(\Gamma)$, alors $\Gamma \vdash_W t : \alpha$ ssi $\Gamma, y : \emptyset \vdash_W t : \alpha$.*
- *Si $\Gamma \vdash_W t : \alpha$, alors $\forall \Gamma' \sqsupseteq \Gamma \; (\Gamma' \vdash_W t : \alpha)$ et $\forall \Gamma' (\Gamma \cup \Gamma' \vdash_W t : \alpha)$.*
- *$\Gamma \vdash_W t : \alpha$ ssi $\Gamma_t \vdash_W t : \alpha$, où Γ_t est la restriction de Γ à l'ensemble des variables libres de t.*

$\Gamma \vdash_W \lambda x.t : i(a, \alpha)$ et $b \supseteq a$ impliquent $\Gamma \vdash_W \lambda x.t : i(b, \alpha)$.

Trames et systèmes isomorphes. Rappelons qu'un *isomorphisme de (trames de) modèles de graphes* entre $W = (D, i)$ et $W' =_{def} (D', i')$ est une bijection $\theta : D \to D'$ telle que $\theta(i(a, \alpha)) = i'((\theta^\bullet(a), \theta(\alpha))$ pour tous α, a. Nous dirons aussi dans ce cas que les systèmes S_W et $S_{W'}$ sont isomorphes. Cette terminologie est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 3 *Si θ est un isomorphisme de trames de modèles de graphes entre W et W' alors*

$$\Gamma \vdash_W t : \alpha \quad ssi \quad \dot{\theta} \circ \Gamma \vdash_{W'} t : \theta(\alpha)$$

En particulier les termes typables dans les deux systèmes sont les mêmes.

Preuve. Induction triviale sur la complexité de t. Alternativement, ce résultat pourra aussi être vu comme conséquence de la propriété analogue que nous avons montrée sur les modèles dans le Chapitre 7 et du Théorème de dualité montré dans la section suivante.

Exemple 4 *La trame du modèle d'Engeler $\mathcal{E}$ est isomorphe à $(F, \rightarrow)$, le système correspondant est donc isomorphe au système E.*

3.2 La dualité systèmes/modèles.

Rappelons qu'un environnement ρ à valeurs dans $\mathcal{D} =_{def} (P(D), \subseteq)$ est une application partielle de V dans $\mathcal{D}$. Toute fonction partielle de V dans $\mathcal{D}$ s'identifie avec la fonction totale de V dans $\mathcal{D}$ qui prend la valeur $\bot = \emptyset$ en dehors du domaine de définition initial. Appelons *support* de $\rho \in \mathcal{D}^V$ l'ensemble des $x \in V$ tels que $\rho(x) \neq \emptyset$. Modulo ces identifications, un contexte Γ s'identifie avec un environnement à support fini et à valeurs finies, c'est-à-dire à un compact du domaine $\mathcal{D}^V$. Il en résulte que tout environnement ρ est le sup filtrant de l'ensemble des Γ tels que $\Gamma \sqsubseteq \rho$, au sens de : pour toute variable $x \in V$ on a $\Gamma(x) \subseteq \rho(x)$ (cf. Chapitre 6). Par ailleurs $|t|_\Gamma^{\mathcal{G}}$ a maintenant un sens.

Théorème 5 ***"de dualité".*** *Pour tout $t \in \Lambda$ on a*

$$\forall\Gamma\forall\alpha \quad \Gamma \vdash_W t : \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in |t|_\Gamma^{\mathcal{G}}$$

où $\mathcal{G}$ est le modèle de graphe engendré par W.

Démonstration. C'est essentiellement une trivialité.
On commence par remarquer que, si l'assertion est vraie pour un terme t, alors la version où l'on remplace α par a (et $\in$ par $\subseteq$) est vraie aussi. Ensuite on procède par induction sur t. Dans ce qui l'indice W et l'exposant $\mathcal{G}$ sont sous-entendus.
• Si $t \equiv x$ on a $\alpha \in |x|_\Gamma \Longleftrightarrow \alpha \in \Gamma(x) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash x : \alpha$.
• Si $t \equiv uv$ on a $\alpha \in |uv|_\Gamma \Longleftrightarrow \exists b \subseteq |v|_\Gamma \; (i(b,\alpha) \in |u|_\Gamma) \Longleftrightarrow \exists b \; (\Gamma \vdash u : i(b,\alpha) \; et \; \Gamma \vdash v : b)$, par hypothèse d'induction, ce qui, vu les règles, est équivalent à : $\Gamma \vdash uv : \alpha$.
• Si $t \equiv \lambda x.v$ on commence par supposer que $x \notin dom(\Gamma)$. On a ensuite $\alpha \in |\lambda x.v|_\Gamma \Longleftrightarrow \exists b,\beta \; (\alpha = i(b,\beta) \; et \; \beta \in |v|_{\Gamma[x:=b]}) \Longleftrightarrow \exists b,\beta \; (\alpha = i(b,\beta) \; et \; \Gamma[x := b] \vdash v : \beta)$ par hypothèse d'induction; comme $x \notin dom(\Gamma)$ on a $\Gamma[x := b] \equiv \Gamma, x : b$; la dernière assertion est donc équivalente à : $\Gamma \vdash \lambda x.v : \alpha$.

Corollaire 6 .
1. (système$\rightarrow$modèle) $\forall t \forall\Gamma\forall\alpha \quad \Gamma \vdash_W t : \alpha \Longleftrightarrow \forall\rho \sqsupseteq \Gamma \;\; \alpha \in |t|_\rho^{\mathcal{G}}$.
2. (modèle$\rightarrow$système) $\forall t \forall\rho\forall\alpha \quad \alpha \in |t|_\rho \Longleftrightarrow \exists\Gamma \sqsubseteq \rho \;\; \Gamma \vdash_W t : \alpha$.

Démonstration. Pour 1 utiliser la croissance de l'application $\rho \to |t|_\rho$.
1 et 2 sont essentiellement équivalents; le sens $\Leftarrow$ de 2 suit clairement du sens $\Rightarrow$ de 1; pour montrer $\Rightarrow$ de 2 il faut utiliser le sens $\Leftarrow$ de 1, la continuité de $\rho \to |t|_\rho$ et le fait que toute ρ est une union filtrante de contextes.

3.3 Systèmes engendrés par des paires partielles.

En fait il est possible plus généralement d'associer à toute paire partielle (P, j) un système que nous appellerons $S_{P,j}$, et dont il est évident que c'est une extension du Système E (plus précisément : de E_P). Rappelons que (P, j) est une paire partielle si j est une fonction partielle de $P^{fin} \times P$ dans P [Chapitre 7].
On verra dans la section suivante que $S_{P,j}$ est équivalent au système S_W, où $W =_{def} (D, i)$ est la complétion de (P, j).
En particulier $S_{(D,i)}$ est équivalent à S_W, si $W =_{def} (D, i)$. Les deux systèmes sont toutefois différents : ($S_{D,i}$ introduit des redondances par rapport à S_W).
L'intérêt des systèmes $S_{P,j}$ est que leur complexité ne dépend que de celle de (P, j). Si (P, j) est finie et simple, ou récursivement présentée de façon simple, on obtient donc une présentation alternative (et personnalisée) du système S_W, qui dépend (et ne dépend que) de (P, j). Mais dans l'étude générale qui suit les couples (P, j) sont quelconques, et peuvent en particulier être des paires totales, le système $S_{P,j}$ correspondant n'ayant alors guère d'intérêt, à titre individuel.

Les *types* de $S_{P,j}$ sont les éléments de F_P (comme pour le Système E). L'ensemble des types de $S_{P,j}$ ne dépend donc que de P. La définition des contextes et séquents est la même que pour E.

Les *axiomes et règles* sont celles du Système E plus deux règles qui dépendent de j et qui complètent respectivement les règles de $\to$-intro et $\to$-élim.

• 1. *axiome*	$\alpha \in \Gamma(x)$	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} x : \alpha$
• 2. $\to$ *−intro*	$\Gamma, x : a \vdash_{(P,j)} v : \alpha$	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} \lambda x.v : a \to \alpha$
• 3. $\leftarrow$ *−élim*	$\left.\begin{array}{l}\Gamma \vdash_{(P,j)} u : a \to \beta \\ \Gamma \vdash_{(P,j)} v : a\end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} (u)v : \beta$
• 4. pour tous $(a, \alpha) \in dom(j)$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} t : j(a, \alpha)$	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} t : a \to \alpha.$
• 5. pour tous $(a, \alpha) \in dom(j)$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} t : a \to \alpha$	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash_{(P,j)} t : j(a, \alpha)$

Exemple 7 *Pour $j = \emptyset$ on a exactement le Système E ; dans les autres cas on a une extension propre de E.*

Exemple 8 *Si $j =_{def} \{ ((\emptyset, p), p) \,/\, p \in P \}$ les règles supplémentaires se résument en :*

- $4, 5.$ $\Gamma \vdash t : \emptyset \to p \Longleftrightarrow \Gamma \vdash t : p$ *pour tout* $p \in P$.

Exemple 9 *Si $j =_{def} \{ ((\{p\}, p), p) \,/\, p \in P \}$ les règles supplémentaires se résument en :*

- $4, 5.$ $\Gamma \vdash t : \{p\} \to p \Longleftrightarrow \Gamma \vdash t : p$ *pour tout* $p \in P$.

3.4 Equivalence entre les deux familles de systèmes.

Supposons que $W =_{def} (D, i)$ soit la complétion de la paire partielle (P, j). Alors D a une définition inductive qui le construit comme la plus petite solution de l'équation ensembliste $D = P \cup ((D^{fin} \times D) - dom(j))$, et $i : D^{fin} \times D \to D$ est définie par $i(a, \alpha) = j(a, \alpha) \in P$ si $(a, \alpha) \in dom(j)$ et $i(a, \alpha) =_{def} (a, \alpha)$ sinon. En particulier une paire totale est sa propre complétion.

Notation 10 *On définit inductivement :*
$e : D \to F$ *par* $e(p) =_{def} p$ *et* $e((a, \alpha)) =_{def} e^\bullet(a) \to e(\alpha)$.
$\pi : F \to D$ *par :* $\pi(p) =_{def} p$ *et* $\pi(a \to \alpha) =_{def} i(\pi^\bullet(a), \pi(\alpha))$.

Lemme 11 $\pi \circ e = id_D$. *En particulier* π *est surjective et* e *est injective.*

Preuve. On montre facilement $\pi(e(\alpha)) = \alpha$, par induction sur le rang de α.

A titre de curiosité on pourra vérifier que π est toujours un morphisme (surjectif) de trames de $(F, \to)$ sur (D, i), mais que e n'en est un que dans le cas où $dom(j) = \emptyset$, c'est-à-dire si (D, i) est la trame du modèle d'Engeler $\mathcal{E}$.

Proposition 12 *Soit* $W =_{def} (D, i)$ *la complétion de* (P, j). *Pour tout terme* $t \in \Lambda$, *et pour tous* $\alpha \in D$ *et tout contexte* Γ *de* S_W *on a :*

$$\Gamma \vdash_W t : \alpha \iff e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} t : e(\alpha).$$

Remarque 13 *Si* (P, j) *est totale (i.e. si* j *est une fonction totale de* $P^{fin} \times P$ *dans* P*), alors* $D = P$ *et* $i = j$. *Dans ce cas l'énoncé de la Proposition dit simplement que* $F_D - D$ *et* $\to$ *sont inutiles.*

Corollaire 14 *Le théorème de dualité s'exprime aussi via les systèmes* $S_{P,j}$.

Preuve de la Proposition. C'est une conséquence facile des deux implications suivantes et du fait que $\pi \circ e = id_D$.
1. $\Gamma \vdash_{(P,j)} t : \alpha \;\Rightarrow\; \pi^\bullet \circ \Gamma \vdash_W t : \pi(\alpha)$.
2. $\Gamma \vdash_W t : \alpha \;\Longrightarrow\; e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} t : e(\alpha)$.
• Montrons 1. Par induction sur la dérivation du séquent $\Gamma \vdash_{(P,j)} t : \alpha$, en regardant quelle est la dernière règle utilisée (5 possibilités). Si le séquent est un axiome c'est évident. Si c'est une règle 2 ou 3 on applique l'induction de façon triviale.

Dans le cas des règles 4 ou 5 on commence par remarquer que pour tous $(b, \beta) \in dom(j)$ on a : $\pi(b \to \beta) =_{def} i(\pi^\bullet(b), \pi(\beta)) = i(b, \beta) =_{def} j(b, \beta) \equiv \alpha = \pi(\alpha) \equiv \pi(j(b, \beta))$.

Si c'est la règle 4 alors $\alpha \equiv j(b, \beta)$ avec $(b, \beta) \in dom(j)$ et à l'étape précédente on avait $\Gamma \vdash_{(P,j)} t : j(b, \beta)$. Par hypothèse d'induction on a $\pi^\bullet \circ \Gamma \vdash_W t : \pi(j(b, \beta))$, donc $\pi^\bullet \circ \Gamma \vdash_W t : \pi(\alpha)$ par la remarque précédente.

Si c'est la règle 5 alors $\alpha \equiv j(b, \beta)$ avec $(b, \beta) \in dom(j)$ et à l'étape précédente on avait $\Gamma \vdash_{(P,j)} t : b \to \beta$. Par hypothèse d'induction on a $\pi^\bullet \circ \Gamma \vdash_W t : \pi(b \to \beta)$ donc $\pi^\bullet \circ \Gamma \vdash_W t : \pi(\alpha)$ par la même remarque.
• Montrons 2. Par induction sur la dérivation du séquent $\Gamma \vdash_W t : \alpha$, en regardant quelle est la dernière règle utilisée (3 possibilités). Si le séquent est

un axiome c'est évident. Si c'est une règle 2 alors $t \equiv \lambda x.v$ et $\alpha = i(b,\beta)$, et à l'étape précédente on avait $\Gamma, x : b \vdash v : \beta$. Par hypothèse d'induction $e^\bullet \circ \Gamma$, x : $e^\bullet(b) \vdash_{(P,j)} v : e(\beta)$, donc $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} \lambda x.v : e^\bullet(b) \rightarrow e(\boldsymbol{\beta})$. Il faut alors distinguer deux cas. Si $(b,\beta) \notin dom(j)$ alors $(b,\beta) \in D$ et $i(b,\beta) =_{def} (b,\beta) = \alpha$; dans ce cas on a donc $e^\bullet(b) \rightarrow e(\beta) =_{def} e((b,\beta)) = e(\alpha)$. Si $(b,\beta) \in dom(j)$ alors : $\alpha = i(b,\beta) =_{def} j(b,\beta) \in P$ et donc $\alpha = e(\alpha)$; par ailleurs $b \subseteq P$ et $\beta \in P$ donc $e^\bullet(b) \rightarrow e(\boldsymbol{\beta}) = b \rightarrow \beta$. Par la règle 5 de $S_{P,j}$ on a donc $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} \lambda x.v : j(b,\beta)$, soit $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} t : e(\alpha)$.

Si c'est la règle 3, alors $t \equiv uv$ et il existe a tel que $\Gamma \vdash_W u : i(a,\alpha)$ et $\Gamma \vdash_W v : a$. Par hypothèse d'induction $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} u : e(i(a,\alpha))$ et $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{P,j} v : e^\bullet(a)$. Si $(a,\alpha) \in dom(j)$ alors $a \subseteq P$ donc $e^\bullet(a) = a$ de plus $i(a,\alpha) =_{def} j(a,\alpha) \in P$ et $e(i(a,\alpha)) = j(a,\alpha)$. Par la règle 4 de $S_{P,j}$ on a $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} u : a \rightarrow \alpha$ et donc $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} uv : \alpha$. Comme $\alpha \in P$ dans ce cas, on a bien $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} t : e(\alpha)$. Si $(a,\alpha) \notin dom(j)$, alors $i(a,\alpha) =_{def} (a,\alpha)$ et $e(i(a,\alpha)) = e((a,\alpha)) =_{def} e^\bullet(a) \rightarrow e(\alpha)$. On en déduit directement que $e^\bullet \circ \Gamma \vdash_{(P,j)} t : e(\alpha)$, puisque $t \equiv uv$.

3.5 Application : sensibilité de certains modèles.

Encore une fois, il n'est pas nécessaire de passer par le système de typage pour développer les arguments qui suivent (cf. [3]), mais dans la mesure ou nous avons fait l'étude du système E dans le Chapitre 4 de ce cours, nous allons exploiter le travail déja fait. Rappelons qu'un modèle $\mathcal{M}$ est *sensible* si il égalise tous les termes non résolubles.

Lemme 15 *Tout système S_W, tout système $S_{P,j}$ type tous les termes résolubles.*

Preuve. Il suffit de le voir pour les systèmes $S_{P,j}$, pour lesquels c'est évident puisqu'il s'agit d'extension de E.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème de dualité (Théorème 5).

Proposition 16 *Si S_W ne type que les termes résolubles, alors le modèle de graphe associé interprète tous les termes non résolubles par $\emptyset$, et est donc sensible.*

Corollaire 17 *Le modèle d'Engeler est sensible et interprète tous les termes (clos) non résolubles (et seulement eux) par $\emptyset$.*

Lemme 18 *Le système $S_{P,j}$, où $j =_{def} \{ ((\emptyset,p), p) \,/\, p \in P \}$ ne type que les termes résolubles.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'on peut étendre à $S_{P,j}$ la preuve de réductibilité qui permettait de montrer que tout terme typable dans le système E était normalisable de tête. Pour pouvoir étendre cet argument il est nécessaire et suffisant de pouvoir interpréter les atomes par des ensembles $I(p) \in P^{sat}(N^h/N_h^0)$ tels $I(p) = \Lambda \rightarrow I(p)$. Ceci revient à chercher des points fixes de la fonction ensembliste $H(X) = \Lambda \rightarrow X$ dans l'ensemble $Q = P^{sat}(N_h/N_h^0)$. Or Q est un treillis complet, la fonction H est croissante sur $P(\Lambda)$ et elle opère sur Q, elle admet donc des points fixes dans Q (cf. Chapitre 6), ce qui permet de faire une interprétation adéquate des formules du système.

Corollaire 19 *Tous les modèles $\mathcal{P}_P$ sont sensibles et interprètent tous les termes non résolubles par $\emptyset$. Il en est de même pour tous les modèles isomorphes, et en particulier pour le modèle P_ω, qui est isomorphe à $\mathcal{P}_{\{p\}}$.*

Généralité de la méthode. La méthode s'applique à tous les modèles qu'on peut engendrer par des "paires partielles positives" au sens de [3], ce qui couvre énormément de modèles. Nous ne donnerons pas ici la définition technique de paire partielle positive, mais intuitivement il s'agit de couples (P, j) tels qu'il existe une énumération de P sous forme d'une suite $\bar{p}$ (mettons finie ou dénombrable) et une fonction $\bar{h} : \overline{F_P} \to \overline{F_P}$ telle que $\bar{p} = \bar{h}(\bar{p})$ et telle que de plus l'interprétation ensembliste de $\bar{h}$, soit $\bar{H} : \overline{P(\Lambda)} \to \overline{P(\Lambda)}$ ait un point fixe dans $\bar{Q}$. Notons que $\bar{p} = \bar{h}(\bar{p})$ se présente comme un système d'équations.

Deux cas particuliers importants (qui couvrent chacun beaucoup de modèles) sont les cas où :

1. H est croissante en tous ses arguments.

2. Le système $\bar{p} = \bar{h}(\bar{p})$ est "triangulaire", c'est à dire de la forme $p_n = k_n(\bar{p}_n)$, où $\bar{p}_n$ désigne la suite des n premiers éléments de $\bar{p}$, et les interprétations ensemblistes des k_n , soit $K_n : P(\Lambda)^n \to P(\Lambda)$ sont croissantes en leur dernier argument (on est alors en mesure d'interpréter successivement p_1, puis p_2, etc....).

Exemple 20 *$\mathcal{E}$ correspond au cas où $\bar{h}$ est l'identité (le système est l'ensemble d'équations $p_i = p_i$). On a alors toute liberté pour interpréter les p_i.*

Exemple 21 *$\mathcal{P}_P$ correspond au système d'équations $p_i = \emptyset \to p_i$ ($0 \leq i < card(P)$).*

Exemple 22 *Le système ($p_0 = p_0$ et) $p_i = (p_i \to p_0) \to p_i$, pour $1 \leq i < card(P)$, correspond à une paire partielle positive.*

Exemple 23 *Le système ($p_0 = p_0$ et) $p_{i+1} = (p_i \to p_i) \to p_{i+1}$, $0 \leq i < card(P)$, correspond à une paire partielle positive.*

Application. On peut ainsi engendrer 2^ω modèles de graphes sensibles non isomorphes. Il est en revanche ouvert de savoir si cette méthode peut produire 2^ω modèles avec des théories équationnelles différentes.

4 Généralisation aux K-modèles.

4.1 Les systèmes S_W et S_W^-.

Nous nous interessons cette fois aux trames $W =_{def} (D, i, \leq)$ de K-modèles : (D, i) est comme dans la Section 3.1, et $\leq$ est un préordre sur D compatible avec i au sens que $i(a, \alpha) \leq i(b, \beta) \Longrightarrow (b \subseteq\downarrow a$ et $\alpha \leq \beta)$ (condition que nous avons notée C_β au Chapitre 7).

Notation 24 $W^- =_{def} (D, i)$.

Etant donnée une trame $W =_{def} (D, i, \leq)$ comme ci-dessus, le système S_W s'obtient en ajoutant au système S_{W^-} une règle de sous-typage faisant intervenir le préordre. Ainsi :

Les *types* de S_W sont les éléments de D.
Les *contextes* sont les expressions Γ de la forme $\bar{x} : \bar{a}$ avec les x_i distinctes et les a_i dans D^{fin}.
Les *séquents* sont les expressions de la forme $\Gamma \vdash_W t : \alpha$, avec $t \in \Lambda$ et $\alpha \in D$.
$\Gamma \vdash_W t : a$ est une abréviation pour : $\forall \alpha \in a \;\; \Gamma \vdash_W t : \alpha$.

S*chémas de règles* :
- 1. axiome $\quad \alpha \in \Gamma(x) \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash_W x : \alpha$
- 2. $\rightarrow$-intro $\quad \Gamma, x : a \vdash_W v : \alpha \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash_W \lambda x.v : i(a, \alpha)$
- 3. $\leftarrow$-élim $\quad \left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash_W u : i(a, \beta) \\ \Gamma \vdash_W v : a \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash_W (u)v : \beta$
- 4. sous-typage $\quad \Gamma \vdash_W v : \alpha$ et $\alpha' \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash_W v : \alpha'$.

Les trois premières règles seront regroupées sous l'appellation de "*règles structurelles*".

Les propriétés basiques des systèmes S_W (Lemme 2) sont encore vraies ici.

La proposition suivante exprime que dans certains cas, qui couvrent en particulier les trames de tous les K-modèles extensionnels, et de tous les modèles de graphes, il suffit d'imposer la règle de sous typage aux variables.

Proposition 25 *Si $im(i) = \downarrow (im(i))$.et si i est croissante en son deuxième argument, alors le système précédent est équivalent au système S_W^- qui est obtenu à partir de S_{W^-} simplement en remplaçant le schéma d'axiomes par le schéma suivant :*
- $1^{\downarrow}$. *axiome* $\quad \alpha \in \downarrow (\Gamma(x)) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_W v : \alpha$.

Démonstration. Il suffit bien sûr de montrer que la règle complète de sous-typage est dérivable dans le système S_W^-. On est amené à montrer plus généralement qu'il est vrai dans S_W^- (comme pour S_W) que, pour tous t :
$\forall \alpha, \alpha', \Gamma, \Gamma' \,(\, (\alpha' \leq \alpha$ et $\Gamma \sqsubseteq \Gamma'$ et $\Gamma \vdash t : \alpha) \Longrightarrow \Gamma' \vdash t : \alpha'\,)$.
La démonstration se fait par induction sur t, au fil de la plume ; l'hypothèse $im(i) = \downarrow (im(i))$ est utilisée quand t est une abstraction, et l'hypothèse de croissance de i dans le cas où t est une application.

Remarque 26 *Si le préordre est l'égalité (cas des modèles de graphes) les deux conditions sont vérifiées. Si i est bijective (cas de P_ω) ou plus généralement si tout élément de D est équivalent à un élément de $im(i)$ pour le préordre (cas des modèles extensionnels) alors la première condition est vérifiée. Dans le cas des modèles extensionnels la seconde l'est également.*

4.2 La dualité systèmes/modèles.

Le théorème de dualité que nous allons montrer maintenant est valable pour tous les systèmes S_W sans exception, et donc aussi pour tous les systèmes S_W^- qui rentrent dans le cadre de la Proposition 25.

Rappelons que le K-modèle $\mathcal{K}$ engendré par W a pour domaine sous-jacent $\mathcal{D} =_{def} (S(D), \subseteq)$, où $S(D)$ est l'ensemble des segments initiaux de $(D, \leq)$. Dans ce cadre on a que tout environnement ρ est le sup filtrant de l'ensemble des environnements $\downarrow \circ\Gamma$ tels que $\forall x\, (\Gamma(x) \subseteq \rho(x))$.

Théorème 27 ***"de dualité".*** *Pour tout $t \in \Lambda$ on a*

$$\forall\Gamma\forall\alpha \quad \Gamma \vdash_W t : \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in |t|^{\mathcal{K}}_{\downarrow\circ\Gamma}$$

où $\mathcal{K}$ est le $K-$modèle engendré par W.

Démonstration. Au fil de la plume, par induction sur la complexité de t, et en remarquant que si l'assertion est vraie pour un terme t, alors la version où l'on remplace α par a (et $\in$ par $\subseteq$) est vraie aussi. Dans la démonstration qui suit l'exposant $\mathcal{K}$ et l'indice W sont sous-entendus.
• Si $t \equiv x$ on a $\alpha \in |x|_{\downarrow\circ\Gamma} \Longleftrightarrow \alpha \in \downarrow \circ\Gamma(x) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash x : \alpha$.
• Si $t \equiv uv$ on a $\alpha \in |uv|_{\downarrow\circ\Gamma} \Longleftrightarrow \exists\alpha' \geq \alpha\, \exists b \subseteq |v|_{\downarrow\circ\Gamma}\ (i(b, \alpha') \in |u|_{\downarrow\circ\Gamma}) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \exists\alpha' \geq \alpha\exists b\ (\Gamma \vdash u : i(b, \alpha')\ et\ \Gamma \vdash v : b)$ (hypothèse d'induction).
La dernière assertion implique clairement $\Gamma \vdash uv : \alpha$.
Réciproquement, si on suppose $\Gamma \vdash uv : \alpha$ et si l'on regarde la dernière règle structurelle utilisée pour dériver ce séquent, c'est nécessairement une $\rightarrow$-élimination dont la conclusion est de la forme $\Gamma \vdash uv : \alpha'$ pour un $\alpha' \geq \alpha$, ce qui permet de remonter la suite d'équivalences ci-dessus jusqu'à $\alpha \in |uv|_{\downarrow\circ\Gamma}$.
• Si $t \equiv \lambda x.v$ on commence par supposer que $x \notin dom(\Gamma)$. On a ensuite $\alpha \in |\lambda x.v|_{\downarrow\circ\Gamma} \Longleftrightarrow \exists b, \beta\ (\alpha \leq i(b, \beta)\ et\ \beta \in |v|_{\downarrow\circ\Gamma[x:=\downarrow b]}) \Longleftrightarrow \exists b, \beta\ (\alpha \leq i(b, \beta)\ et\ \Gamma[x := b] \vdash v : \beta)$ par hypothèse d'induction; comme $x \notin dom(\Gamma)$ on a $\Gamma[x := b] \equiv \Gamma, x : b$. La dernière assertion est donc équivalente à : $\exists b, \beta\ (\alpha \leq i(b, \beta)\ et\ \Gamma \vdash \lambda x.v : i(b, \beta))$ et donc à $\Gamma \vdash \lambda x.v : \alpha$.

On en déduit des **corollaires** analogues à ceux de la Section 3.1, qu'on laissera au lecteur le soin d'expliciter.

4.3 Complétions, réductibilité, etc.

On pourrait également dans ce cadre associer des systèmes à chaque K-trame partielle $(P, j, \prec)$, et montrer des théorèmes d'équivalence entres systèmes S_W, S_W^-, $S_{P,j,\prec}$. La réductibilité s'étend à ce cadre et ses applications aussi ; il faut juste forcer les interprétations I à respecter le préordre en ce sens que $p \prec q$ doit impliquer $I(q) \subseteq I(p)$. Il existe des théorèmes de transfert des systèmes duaux des modèles de graphes aux systèmes duaux des K-modèles (à améliorer). En particulier on peut montrer facilement la sensibilité de $\mathcal{D}_\infty$ directement avec la réductibilité sur le K-système correspondant, ou la déduire de celle du modèle de graphe $\mathcal{P}_P$.

5 Généralisation aux autres modèles de trame.

Sémantique continue. On pourrait plus généralement traiter le cas des trames $W =_{def} (D, \frown\!\!\!\!\smile, \leq, i)$ de *pcs*-modèles. La seule différence étant que les a, b doivent cette fois parcourir D^{cohfin} (intuitivement, les conjonctions ne peuvent porter que sur des ensembles de formules cohérents, ou "compatibles").

Sémantique stable. On pourrait parallèlement développer une théorie semblable pour les pcs-modèles de la sémantique stable. Ici il faut de plus choisir entre : soit compliquer les règles de $\rightarrow$-intro et $\rightarrow$-élim de manière à refléter la condition de minimalité qui apparaît dans les traces stables, soit réduire drastiquement le schéma d'axiomes à : $x : \{\alpha\} \vdash x : \alpha$ et modifier très légèrement les autres règles. C'est cette dernière option qui est choisie et développée dans [4]. La dernière assertion du Lemme 2 est fausse dans les deux options, et les deux premières sont également fausses dans la deuxième.

6 Notes bibliographiques.

Le lecteur interessé pourra revoir les Notes bibliographiques du Chapitre 4, pour les références les plus classiques sur les systèmes de type avec intersection (sémantique continue/ modèles de filtres). Un système relatif à la sémantique stable (cohérente) est présenté dans [4]. Il trouvera dans [3] des références plus exhaustives sur les articles traitant de la dualité modèles/systèmes. Les généralisations évoquées ici sont sont traitées dans [3] (du point de vue des modèles). On trouvera aussi dans cet article une comparaison plus approfondie entre modèles de filtres et pcs-modèles.

Références

[1] H. Barendregt, M. Coppo and M. Dezani-Ciancaglini, A filter-model and the completeness of type-assignment, JSL vol.48 (4), pp. 931-940, 1983.

[2] M. Coppo, M. Dezani-Ciangaglini, F. Honsell, and G. Longo. Extended type structures and filter λ-models, In G. Longo, G. Lolli and A. Marcja, editors, Logic Colloquium'82, p.241-262, Elsevier Science Publishers, 1984.

[3] C. Berline, From computation to foundations, the lambda-calculus and its webbed models, TCS 249 (2000) p. 81-161.

[4] F. Honsell et S. Ronchi della Rocca, Reasoning abour interpretations in qualitative λ-models, in : M. Broy, C. Jones (eds), Proc. IFIP Conf. on Programming concepts and methods, North-Holland, Amsterdam 1990, pp.505-521.