Cours de λ-calcul.*

CHAPITRE 7. Constructions de modèles †
et remarques sur leurs théories.

Ch. Berline

Table des matières

*DEA de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique (2000-2001), UFR de Mathématique, Université Paris 7.

†Version provisoire du 30 Mars 2001

1 Introduction.

Les modèles que nous étudions dans ce chapitre sont présentés en partant du plus simple, le modèle d'Engeler, sur lequel nous nous attarderons car il est aussi, en un sens, paradigmatique. Nous allons toutefois survoler auparavant les traits communs de tous les modèles que nous présenterons dans ce chapitre.

Chacun de ces modèles sera engendré à partir d'une *trame* (W, i), où $W =_{def} (D, \smallfrown, \preceq)$ est, dans le cas le plus général, un pcs [1]. W engendre le domaine $\mathcal{D} \equiv \mathcal{S}(W) =_{def} (S^{coh}(D), \subseteq)$, où $S^{coh}(D)$ est l'ensemble des segments initiaux cohérents de W. Quant à i, c'est une injection de $D^{coh,fin} \times D$ dans D (où $D^{coh,fin}$ désigne l'ensemble des parties finies cohérentes de D), qui est compatible avec les relations précédentes, en un sens à préciser et qui dépendra du fait qu'on est en sémantique continue ou stable. Le rôle de i est de permettre l'encodage dans D des traces des fonctions de $\mathcal{D}$. La paire (W, i) engendre ainsi un domaine reflexif $\mathcal{M} =_{def} (\mathcal{D}, \lambda, A)$ avec $\lambda =_{def} \downarrow \circ i^{\bullet} \circ Tr$ et $A =_{def} Tr^{-1} \circ \downarrow \circ i^{\bullet -}$ ([2]) Dans un tel modèle λ et A sont nécessairement additives (car composées de 3 fonctions additives). Dans le cas de la sémantique stable la trace utilisée est Tr_s et A et λ sont stables.

Dans le cas du modèle d'Engeler les relations sont triviales, $\mathcal{D} = P(D)$ avec D tel que $D^{fin} \times D \subseteq D$, on prend pour i l'inclusion et $\lambda = Tr$.

La plupart de ces modèles admettent des versions paresseuses (c'est à dire des versions qui sont modèles du λ-calcul paresseux, en un sens qui serait à préciser), et qui sont obtenus en variant légèrement la définition de λ [3].

Puisque nous travaillons uniquement avec des domaines engendrés par des pcs, la définition de la trace que nous utilisons est la version simplifiée qui est valide dans ce cadre, à savoir $Tr(f) = \{ (a, \alpha) \in D^{cohfin} \times D \,/\, \alpha \in f(\downarrow a) \}$ pour la sémantique continue ; dans le cas stable on exige de plus la minimalité de $\downarrow a$ (ou *de* a si le préordre est trivial).

Notation 1 *Comme dans le chapitre précédent les lettres α, β, etc. dénoteront des éléments de D, et les lettres a, b etc. des parties finies de D (c'est-à-dire des éléments de D^{fin}) et enfin les éléments de $\mathcal{D}$ seront notés d, d'. On notera $a \subseteq_{fin} d'$ pour dire que a est un sous-ensemble fini de $d \in P(D)$.*
$i(\bar{a}, \alpha)$ est une abbréviation pour : α si $l(\bar{a}) = 0$, et $i(a_1, i(.., i(a_n, \alpha)..))$ si $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ et $l(\bar{a}) \geq 1$; si $(\bar{a}, \alpha)$ correspond au cas où i est l'inclusion.
Nous désignerons par $\leq^{fin}$ le préordre sur D^{cohfin} défini par : $a \leq b$ ssi $\downarrow a \subseteq \downarrow b$ ssi $a \subseteq \downarrow b$.

[1] Rappelons qu'un *pcs* $(D, \smallfrown, \preceq)$ est un ensemble muni d'un préordre et d'une relation de cohérence compatibles, qui peuvent d'ailleurs être triviales.

[2] Rappelons que, pour une fonction $f : E \to E'$ quelconque, $f^{\bullet}$ désigne la fonction définie sur $P(E)$ par $f^{\bullet}(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$ et $f^{\bullet -}$ est la fonction définie sur $P(E')$ par $f^{\bullet -}(B) = \{ x \,/\, f(x) \in B \}$. Ces fonctions commutent à toutes les unions et, si f est injective, à toutes les intersections.

[3] Cf. [Ber].

2 Le modèle d'Engeler-Plotkin.

L'idée derrière le modèle d'Engeler (dû indépendamment à Plotkin) est simple : $\mathcal{D} =_{def} (P(D), \subseteq)$ et l'ensemble D est choisi de manière que $D^{fin} \times D \subseteq D$, de sorte que la trace de toute fonction continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{D}$. Pour construire un tel D on part d'un ensemble P non vide quelconque, ne contenant pas de paires, et on construit inductivement le plus petit ensemble D tel que :

$$D = P \cup (D^{fin} \times D)$$

en prenant $D = \cup D_n$, avec $D_0 = \emptyset$ et $D_{n+1} = P \cup (D_n^{fin} \times D_n)$.
Le *rang* de $\alpha \in D$ est par définition le plus petit entier n tel que $\alpha \in D_n$, le rang de a est défini comme le plus grand des rangs des éléments de a (0 si a est vide).

Dfinition 2 *"Le" modèle d'Engeler est le triplet* $\mathcal{E} \equiv (\mathcal{D}, \lambda, A)$, *avec* $\mathcal{D} =_{def} (P(D), \subseteq)$ *et* D *comme ci-dessus. On prend* $\lambda =_{def} Tr$, *tandis que* A *est définie par :*

$$A(d)(d') \equiv d.d' =_{def} \{\alpha \in D \ / \ \exists\ a \subseteq_{fin} d'\ (a, \alpha) \in d\} \tag{1}$$

Ainsi, pour toute fonction continue de $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{D}$ *on a :*

$$\lambda(h) =_{def} \{(a, \alpha) \ / \ \alpha \in h(a)\}$$

On sait déja que Tr, et donc λ, est continue (et même additive). Il est facile de vérifier que $A(d)$ est continue pour tout d, que A est continue (et même additive[4]), et que $A \circ \lambda = id$.

Remarque 3 *Tout élément de* D *s'écrit, de manière unique, sous la forme* $(\bar{a}, p)$, *avec* $p \in P$ *.*

Remarque 4 $|\lambda\bar{x}.t| = \left\{(\bar{a}, \alpha) \ / \ l(\bar{a}) = l(\bar{x}) \ \textit{et}\ \alpha \in |t|_{[\bar{x}:=\bar{a}]}\right\}$

Exemple 5 *Dans le modèle d'Engeler on a :*
$|I| = \{\, (a, \alpha) \ / \ \alpha \in a\}$; $|K| = \{\, (a, (b, \alpha)) \,/\, \alpha \in a \,\}$;
$|\varepsilon| \equiv |\lambda x \lambda y.xy| = \{\, (a, (b, \alpha)) \,/\, \exists b' \subseteq b \ (b', \alpha) \in a \,\}$
$|\delta| \equiv |\lambda x.xx| = \{(a, \alpha) \,/\, \alpha \in a.a\,\}$
$|\Omega| = \emptyset$ *et* $|\lambda x_1 ... x_n.\Omega| = \emptyset$ *et* $|\Omega t|_\rho = \emptyset$ *pour tout* t.

Preuve de la dernière ligne :
$|\Omega| \equiv |\delta\delta| \equiv \{\, \alpha \,/\, \exists a \subseteq |\delta| \ \ (a, \alpha) \in |\delta|\,\} = \{\, \alpha \,/\, \exists a \subseteq |\delta| \ \ \alpha \in a\,a\,\}$
$= \{\, \alpha \,/\, \exists a \subseteq |\delta| \ \exists a' \subseteq a \ (a', \alpha) \in a\,\}$.
Supposons qu'il y ait un tel α et choisissons $a \subseteq |\delta|$ minimal tel que $\alpha \in aa$, puis $a' \subseteq a$ tel que $(a', \alpha) \in a$. Puisque $a \subseteq |\delta|$ nous avons $\alpha \in a'a'$, donc $a' = a$ par minimalité de a. Ainsi $(a, \alpha) \in a$, ce qui est clairement impossible pour des raisons de rang. Les deux dernières assertions découlent de la première.

[4]mais $A(d)$ parcourt toutes les fonctions continues (puisque A est surjective) et pas seulement les additives !

Remarque 6 *Le modèle d'Engeler n'est pas extensionnel. En effet :* $(\{(\emptyset, \alpha)\}, \{\alpha\}, \alpha) \in |\varepsilon| - |I|$ *et* $(\{p\}, p) \in |I| - |\varepsilon|$ *si* $p \in P$.

Proposition 7 *Pour tout* $t \in \Lambda$, $\mathcal{E} \models t = \emptyset$ *si et seulement si* t *est non résoluble. En particulier* $\mathcal{E}$ *est sensible.*

Preuve. Le cas de ω pouvait se traiter directement. Pour traiter le cas général il est intéressant de faire appel à la technique de réductibilité. On pourrait développer cette méthode directement dans le modèle [5], mais comme nous avons déja montré que les termes typables dans le Système E étaient exactement les non résolubles, on peut aussi déduire ce résultat du fait que le Système E n'est rien d'autre qu'une description "logique" du modèle $\mathcal{E}$, comme nous le verrons au chapitre suivant.

Corollaire 8 *Il est consistant avec* $=_\beta$ *d'égaler tous les termes non résolubles.*

Il est intéressant de remarquer qu'il est en revanche inconsistant d'égaler tous les non normalisables, en effet toute λ-théorie qui contient $\lambda x.x\omega 1 = \lambda x.x\omega 0$ contient $1 = 0$.
En fait la théorie équationnelle de $\mathcal{E}$ est parfaitement connue (et indépendante de la cardinalité de P). On admettra le théorème suivant, pour lequel on rappelle que $BT(t)$ désigne l'arbre de Böhm de t.

Thorme 9 *Pour tous* $t, u \in \Lambda$, $\mathcal{E} \models t = u$ *ssi* $BT(t) = BT(u)$.

Corollaire 10 $\mathcal{E}$ *égalise tous les combinateurs de points fixe.*

En fait on peut montrer que $\mathcal{E}$ interprète tous les combinateurs de point fixe par le plus petit opérateur de point fixe du domaine $[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$, à savoir la fonction $\mathcal{Y} : [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$, définie par $\mathcal{Y}(f) = \cup_{n \in N} f^n(\emptyset)$ (il en résulte que $\mathcal{Y}$ est continue, ce qui se montre aussi directement).

3 Les modèles de graphes.

3.1 Définition et exemples.

Dfinition 11 *Un* modèle de graphes *est un triplet* $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{D}, \lambda, A)$, *engendré par une paire* (D, i), *où* D *est un ensemble non vide et* $i : D^{fin} \times D \to D$ *est une injection, de la manière suivante :*

$$\mathcal{D} =_{def} (P(D), \subseteq) \;\; et \;\; \lambda =_{def} i^{\bullet} \circ Tr$$

et l'application, et donc A, *est définie par :*

$$A(d)(d') \equiv d.d' =_{def} \{\alpha \in D \;/\; \exists\, a \subseteq_{fin} d' \;\, (i(a, \alpha) \in d)\}$$

Ainsi, pour toute fonction continue $h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$,

$$\lambda(h) =_{def} \{i(a, \alpha) \;/\; \alpha \in h(a)\}$$

[5] C'est cette démarche qui est suivie dans [Ber].

Puisque $i^\bullet$ et Tr sont additives, λ est additive, et donc continue. Il est aussi facile de vérifier que $A(d)$ est continue, que A est additive, et enfin que $A \circ \lambda = id$.
L'interprétation des termes dans un modèle de graphes est (formellement seulement) la même que dans $\mathcal{E}$: on change juste (a, α) en $i(a, \alpha)$.
En particulier il est facile de vérifier que $i(\{i(\emptyset, \alpha)\}, i(\{\alpha\}, \alpha)) \in |\varepsilon| - |I|$, ainsi : *aucun modèle de graphes n'est extensionnel.* Noter que $|I| \subset |\varepsilon|$ si (et seulement si) i est une bijection, ce qui est le cas pour le modèle P_ω ci-dessous.
Noter que D est nécessairement infini (de par l'existence de i, ou par l'argument général donné dans le chapitre précédent).

Exemple 12 "Le" modèle d'Engeler.

Exemple 13 Le modèle P_ω de Plotkin et Scott, version historique.
On prend $D = N$ et $i(a, \alpha) = \langle e(a), \alpha \rangle$, où $\langle\,,\,\rangle$ et e sont les codages classiques des couples et des parties finies de N, à savoir

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle &= (m+n)(m+n+1)/2 + n \\ e(a) &= \sum_{k \in a} 2^k \ \textit{si}\ a \neq \emptyset\ \textit{et}\ e(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

Noter que i est ici bijective.

Cette définition de P_ω était clairement liée aux arrière-pensées récursivistes de ses inventeurs. Nous étudierons ce modèle sous une présentation isomorphe, qui s'avère beaucoup plus naturelle du point de vue des systèmes de typage, et qui facilite l'étude de sa théorie. Elle permet aussi de voir le modèle $\mathcal{D}_\infty$ de Scott comme le modèle extensionnel canoniquement associé à P_ω et enfin de comparer les théories des deux modèles.

Exemple 14 Les modèles $\mathcal{P}_P$. *Comme pour le modèle d'Engeler la trame est définie de manière inductive : $D \equiv D_P$ est construit à partir d'un ensemble non vide P "d'atomes" de la manière suivante : $D = \cup_{n \in \omega} D_n$, avec $D_0 = P$ et $D_{n+1} = P \cup ((D_n^{fin} \times D_n) - (\{\emptyset\} \times P))$, et il est facile de vérifier que la suite est croissante et que*

$$D = P \cup ((D^{fin} \times D) - (\{\emptyset\} \times P)).$$

Le rang d'un élément α de D est le plus petit n tel que $\alpha \in D$. On définit i sur $D^{fin} \times D$ par :

$$\begin{aligned} i(a, \alpha) &= (a, \alpha)\ \textit{si}\ \ a \neq \emptyset\ \textit{ou}\ \alpha \notin P \\ i(\emptyset, \alpha) &= \alpha \quad\ \textit{si}\ \alpha \in P \end{aligned}$$

Tout élément $\alpha \in D_P$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha = i(\bar{a}, p),\ \textit{avec}\ p \in P,\ \textit{et}\ a_n \neq \emptyset\ \textit{si}\ n = l(\bar{a}) \geq 0$$

Nous préciserons dans la section suivante les rapports entre ces différents modèles.

Exemple 15 Les modèles $\mathcal{P}'_P$. *Ils sont définis comme précédemment sauf que D'_P est obtenue en excluant $\{\,(\{p\}, p)\,/\,p \in P\,\}$ au lieu de $\{\emptyset\} \times P$, et que l'on définit $i(a, \alpha) = (a, \alpha)$ si $\alpha \notin P$ ou $a \neq \{\alpha\}$ et $i(\{p\}, p) = p$ si $p \in P$.*

Les définitions de ces modèles soient formellement très proches, et, par exemple, tout élément α de D'_P s'écrit de manière unique $\alpha = i(\bar{a}, p)$, avec $p \in P$, et $a_n \neq \{p\}$ si $n = l(\bar{a}) \geq 0$. En revanche leurs propriétés, équationnelles par exemple, sont très différentes, comme nous le verrons bientôt. En particulier les modèles $\mathcal{P}_P$ sont sensibles et pas les modèles $\mathcal{P}'_P$, dans lesquels on a $|\omega| = P$ et $|\omega t|_\rho = P \cap |t|_\rho$.

Au contraire, le modèle $\mathcal{P}_\omega$ et le modèle $\mathcal{P}_{\{p\}}$, qui sont apparemment très différents, sont en fait isomorphes en un sens fort, comme nous allons le voir dans la section suivante, et ont donc exactement les mêmes propriétés.

3.2 Modèles de graphes isomorphes.

Dfinition 16 *Un* morphisme (de trames de) modèles de graphes *de (D, i) sur (D', i') est une fonction θ de D sur D' qui satisfait*

$$\forall (a, \alpha) \in D^{fin} \times D \;\; \theta(i(a, \alpha)) = i'(\theta^\bullet(a), \theta(\alpha))$$

θ est un isomorphisme *si elle est de plus bijective (et son inverse est alors également un morphisme).*

Il est clair que si θ est bijective alors $\theta^\bullet$ est un isomorphisme d'ordres partiels de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$, pour l'inclusion. C'est de plus, comme il est facile de le vérifier, un isomorphisme vis-à-vis de l'application ; en résumé c'est un isomorphisme entre les structures $(\mathcal{D}, \subseteq, .)$ et $(\mathcal{D}', \subseteq, .)$.[6]

Lemme 17 *Si θ est un isomorphisme de la trame de $\mathcal{G}$ sur celle de $\mathcal{G}'$, alors $Th(\mathcal{G}') = Th(\mathcal{G})$.*

Démonstration. Il est facile de montre par induction sur le terme $t \in \Lambda$ que, pour tout environnement ρ de V dans $\mathcal{G}$ dont le domaine contient les variables libres de t :

$$\theta^\bullet(|t|^{\mathcal{G}}_\rho) = |t|^{\mathcal{G}'}_{\theta^\bullet \circ \rho}$$

la première assertion découle alors rapidement du fait que tout environnement à valeurs dans $\mathcal{G}'$ est, du fait de la surjectivité de θ, de la forme $\theta^\bullet \circ \rho$ pour un ρ à valeurs dans $\mathcal{G}$, et la seconde en est une conséquence immédiate.

Lemme 18 *(Longo) $\mathcal{P}_{\{p\}}$ et le modèle de Plotkin et Scott P_ω sont isomorphes, en ce sens..*

Démonstration. Soit i_p l'injection correspondant au modèle $\mathcal{P}_{\{p\}}$, et i_ω l'injection correspondant à P_ω. Soit θ la fonction de $D_{\{p\}}$ sur N définie par induction sur le rang des éléments de $D_{\{p\}}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \theta(p) & = & 0 \\ \theta(a, \alpha) & = & i_\omega((\theta^\bullet(a), \theta(\alpha)) \text{ pour } (a, \alpha) \neq (\emptyset, p) \end{array}$$

[6] (En fait l'ordre est définissable, au premier ordre, à partir de la seule application [Plotkin, Kerth], ça nécessite un peu de travail et est valable dans un cadre nettement plus général).

Si $(a,\alpha) \neq (\emptyset,p)$ on a $i_p(a,\alpha) =_{def} (a,\alpha)$, et donc $\theta(i_p(a,\alpha)) = i_\omega((\theta^\bullet(a),\theta(\alpha))$ dans ce cas. Pour vérifier que θ est un morphisme il suffit donc de vérifier que : $\theta(i_p(\emptyset,p)) = i_\omega(\emptyset,\theta(p))$, ce qui résulte de ce que $i_p(\emptyset,p) =_{def} p$ et $\theta(p) = 0$ et $\langle e(\emptyset),0\rangle = 0$.
Il est facile de montrer par induction sur $rg(\alpha)$ que $\forall\beta \neq \alpha\ (\theta(\alpha) \neq \theta(\beta))$ (c'est clairement vrai si le rang est nul ; le pas de récurrence utilise aussi l'injectivité de i_ω), et aussi de montrer par induction sur l'entier $n \in N$ qu'il est dans l'image de θ (clair pour 0 ; le pas de récurrence utilise la surjectivité de i_ω).

Corollaire 19 $Th(\mathcal{P}_P) = Th(P_\omega)$.

Nous admettrons le théorème suivant.

Thorme 20 *(Longo 83)* $Th(\mathcal{E}) = Th(\mathcal{P}_P) = Th(P_\omega)$ $(= BT)$.

En particulier tous ces modèles égalisent tous les opérateurs de points fixes.

Il ne faudrait pas croire que tous les modèles de graphes ont la même théorie, ou des théories voisines : on peut en effet montrer que les modèles de graphes sont susceptibles de représenter 2^ω λ-théories distinctes (c'est à dire le nombre maximum de λ-théories possible, en cardinalité) [7]. En revanche il en omettent aussi 2^ω (par exemple parcequ'ils omettent toutes les λ_η-théories (c'est à dire les λ-théories extensionnelles). En fait il a été montré tout récemment [8] qu'il existait 2^ω théories qui n'étaient la théorie d'aucun modèle construit dans une sémantique fonctionnelle raisonnable (en gros : elles ne supportent pas les ordres partiels avec $\perp$!).

Dans les sections suivantes nous donnons deux méthodes générales permettant de construire des modèles de graphes, d'inspiration très différente. Les deux techniques permettent d'engendrer des paires (D,i), à partir d'un fragment (P,j). Dans le premier cas la génération de (D,i) se fait de manière récursive et certaines propriétés du modèle peuvent être induites par des propriétés combinatoires simples de (P,j). Ce n'est pas le cas pour la seconde méthode (forcing), qui est hautement non canonique et non récursive.

3.3 Complétion de paires partielles (P,j).

Dans cette section nous généralisons la construction de $\mathcal{E}$ et celle de $\mathcal{P}_P$, et expliquons comment compléter récursivement une paire partielle (P,j) en une trame (D,i) de modèle de graphes [9]. Cette méthode permet de construire une grande variété de modèles de graphes, et même de modèles de graphes sensibles. En revanche il n'est pas du tout clair, dans le cas sensible, qu'on puisse obtenir par ce biais 2^ω modèles avec des théories équationnelles différentes.

[7] R. Kerth, 1995
[8] A. Salibra, 2000.
[9] Ref. Longo 83, Kerth 85 et 94-3

Dfinition 21 *Une* paire partielle *est une paire* (P,j) *où* P *est un ensemble, et* $j : P^{fin} \times P \to P$ *est une injection partielle. Une* paire totale *est une paire partielle telle que* j *est totale,* (P,j) *est alors la trame d'un modèle de graphes. dans la suite* (D,i) *dénotera toujours une paire totale.*

Dfinition 22 Complétion des paires partielles. *A partir de toute paire partielle* (P,j) *on peut définir inductivement une paire totale, qu'on appellera sa* complétion. *On définit* D *comme la plus petite solution de l'équation ensembliste :*
$D = P \cup ((P^{<\omega}(D) \times D) - dom(j))$.
La complétion de (P,j) *peut en général être définie comme la paire* (D,i), *où* $i(a,\alpha) =_{def} j(a,\alpha)$ *si* $(a,\alpha) \in dom(j)$ *et* $i(a,\alpha) =_{def} (a,\alpha)$ *sinon* [10].

On définit alors de manière analogue à ce qui a été fait précédemment pour les exemples, une notion naturelle de *rang* pour les éléments de D, dans laquelle les éléments de P sont de rang 0.

Exemple 23 $\mathcal{E}$ *est la complétion de* $(P,\emptyset)$
$\mathcal{P}_P$ *est la complétion de* (P,j) *avec* $j(\emptyset,p) = p$ *pour tout* $p \in P$.
$\mathcal{P}'_P$ *est la complétion de* (P,j) *avec* $j(\{p\},p) = p$ *pour tout* $p \in P$.

Les paires partielles engendrant les deux premiers exemples font parties des paires *dites positives*, qui correspondent à des modèles (ou des systèmes d'intersection de types) auxquels on peut appliquer la technique de réductibilité, mais ce n'est pas le cas de la dernière paire, qui engendre d'ailleurs un modèle non sensible, comme nous l'avons vu.

3.4 Interprétation de termes résolubles et non résolubles dans un modèle de graphes.

Proposition 24 *L'interprétation d'un terme résoluble clos dans un modèle de graphes n'est jamais vide, en fait elle est toujours infinie.*

Démonstration. Si u est clos et résoluble, alors il existe $n \geq 0$ et $u_1, ..., u_n$ tels que $uu_1...u_n =_\beta I$. L'interprétation de I, et de tout terme β-équivalent à I , est infinie puisque c'est l'ensemble des $i(a,\alpha)$ tels que $\alpha \in a$ et que i est injective ; il ne reste plus qu'à remarquer que si $|(v)w|$ est infini alors il en est de même de $|v|$ (car i est injective).

En ce qui concerne l'interprétation des termes non résolubles la situation est complètement différente. Nous avons déja vu que dans $\mathcal{E}$ ils étaient tous interprétés par $\emptyset$ $(\perp)$, et que ce n'était pas le cas général. Nous allons bientôt voir qu'avec $\omega = \delta\delta$ tout peut se passer !

[10] Cette définition ne marche, en fait, que si $im(j) \cap [(P^{<\omega}(D) \times D) - dom(j)] = \emptyset$, puisque sinon i ne serait pas injective. Cette condition est trivialement vérifiée si P ne contient pas de paire. Si P contient des paires on se débrouille mais le processus de complétion est moins canonique.

Dans cette section et la suivante nous nous intéressons à l'interprétation de ω *dans un modèle de graphes quelconque* $\mathcal{G}_i$ de trame (D,i), *où* $\delta = \lambda x.xx$. On commence par deux remarques faciles.

Remarque 25 *(i)* $i(a,\alpha) \in \delta$ *ssi* $\alpha \in a.a$;
(ii) $\alpha \in uu$ *et* $u \subseteq \delta \implies \exists a \subseteq u$ ($i(a,\alpha) \in u$ *et* $\alpha \in a.a$).

Le lemme suivant nous offre une condition suffisante puis une condition nécessaire pour qu'un élément α de D soit dans ω .

Lemme 26 *(i) Si* $\alpha \in \omega$, *alors* $\exists a\ i(a,\alpha) \in a$.
(ii) Si il existe $\beta \in D$ *tel que* $i(\{\beta\},\alpha) = \beta$, *alors* $\alpha \in \omega$.

Démonstration. (ii) Par définition de l'application $\alpha \in \{\beta\}\{\beta\}$, donc i$(\{\beta\},\alpha) \in \delta$ (Remarque 25(i)), donc $\beta \in \delta$ et $\alpha \in \delta\delta = \omega$ (car $\{\beta\} \subseteq \delta$ et l'application est croissante).
(i) Si $\alpha \in \omega = \delta\delta$, alors :
$\exists a_1 \subseteq \delta$ ($i(a_1,\alpha) \in \delta$ et $\alpha \in a_1 a_1$) [Remarque 25(ii) avec $u = \delta$]
$\exists a_2 \subseteq a_1$ ($i(a_2,\alpha) \in a_1$ et $\alpha \in a_2 a_2$) [Remarque 25(ii) avec $u = a_1$]
....
$\exists a_{n+1} \subseteq a_n$ ($i(a_{n+1},\alpha) \in a_n$ et $\alpha \in a_{n+1}a_{n+1}$) [Remarque 25(ii) avec $u = a_n$]
Comme a_1 est fini la suite, qui est décroissante, stationne. Si $a_n = a_{n+1}$, alors $i(a_n,\alpha) \in a_n$.

Exercice 27 *(Baeten-Boerbom). Pour tout* $A \subseteq D$ *il existe un modèle de graphes* $\mathcal{G} = (D,i)$ *tel que* $|\omega| = A$.

Exercice 28 *Si un modèle est tel que* $|\omega| \neq \emptyset$, *alors* Y *n'est pas interprété par l'opérateur de plus petit point fixe du domaine sous-jacent.*

3.5 Forcing et facilité.

La technique de forcing, que nous présentons maintenant permet de construire des modèles de graphes non sensibles. En fait elle permet de forcer des éléments à rentrer dans l'interprétation de certains termes (semblables à ω, en un certain sens), et de forcer certaines équations. [Le lecteur intéressé trouvera des références complètes et d'autres résultats de forcing dans les sections 5.5 et 6.8 de [Ber]].

Termes faciles.

Dfinition 29 $u \in \Lambda^0$ *est* facile *si pour tout* $t \in \Lambda^0$ *l'équation* $t = u$ *est consistante avec* λ_β.

Du théorème de séparabilité des formes normales de têtes non semblables [11], qui implique en particulier qu'elles ne peuvent jamais être égalées dans un modèle non trivial du λ-calcul, on déduit aisément que :

[11] Deux formes normales de tête sont *semblables* si elles ont le même nombre d'abstractions de tête, la même variable de tête en supposant que les abstraction de tête portaient sur les mêmes variables dans le même ordre, et enfin le même nombre d'argument de la variable de tête.

Remarque 30 *Tout terme facile est non résoluble.*

Exercice 31 *Si u est facile, alors $(u)v$ est facile pour tout v clos.*

Le travail fait dans la la section suivante nous permettra de prouver sémantiquement que ω est facile (il existe aussi une démonstration syntaxique de ce fait).

La méthode de forcing. On suppose fixé un ensemble dénombrable D, une énumération de D et une énumération de $D^{fin} \times D$. Il est inutile de les préciser plus, tout ce dont nous aurons besoin étant de donner un sens à des expressions du genre : "le premier élément de D qui n'est pas tel que ...".
Etant maintenant donné un terme clos t il s'agit de construire une injection i telle que $\mathcal{G}_i \models \omega = t$, où $\mathcal{G}_i$ est lemodèle de graphes associé à (D, i). On construit i par approximations successives : plus exactement on construit par induction une suite (p_n) d'injections partielles de domaine fini, telle que $i = \cup p_n$ convienne, les fonctions étant assimilées à leurs graphes.
On construit simultanément une suite α_n d'éléments de $D \cup \{\uparrow\}$, où $\uparrow$ désigne l'indéfini, dont tous les éléments définis, c'est-à-dire $\neq\uparrow$, sont distincts. L'idée de la construction est de mettre progressivement dans l'interprétation de ω tous les les éléments $\alpha \in D$ qui sont forcés d'être dans l'interprétation de t

A partir de maintenant D est fixé, et donc aussi $\mathcal{D} = P(D)$ (pas i !). Etant donnés $t \in \Lambda$ et un environnement ρ on note $|t|^i_\rho$ l'interprétation de t dans le modèle $\mathcal{G}_i$ associé à (D, i).

Dfinition 32 *On appelle* condition de forcing *toute injection partielle p de $D^{fin} \times D$ dans D qui est de domaine fini. Etant donnés une condition p, un terme $t \in \Lambda$, un environnement ρ, dont le domaine contient les variables libres de t et un élément $\alpha \in D$, on dit que p* force $\alpha \in |t|_\rho$ *, et on note $p \Vdash \alpha \in |t|_\rho$ si pour toute injection (totale) $i : D^{fin} \times D \to D$ telle que $p \subseteq i$ on a $\alpha \in |t|^i_\rho$. Pour $t \in \Lambda^0$ on écrira simplement $p \Vdash \alpha \in t$.*

Lemme 33 *Pour tout terme clos t et tout environnement $\rho \in \mathcal{D}^V$, et toute i, si $\alpha \in |t|^i$, alors il existe $p \subseteq i$ tel que $p \Vdash \alpha \in t$.*

Démonstration. Par induction sur la complexité de $v \in \Lambda$ on montre :

$$\forall \rho \, \forall \alpha \, (\, \alpha \in |v|^i_\rho \Rightarrow \exists p \subseteq i \; p \Vdash \alpha \in |v|_\rho)$$

∘ Il est immédiat que $p = \emptyset$ convient si v est une variable.
∘ Si v est une application on utilise l'hypothèse d'induction et le fait que si p force quelque chose tout $p' \supseteq p$ en fait autant ;
∘ Si $v = \lambda y.u$ et $\alpha \in |v|^i_\rho$ alors on a $\alpha = i(a, \beta)$ pour un $\beta \in |u|^i_{\rho[y:=a]}$. L'hypothèse d'induction fournit un p tel que $p \Vdash \beta \in |u|_{\rho[y:=a]}$. Toute injection $j \supseteq p$ et telle que de plus $j(a, \beta) = \alpha$ sera telle que $\beta \in |u|^j_{\rho[y:=a]}$ et donc telle que $\alpha = j(a, \beta) \in |v|^j_\rho$; par conséquent $p \cup \{((a, \beta), \alpha)\} \Vdash \alpha \in |v|_\rho$.

Application à la facilité de ω.

Thorme 34 *(Baeten-Boerbom) Pour tout $t \in \Lambda^0$ il existe un modèle de graphes $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G} \models \omega = t$.*

On part de $p_0 = \emptyset$.
Supposons p_n construit, ainsi que $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$.
On prend pour α_n le premier élément de $\{\alpha \ / \ p_n \Vdash \alpha \in t\} - \{\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}\}$ si cet ensemble est non vide, et $\uparrow$ sinon.
Etape 1_n. Si $\alpha_n \in D$ on pose :

$$p'_n = p_n \cup \{((\{\beta_n\}, \alpha_n), \beta_n)\}$$

où β_n est le premier élément de D tel que :

$$\begin{array}{rcl}(\{\beta_n\}, \alpha_n) & \notin & dom(p_n) \text{ et} \\ \beta_n & \notin & im(p_n)\end{array}$$

l'existence de β_n étant assurée par la finitude du domaine et de l'image de p_n..
Si $\alpha_n \notin D$ on pose $p'_n = p_n$.
Etape 2_n. On pose :

$$p_{n+1} = p'_n \cup \{((a, \alpha), \gamma)\}$$

où (a, α) est le premier élément de$D^{fin} \times D - dom(p'_n)$ et γ est le premier élément de D qui n'est pas dans $a \cup im(p'_n)$.
La suite p_n est évidemment strictement croissante.
Il est clair que $i = \cup p_n$ est définie partout (grâce aux étapes 2.) et qu'elle est injective ; elle est d'ailleurs aussi surjective : en effet il y a une infinité de couples $(\emptyset, \delta)$, ces couples s'introduisent dans le domaine de i à une étape 2_n, et on leur donne pour image le premier élément de D qui n'est pas dans l'image de p'_n.
Il reste à voir que t et ω ont la même interprétation dans le modèle ainsi défini.
On montre que $|t|^i = |\omega|^i = A$, où A est l'ensemble des éléments α_n qui sont dans D.
∘ $A \subseteq |t|^i$ par définition des α_n.
∘ $A \subseteq |\omega|^i$ par le lemme 26 (i).
∘ $|\omega|^i \subseteq A$. Si $\alpha \in |\omega|^i$ alors il existe a tel que $a \to \alpha \in a$ (lemme 26 (ii)) ; (a, α) n'est donc pas arrivé dans le domaine de i à une étape 2., il est arrivé à une étape 1_n et α est le $\alpha_n \in D$ correspondant.
∘ Enfin si $\alpha \in |t|^i$, alors il existe une condition de forcing $p \subseteq i$ telle que $p \Vdash \alpha \in t$. Soit m tel que $p \subseteq p_m$; il est clair que $\forall k \geq m \ p_k \Vdash \alpha \in t$; vue la définition de A, si $\alpha \notin A$ alors tous les α_k, $k \geq m$, sont définis et ils sont tous antérieurs à α dans l'énumération de D, ce qui est une contradiction puisqu'ils sont distincts et en nombre infini.

Exercice. Pour les cas particuliers très simples tels $\omega = I$ ou K le lemme de forcing est immédiat, et la preuve s'exprime d'ailleurs facilement sans forcing.

3.6 Application aux extensions équationnelles de λ_β.

Il résulte en particulier de la section précédente que pour chaque forme normale de tête close t (*fnt*), il existe un modèle de graphe $\mathcal{G}_t$ qui satisfait $\omega = t$. Si t' est une fnt non semblable à t alors $\mathcal{G}_{t'}$ ne peut satisfaire $\omega = t$ à cause du lemme de séparation des formes normales de tête [12]. Deux tels modèles ont donc des théories équationnelles incompatibles. La même observation vaut avec les termes normaux non η-équivalents mais nécessite alors un recours au Théorème de Böhm, dont la démonstration est nettement plus difficile. Les modèles $\mathcal{G}_t$, t fnt, ne sont pas sensibles, ni même semi-sensibles; enfin l'interprétation de $|\omega|$ dans ces modèles est infinie car elle coincide avec l'interprétation d'un clos résoluble. *En résumé :*

Proposition 35 *Si E est un ensemble de fnt non semblables, les modèles de graphes $(\mathcal{G}_t)_{t\in E}$ sont non sensibles, non équationnellement équivalents, et sont tels que $|\omega|$ est infini.*

Il y a donc une infinité de théories de modèles de graphes, incompatibles. En fait on peut montrer qu'il en existe 2^ω [Kerth] (ce n'est pas trivial); on peut même montrer qu'il en existe 2^ω sensibles, mais là c'est carrément difficile (Kerth+David). Notons qu'on trouve une démonstration syntaxique intéressante de la proposition suivante, plus simple, dans [Barendregt].

Proposition 36 *Il existe 2^ω λ-théories sensibles.*

En tout cas du résultat sur la facilité de ω on peut tirer une démonstration sémantique simple du résultat suivant.

Proposition 37 *Il existe 2^ω λ-théories équationnelles incompatibles.*

Démonstration.
Il suffit de montrer que, pour toute suite $\bar{t} \equiv (t_n)_{n\in N} \in (\Lambda^0)^\omega$ l'ensemble d'équations

$$E_{\bar{t}} = \{\omega\underline{1} = t_1 \,, ..., \omega\underline{n} = t_n \,, ...\}$$

est consistant (sous-entendu : avec λ_β et l'inéquation $0 \neq 1$, puisque c'est une consistance non triviale qu'on exige d'une théorie équationnelle) et de faire varier $\bar{t}$ dans $\{0,1\}^\omega$; compte tenu du théorème de compacité (de Théorie des modèles) et de l'équivalence équationnelle entre le λ-calcul et la logique combinatoire (cf. [Bar] ou [Kri]) il suffit de montrer que tous les ensembles E_n qui contiennent les n premières équations, sont consistants. Il est clair que dès qu'un t_i est choisi résoluble (ce qui est le cas si il vaut 0 ou 1), la théorie correspondante est non semi-sensible.
Soit $Cond_n$ un terme clos tel que

$$\forall k \leq n \; \forall t_1, ..., t_n \in \Lambda \;\; Cond_n \, \underline{k} \, t_1 ... t_n \to_\beta t_k$$

Alors tout modèle qui satisfait $\omega = \lambda z.\, Cond_n \, z t_1 ... t_n$ est un modèle non trivial de E_n .

[12] Voir le Chapitre Séparabilité et Théorème de Böhm.

Il ne reste donc plus qu'à exhiber de tels $Cond_n$, par induction sur n .
Pour $n = 1$ on choisit :

$$Cond_1 \equiv 0 \equiv \lambda y.\lambda x_1.x_1$$

On fixe ensuite un terme clos $Comp$ tel que $(Comp)\underline{mm'}\rightarrow_\beta 1$ si $m \geq m'$ et $\rightarrow_\beta 0$ sinon, et on prend :

$$Cond_{n+1} = \lambda y.\lambda x_1 ... \lambda x_{n+1}.\,(Comp\ y\ \underline{n+1})\ x_{n+1}\ Cond_n\, yt_1...t_n$$

Généralisation aux théories récursivement énumérables.
Ce sont les théories dont les équations sont récursivement énumérable (après codage récursif des termes et des couples de termes dans N) ; c'est en particulier le cas pour les λ-théories dont les équations sont celles qui sont inférables à partir d'un ensemble récursif d'axiomes et de règles d'inférences, à commencer par λ_β et $\lambda_{\beta\eta}$. Il est possible de montrer en utilisant un théorème de point fixe que pour toute théorie T récursivement énumérable il existe un terme T-facile (et donc une infinité), où $u \in \Lambda^0$ est T-facile si pour tout $t \in \Lambda^0$ l'équation $u = t$ est consistante avec T. Il est facile de voir que pour aucune théorie sensible T il ne peut exister de terme T-facile (car $I = YK$ est inconsistant). On déduit de ces remarques que :

Corollaire 38 *Une théorie récursivement énumérable n'est jamais sensible.*

L'argument de compacité précédent s'étend sans difficulté pour montrer que :

Proposition 39 *Toute théorie récursivement énumérable a 2^ω extensions incompatibles.*

Pour aller plus loin, par exemple pour montrer qu'il existe un ensemble de λ-théories qui, ordonné par l'inclusion, est isomorphe à R , voir [Barendregt].

4 Modélisation générale via les pcs.

4.1 Morphismes de pcs.

La notion de morphisme que nous introduisons ici se passe au niveau des pcs, c'est-à-dire au niveau des trames de domaines, (et non des trames de modèles), et nous explique comment engendrer des domaines réflexifs, voire extensionnels. Dans la section suivante nous étudions les exemples de la sémantique continue dont la cohérence est triviale, et dans la section d'après nous étudions les exemples de la sémantique stable dont le préordre est trivial. Ici nous posons les bases pour le cas général : c'est globalement plus économique, et de plus ce cadre peut s'évérer nécessaire pour certaines applications. Les modèles de graphe rentrent évidemment dans ce cadre.

Notation 40 *Rappelons que pour $W =_{def} (D, \frown, \preceq)$ on a posé $\mathcal{S}(W) =_{def} (S^{coh}(D), \subseteq)$, où $S^{coh}(D)$ est l'ensemble des segments initiaux cohérents de W.*

Dfinition 41 *On appellera* morphisme *de* $W := (D, \asymp, \preceq)$ *vers* $W' := (D', \asymp'$ $, \preceq')$ *toute application* j *de* D *vers* D' *tel que :*
1. j *est injective,*
2. $x \asymp y \Longleftrightarrow j(x) \asymp' j(y)$,
3. $j(x) \preceq' j(y) \Longrightarrow x \preceq y$.
Un plongement *est un morphisme tel qu'il y a équivalence dans* 3.
Un isomorphisme *est un plongement tel que* $\forall y \in D'\ \exists x \in D\ \ (\downarrow' y = \downarrow' j(x))$.

Les fonctions $e =_{def} \downarrow' \circ j^{\bullet}$, de $P(D)$ dans $P(D')$, et $p =_{def} \downarrow \circ j^{\bullet -1}$ de $P(D')$ dans $P(D)$ sont toujours additives (et donc continues). Dès que j est injective elles commutent à toutes les interesections et sont donc stables. La condition 2. exprime exactement que que $j^{\bullet}$ et $j^{\bullet -}$ respectent la cohérence.des sous-ensembles et a donc pour conséquence que e envoie $\mathcal{S}(W)$ dans $\mathcal{S}(W')$, et inversement pour p. Comme il est facile de le vérifier, la condition 3. est équivalente au fait $p \circ e$ est l'identité sur les segments initiaux de la forme $\downarrow \{\alpha\}$ (c'est à dire sur les éléments premiers des domaines). Comme tout segment initial cohérent est une union de tels segments premiers et comme p et e sont additives, il en résulte que $p \circ e = id$ sur $\mathcal{S}(W)$. Ainsi j est un morphisme de W dans W' ssi $\mathcal{S}(W)$ est un retract de $\mathcal{S}(W')$ via (p, e) (plus précisément : via sa restriction aux domaines de segments initiaux cohérents). Un raisonnement analogue montre que j est un plongement ssi, de plus, $e \circ p \leqslant id$ et que j est un isomorphisme ssi, de plus, $e \circ p = id$, et dans ce cas p et e sont des isomorphismes inverses d'ordres partiels entre les domaines $\mathcal{S}(W)$ et $\mathcal{S}(W')$.

4.2 Application à la sémantique continue.

Etant donnés deux pcs $W := (D, \asymp, \preceq)$ et $W' := (D', \asymp', \preceq')$, on introduit le triplet suivant, dont il est facile de vérifier que c'est un pcs :
$W \Rrightarrow W' := (D^{cohfin} \times D', \asymp'', \preceq'')$,
où $\preceq''$ est le préordre $\preceq^{op, fin} \times \preceq'$, la relation $\asymp$ " étant définie comme suit :
$(a, \alpha) \asymp'' (b, \beta) \Longleftrightarrow (a \asymp b \Rightarrow \alpha \asymp' \beta)$. Par définition de $\preceq$ " on a :
$(a, \alpha) \preceq'' (b, \beta) \Longleftrightarrow b \preceq^{fin} a$ et $\alpha \preceq' \beta$,
On vérifie facilement (ou on sait par un exercice du chapitre précédent) que :
$[\mathcal{S}(W) \to \mathcal{S}(W')]$ est isomorphe à $\mathcal{S}(W \Rrightarrow W')$, via la fonction Tr et Tr^{-1}, où :
$Tr(f) =_{def} \{\ (a, \alpha) \in D^{cohfin} \times D'\ /\ \alpha \in f(\downarrow a)\ \}$,.et
$Tr^{-1}(T)(d) =_{def} \{\ \alpha \in D'\ /\ \exists a \in D^{cohfin}\ a \subseteq d$ et $(a, \alpha) \in T\ \}$
pour $f \in [\mathcal{S}(W) \to \mathcal{S}(W')]$, $d \in \mathcal{S}(W)$ and $T \in \mathcal{S}(W \Rrightarrow W')$.

Il résulte de ce qui précède que $i : D^{fin} \times D \to D$ est un morphisme (resp. un isomorphisme) de $W \Rrightarrow W$ dans W si et seulement si le domaine $[\mathcal{S}(W) \to \mathcal{S}(W)]$ est un retract de (resp. est isomorphe à) $\mathcal{S}(W)$, via (λ, A), où $\lambda =_{def} \downarrow \circ i^{\bullet} \circ Tr$ et $A =_{def} Tr^{-1} \circ \downarrow \circ i^{\bullet -}$. Dans ce cas on a donc un modèle du λ-calcul pur, où les formules donnant $A(d)(d')$ et $\lambda(h)$ pour tous $d, d' \in \mathcal{D} =_{def} \mathcal{S}(W)$ et $h \in [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ sont :

$$\begin{aligned} A(d)(d') &\equiv d.d' =_{def} \downarrow \{\alpha \in D\ /\ \exists\, a \in D^{coh,fin}\ (a \subseteq_{fin} d' \text{ et } (i(a, \alpha) \in d)\} \\ \lambda(h) &= {}_{def} \downarrow \{i(a, \alpha)\ /\ a \in D^{coh,fin} \text{ et } \alpha \in h(\downarrow a)\} \end{aligned}$$

4.3 Application à la sémantique stable.

Le travail et les résultats sont analogues (mais on utilise ici que $i^\bullet$ et $i^{\bullet -}$ sont stables, ce qui assure que les retracts vivent bien dans la sémantique stable). Les différences sont les suivantes. On définit :
$W \Rrightarrow_s W' := (D^{cohfin} \times D', \stackrel{\frown}{\smile}'', \preceq'')$, où $\preceq''$ est le préordre $\preceq^{op,fin} \times \preceq'$ et $\stackrel{\frown}{\smile}''$ est défini comme suit :
$(a, \alpha) \stackrel{\frown}{\smile}'' (b, \beta) \Longleftrightarrow [\,(a \stackrel{\frown}{\smile} b \Rightarrow \alpha \stackrel{\frown}{\smile}' \beta)$ et $((a \stackrel{\frown}{\smile} b$ et $\alpha = \beta) \Rightarrow a = b)\,]$.[13]
On utilise Tr_s et Tr_s^{-1} définies par :
$Tr(f) := \{\ (a, \alpha) \in D^{cohfin} \times D' \ /\ a$ minimal tel que $\alpha \in f(\downarrow a)\ \}$, et
$Tr^{-1}(T)(d) := \{\ \alpha \in D' \ /\ \exists a \in D^{cohfin}\ a \subseteq d$ et $(a, \alpha) \in T\ \}$
pour $f \in [\mathcal{S}(W) \rightarrow_s \mathcal{S}(W')]$, $d \in \mathcal{S}(W)$ and $T \in \mathcal{S}(W \Rrightarrow_s W')$.

Les expressions de $A(d)(d')$ et $\lambda(h)$ sont les mêmes que précédemment avec la différence que $\downarrow a$ est supposé minimal dans $\lambda(h)$. Par ailleurs toutes les flèches $\downarrow$ disparaissent évidemment quand le préordre est trivial.

5 Les modèles de segments initiaux.

Cette classe de modèles, que nous appellerons K-modèles, appartient à la sémantique continue et contient tous les modèles de graphes. Elle a été isolée par Krivine dans [Kri]. Elle contient beaucoup de modèles extensionnels, et en particulier le modèle de Scott $\mathcal{D}_\infty$. Les domaines sous-jacents à ces modèles sont tous des treillis complets premiers-algébriques de la forme $S(D, \leq)$.

5.1 Définition.

Dfinition 42 *Une K-*trame *est un couple (W, i) où $W =_{def} (D, \leq)$ est un préordre, pour un ensemble D non vide, et $i : D^{fin} \times D \rightarrow D$ est une injection, les deux étant soumis à la condition de compatibilité suivante :*

$$\forall a, b, \alpha, \beta \quad i(a, \alpha) \leq i(b, \beta) \Longrightarrow (\ \downarrow b \subseteq \downarrow a \text{ et } \alpha \leq \beta\ ) \qquad (C_\beta)$$

On notera que si $\leq$ est l'égalité (cas des modèles de graphes), alors la condition est une conséquence triviale de l'injectivité de i, ce qui explique pourquoi on ne l'avait pas vue apparaître dans ce cadre). La condition C_β exprime exactement que i est un morphisme de $W \Rrightarrow W$ dans W (au sens de la Définition 41) ou encore que $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]$ est un retract de $\mathcal{D}$ via $\lambda =_{def} \downarrow \circ i^\bullet \circ Tr$ et $A =_{def} Tr^{-1} \circ \downarrow \circ i^{\bullet -}$, où $\mathcal{D} =_{def} \mathcal{S}(\mathcal{W})$. Ceci justifie la définition suivante.

Dfinition 43 *Un K-*modèle *du λ-calcul pur est un triplet $\mathcal{K} \equiv (\mathcal{D}, \lambda, A)$, engendré par une K-trame (W, i) avec $W = (D, \leq)$ de la manière suivante : $\mathcal{D} =_{def} (S(D), \subseteq)$, l'application, A et λ sont définies par :*

$$A(d)(d') \equiv d.d' =_{def} \downarrow \{\alpha \in D \ /\ \exists\, a \subseteq_{fin} d'\ (i(a, \alpha) \in d)\,\}$$

[13] La définition est plus simple et plus naturelle si on travaille avec des domaines d'antichaines au lieu de parties cohérentes (cf. [Kri]).

$$\lambda(h) =_{def}\downarrow \{i(a,\alpha) \ / \ \alpha \in h(\downarrow a)\}$$

où $d, d' \in \mathcal{D}$ *et* $h \in [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$.

Notons qu'il serait très facile de vérifier directement que λ et A sont bien définies, additives et que les $A(d)$ sont continues. Vérifier que $A \circ \lambda = id$ serait plus pénible, et il est beaucoup plus intéressant d'avoir démontré directement le cas général dans la section précédente.

Proposition 44 *Le K-modèle engendré par (W, i) est non trivial.*
Il est extensionnel si et seulement si :
1. $\forall a, b, \alpha, \beta \quad (i(a,\alpha) \leq i(b,\beta)) \Longleftrightarrow (\downarrow b \subseteq \downarrow a \; and \; \alpha \leq \beta \;)$
2. $\forall \alpha \in D \; \exists \alpha' \in im(i) \; (\downarrow \alpha = \downarrow \alpha')$.

Preuve. Un K-modèle est non trivial parce que l'on ne peut pas avoir $i(\emptyset, \alpha) \leq i(\{\alpha\}, \alpha)$, à cause de la condition C_β ; ces deux éléments engendrent donc des segments initiaux différents. Par ailleurs les deux conditions de la Proposition disent exactement que i est un isomorphisme de $W \Rrightarrow W$ dans W, et donc que le modèle est extensionnel.

Remarque 45 *On vérifie facilement que si $\mathcal{K}$ est extensionnel, alors les flèches $\downarrow$ externes des définitions de λ et A sont redondantes et peuvent donc être supprimées.*

5.2 Complétions extensionnelles des modèles de graphes.

Les conditions sur la trame qui correspondent à l'extensionnalité sont en fait faciles à remplir, comme le montre la Proposition suivante. Dans les notations et le lemme suivants (D, i) est une trame de modèle de graphes quelconque.

Notation 46 *Le couple (D, i) étant fixé on définit pour toute relation binaire R sur D :*
R^{fin} sur D^{fin} par $aR^{fin}b$ ssi $\forall \alpha \in a \; \exists \beta \in b \; \alpha R \beta$, et
$L(R)$ sur D par $\alpha \, L(R) \, \beta$ ssi $\alpha = i(a', \alpha')$ et $\beta = i(b', \beta')$ et $b' R^{fin} a'$ and $\alpha' R \beta'$.
$R^r = R \cup \{\, (x, x) \, / \, x \in D \,\}\,)$ est la clôture réflexive de R sur D.

Il est facile de vérifier que :

Lemme 47 *(i) L'ensemble $\mathcal{R}$ des préordres sur D est un dcpo pour l'inclusion.*
(ii) Si R est binaire transitive sur D, alors $R^r \in \mathcal{R}$.
(iii) Si $R \in \mathcal{R}$ alors R^{fin} est un préordre sur D^{fin}
(iv) Si i est bijective $\mathcal{R}$ est clos pour L.
(v) Si i est bijective L est continue sur $(\mathcal{R}, \subseteq)$.

Proposition 48 *[Kri]* Completions extensionnelles d'un modèle de graphes.
Soit $\mathcal{G}$ modèle de graphes de trame (D, i) tel que i est bijective, alors :
1. Il existe un préordre $\leq$ tel que $(D, i, \leq)$ est une K-trame extensionnelle.
2. Pour toute relation transitive $\prec$ sur D telle que $\prec \subseteq L(\prec^r)$ il existe un préordre $\leq$ contenant $\prec$ tel que $(D, i, \leq)$ est une K-trame extensionnelle.

Preuve. La première assertion est le cas $\prec =_{def} \emptyset$ de la seconde. Montrons 2. La clôture réflexive $\prec^r$ de toute relation transitive $\prec$ sur D est dans $\mathcal{R}$. Puisque i est bijective $\mathcal{R}$ est clos pour L, en particulier $L(\prec^r)$ est un préordre, donc $\prec^r \subseteq L(\prec^r)$. Par ailleurs L est continue sur $\mathcal{R}$, elle a donc un plus petit point fixe contenant $\prec^r$, qui est donné par " $\leq$ " $=_{def} \cup\{\, L^n(\prec^r) \,/\, n \in N \,\}$. Comme $\leq$ est un point fixe de L et que i est bijective, on obtient bien une K-trame extensionnelle.

Exemple 49 Le modèle $\mathcal{D}_\infty$ de Scott.
La famille des modèles $\mathcal{D}_\infty$ couvre tous les modèles qui sont les complétions extensionnelles des modèles de graphes $\mathcal{P}_P$ de l'exemple 14. Le plus simple de ces modèles est celui qui est associé à $\mathcal{P}_{\{p\}}$.
Et l'on peut faire la construction en imposant de plus un préordre $\prec$ sur P, pourvu qu'il satisfasse la condition de la Proposition 48.

Exemple 50 Le modèle de Park $\mathcal{P}_\infty$.
La famille des modèles de Park $\mathcal{P}_\infty$ est obtenue de la même manière que $\mathcal{D}_\infty$ sauf que l'on part des modèles $\mathcal{P}'_P$ de l'Exemple 15. On notera que dans ce cas le seule $\prec$ possible sur P qui satisfasse $\prec \subseteq L(\prec^r)$ est l'égalité [14].

Pour ces deux (familles de) modèles on montre facilement que :

Lemme 51 *Pour tous $\alpha, \beta \in D$ on a $\alpha \leq \beta$ si et seulement si il existe $p, q \in P$ et deux suites finies $\bar{a}, \bar{b}$ de même longueur telles que $\alpha = i(\bar{a}, p)$ et $\beta = i(\bar{b}, q)$ et $p \prec q$ et $\forall i \leq l(\bar{a})$ $(b_i \subseteq\downarrow a_i)$.*

En effet $b_i \subseteq\downarrow a_i$ est équivalent à $\downarrow b_i \subseteq\downarrow a_i$ et donc à $b_i \leq^{fin} a_i$.
(Rappelons que $p \prec q$ signifie toujours $p = q$ pour Park).

Preuve. La démonstration de $\Rightarrow$ ("seulement si") est par induction sur l'entier $n(\alpha, \beta) = \inf\{\, n \in N \,/\, (\alpha, \beta) \in L^n(\prec^r) \,\}$. La démonstration de $\Leftarrow$ ("si") est par induction sur $l(\bar{a})$.

On admettra que :
Tous les modèles $\mathcal{D}_\infty$ interprètent les non résolubles par $\emptyset$. On peut soit le déduire de la propriété analogue pour $\mathcal{P}_P$, soit le montrer directement en faisant marcher la technique de réductibilité directement dans le modèle (il faut alors être décroissant par rapport à $\leq$ en interprétant $\alpha \in D$). C'est possible parce que le modèle est engendré par une paire partielle pour laquelle c'est possible
[sera complété, peut-être, plus tard ; en attendant voir éventuellement [Ber] pour les détails].
(au contraire de $\mathcal{P}_\infty$, qui n'est d'ailleurs pas sensible, pour les mêmes raisons que $\mathcal{P}'_P$).

En fait, la théorie des $\mathcal{D}_\infty$ est connue (et est indépendante de $(P, \prec)$). On en a deux caractérisations fort intéressantes, qui montrent que $\mathcal{D}_\infty$, dont la définition ne fait aucune allusion directe à la β-réduction, est susceptible néanmoins de rendre compte de traits du calcul.

[14] Car $p \prec p'$ et $p = i(\{p\}, p)$ et $p' = i(\{p'\}, p')$ impliquent alors $p' \prec p$.

Thorme 52 *$\mathcal{D}_\infty \models t = u$ ssi $t \sim_{op}^h u$ ssi $NT(t) = NT(u)$.*

Où $t \sim_{op}^h u$ est une abbréviation pour "t et u sont opérationnellement équivalents pour la réduction de tête" ; la définition formelle étant :

$\forall C[-]\ (C[t] \Downarrow_h \Longleftrightarrow C[u] \Downarrow_h)$

où $v \Downarrow_h$ signifie que la réduction de tête du terme v termine, et $C[-] \in \Lambda[-]$ est un contexte quelconque. On dit que $\mathcal{D}_\infty$ est *pleinement adéquat pour la réduction de tête.*

Par ailleurs $NT(t)$ est l'"arbre de Nakajima de t", une version extensionnelle de l'arbre de Böhm.

Notons Th_h^{op} l'ensemble des équations $t = u$, où $t \sim_{op}^h u$. Il est essentiellement trivial de vérifier que Th_h^{op} est une λ-théorie, qui contient toutes les λ-théories semi-sensibles (et donc les théories sensibles). En particulier elle contient BT et $Th(\mathcal{D}_\infty)$, et en particulier elle contient $\varepsilon = I$ et est donc extensionnelle. Cette unique théorie sensible maximale est notée $\mathcal{H}^*$ dans [Bar]. La première partie du Théorème précédent se reformule donc en :

Corollaire 53 *$Th(\mathcal{D}_\infty) = \mathcal{H}^*$.*

Remarque 54 *Il existe en fait fort peu de modèles dont la théorie est entièrement connue. La description des théories de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}_\infty$, etc. passe par l'établissement d'un théorème d'approximation pour le modèle (cette méthode englobe la réductibilité, qui en est un cas particulier simple, en un sens) et par l'utilisation de "théorèmes de séparation" syntaxiques adéquats.*

Remarques en vrac (à développer ultérieurement). Des techniques de complétion analogue à celles que nous avons développées permettent de construire (plus ou moins canoniquement, il existe en effet des variantes), des K-modèles à partir de K-trames partielles, ou des modèles plus complexes à partir de pcs partiels. Elles permettent en particulier d'extensionnaliser des K-modèles (ou des "pcs-modèles") plus compliqués que des modèles de graphes. Tous ces processus de complétion étant compatibles.

Il existe des théorèmes de transfert d'un modèle de graphes (ou d'un K-modèle) à sa complétion extensionnelle (permettant par exemple de montrer que si un modèle de graphes est sensible alors sa complétion extensionnelle l'est aussi). Et en fait il suffit de travailler sur les paires partielles "minimales" qui les engendrent.

La technique de forcing s'étend aux K-modèles, et permet par exemple de construire un modèle extensionnel de $\omega = t$ pour tout t clos ($\beta\eta$-facilité de ω), et d'en déduire pour $\lambda_{\beta\eta}$ des conséquences analogues à celles qu'on a déduites pour λ_β.

6 Les modèles de la sémantique cohérente.

La classe suivante de modèles, qui appartient à la sémantique stable, a été isolée par J.Y. Girard [Gir]. Nous appelerons ces modèles des *G-modèles.*

Si on les compare aux modèles que nous venons de présenter, ces modèles sont presque aussi simples a manipuler que les modèles de graphes, et l'interprétation des termes y est plus économique, parce qu'on travaille avec Tr_s au lieu de Tr. Un autre avantage de cette classe est qu'on y construit des modèles extensionnels sans utiliser de préordre. En revanche le processus de complétion de trames est plus délicat, à cause de la présence inévitable d'une relation de cohérence.

6.1 Définition et exemples.

Dfinition 55 *Une* G-trame *est un couple* (W, i), *où* $(D, \frown)$ *est un espace cohérent,* $i : D^{cohfin} \times D \to D$ *est une injection compatible avec* $\frown$ *au sens suivant :*

$$(i(a, \alpha) \frown i(b, \beta)) \iff \begin{cases} a \frown b \Rightarrow \alpha \frown \beta \\ a \frown b \text{ et } a \neq b \Rightarrow \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad (C_\beta)$$

Dfinition 56 *Un* G-modèle *est un triplet* $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{D}, \lambda, A)$, *engendré par une K-trame* (W, i) *avec* $W = (D, \frown)$ *de la manière suivante :* $\mathcal{D} =_{def} (P^{coh}(D), \subseteq)$ *où* A *et* λ *sont définis par :*

$$A(d)(d') \equiv d.d' =_{def} \left\{\alpha \in D \;/\; \exists a \in D^{coh,fin} \;\; a \subseteq d' \; i(a, \alpha) \in d\right\}$$

$$\lambda(f) \equiv \{i(a, \alpha) \;/\; \alpha \in h(a) \textit{ et } a \textit{ est minimal tel que } \alpha \in h(a) \;\}$$

La condition (C_β) dit exactement que i est un morphisme de $W \Rrightarrow_s W$ dans W, au sens de la Définition 41, on a donc bien un modèle du λ-calcul, qui est non trivial dès que D n'est pas vide. On a aussi directement :

Proposition 57 *Le G-modèle engendré par* (W, i) *est extensionnel ssi* i *est bijective.*

Exemple 58 *Dans tout G-modèle on a :*
$|I| = \{i(\{\alpha\}, \alpha) \;/\; \alpha \in D\}$
$|0| = \{i(\emptyset, i(\{\alpha\}, \alpha)) \;/\; \alpha \in D\;\}$.
$|1| = |K| = \{i(\{\alpha\}, i(\emptyset, \alpha)) \;/\; \alpha \in D\;\}$
$|\varepsilon| = \left\{\; i\left(\{i(b, \beta)\}, i(b, \beta)\right) / \; (b, \beta) \in D^{cohfin} \times D \;\right\}$
En particulier $|1|$ *et* $|0|$ *sont incompatibles* $\mathcal{D}$ *ne peut donc être un treillis, de plus* $|1| \cap |0| = \emptyset$, *ce qui n'était pas vrai en sémantique continue. De même* $|\varepsilon| \subseteq |I|$ *dans tout G-modèle, alors que ceci est faux en général en sémantique continue, par exemple dans le modèle d'Engeler.*

Des versions stables $\mathcal{E}^s$, $\mathcal{D}^s_\infty$ et $\mathcal{P}^s_\infty$ de $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_\infty$ et $\mathcal{P}_\infty$ peuvent être construites de manière assez analogue à ce qu'on a fait en sémantique continue (voir section suivante). Pour $\mathcal{E}^s$ et $\mathcal{D}^s_\infty$ on pourra munir l'ensemble P d'atomes de départ d'une cohérence arbitraire, tandis que pour $\mathcal{P}^s_\infty$ on ne peut que partir de la cohérence triviale [15]. Comme dans la sémantique continue il n'y a donc qu'un seul $\mathcal{P}^s_\infty$ (une fois la cardinalité de P fixée) et une infinité de variations de $\mathcal{D}^s_\infty$. On peut montrer :

[15] Il suit de la définition d'une G-trame que $\{\, i(\{\alpha\}, \alpha) \;/\; \alpha \in D\,\}$ est nécessairement cohérent. Il en résulte que α et β doivent être cohérents si $\alpha = i(\{\alpha\}, \alpha)$ et $\beta = i(\{\beta\}, \beta)$.

Thorme 59 *(Gouy, Bastonero) $Th(\mathcal{E}) = Th(\mathcal{E}^s)$ et $Th(\mathcal{D}_\infty) = Th(\mathcal{D}^s_\infty)$ (indépendamment de la relation de cohérence dont on part sur P), mais $Th(\mathcal{P}^s_\infty) \neq Th(\mathcal{P}_\infty)$, ces deux théories étant de plus incomparables.*

En revanche $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^s$ ne vérifient pas les mêmes inégalités $u \preceq v$ entre termes de Λ, comme nous l'avons vu plus haut.

Remarques en vrac.
Plus généralement le *processus de complétion* s'applique, mais il faut d'abord définir une notion de *trame partielle complétable* $(P, \frown, j)$ [16] [17].
Une fois de plus les arguments de *réductibilité* s'appliquent aux modèles, pourvu qu'ils soient engendrés par des trames partielles *positives et complétables* et on peut en déduire en particulier que $\mathcal{D}^s_\infty$ est sensible et interprète tous les termes non résolubles (et eux seulement) par $\perp = \emptyset$.
La méthode de *forcing* s'applique également, en particulier on peut aussi construire dans la sémantique stable 2^ω modèles avec des théories équationnelles différentes.
Travailler avec des pcs qui engendrent des DI-domaines (c'est-à-dire avec des pcs avec préordres convenables) permet par exemple d'utiliser le lifting pour construire des modèles de λ-calcul paresseux, ou plus généralement de construire des modèles dont le domaine est de plus contraint à satisfaire une "équation au domaines" qui utilise le lifting.

6.2 Les versions stables de Engeler, $\mathcal{D}_\infty$ et $\mathcal{P}_\infty$.

Construction de $\mathcal{E}^s$. Pour construire $\mathcal{E}^s$ on part d'un couple $(P, \frown_P)$, où P est un ensemble non vide ne contenant pas de paires, et $\frown_P$ une relation de cohérence sur P qui peut être triviale. On construit inductivement une suite $(D_n, \frown_n)_{n\in\omega}$ de la manière suivante :
$D_0 = P$ et $\frown_0 =_{def} \frown_P$
$D_{n+1} = P \cup (D_n^{coh_n fin} \times D_n)$ où $D_n^{coh_n fin}$ est relatif à $\frown_n$. Pour $\alpha, \beta \in D_{n+1}$ on pose :

$$\alpha \frown_{n+1} \beta \iff \begin{cases} (\,\alpha, \beta \in P \text{ et } \alpha \frown_0 \beta\,) \text{ ou} \\ \alpha = (a, \alpha') \text{ et } \beta = (b, \beta') \text{ et } \begin{cases} (a \frown_n b \;\Rightarrow\; \alpha' \frown_n \beta' \text{ et} \\ (a \frown_n b \text{ et } \alpha' = \beta') \Rightarrow a = b \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie que pour tout n on a : $D_n \subseteq D_{n+1}$, $\frown_n$ est une relation de cohérence, et $\frown_n = (D_n \times D_n) \cap \frown_{n+1}$.
La trame $W =_{def} (D, \frown)$ du modèle est alors définie par : $D =_{def} \cup(D_n)$ et $\frown =_{def} \cup \frown_n$. On vérifie facilement que :
$D = P \cup (D^{coh fin} \times D)$ où $D^{coh fin}$ est cette fois relatif à $\frown$ et que pour tout $\alpha, \beta \in D$:

[16] Une *trame partielle complétable* est un triplet $(P, \frown, j)$ tel que, pour tous $a, b \subseteq A$, et $\alpha \in A$ tels que (a, α) et (b, α) sont dans $dom(j)$, on *ne peut pas avoir simultanément* : $j(a, \alpha) \frown_{coh} j(b, \alpha)$ et $a \frown b$ et $a \neq b$

[17] La présentation alternative de Krivine, par antichaines, est plus avantageuse de ce point de vue.

$$\alpha \asymp \beta \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\,\alpha, \beta \in P \text{ et } \alpha \asymp_P \beta\,) \text{ ou} \\ \alpha = (a, \alpha') \text{ et } \beta = (b, \beta') \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (a \asymp b \;\Rightarrow\; \alpha' \asymp \beta' \text{ et} \\ (a \asymp b \text{ et } \alpha' = \beta') \Rightarrow a = b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On prend ensuite pour i l'inclusion, et il est alors immédiat qu'on a une G-trame. Notons que l'on n'aurait guère simplifié les choses en partant de $\asymp_P = P \times P$.

Construction de $\mathcal{D}^s_\infty$. On procède comme plus haut sauf qu'on définit D_{n+1} par :
$D_{n+1} = P \cup ((D_n^{coh_n fin} \times D_n) - (\{\emptyset\} \times P))$, et on varie la définition de $\asymp_{n+1}$ en ajoutant que pour tout $p \in P$ on a $p \asymp_{n+1} (a, \alpha)$ ssi $(p \asymp_n \alpha$ et $(\alpha = p \Rightarrow a = \emptyset)\,)$.
A l'arrivée on a $D = P \cup ((D^{cohfin} \times D) - (\{\emptyset\} \times P))$ et i est définie par $i(a, \alpha) =_{def} (a, \alpha)$ si $a \neq \emptyset$ ou $\alpha \notin P$, et $i(\emptyset, p) = p$ sinon, et il ne reste plus qu'à vérifier que le triplet $(D, \asymp, i)$ est bien une G-trame. Comme i est bijective le G-modèle qu'elle engendre est extensionnel. Autrement dit, l'analogue stable $\mathcal{P}^s_P$ du modèle de graphe $\mathcal{P}_P$ est extensionnel, est c'est lui qui est appelé $\mathcal{D}^s_\infty$.

Construction de $\mathcal{P}^s_\infty$. Cette fois on part de $\asymp_P =_{def} P \times P$, on définit D_{n+1} par :
$D_{n+1} = P \cup ((D_n^{coh_n fin} \times D_n) - \{(\{p\}, p) \,/\, p \in P)$, et on varie la définition de $\asymp_{n+1}$ en ajoutant que pour tout $p \in P$ on ait $p \asymp_{n+1} (a, \alpha)$ ssi $((p \asymp_n a) \Rightarrow (p \asymp \alpha))$ et $((p \asymp_n a)$ et $(\alpha = p)) \Rightarrow (a = \{p\})\,)$.
On aboutit à $D = P \cup ((D^{cohfin} \times D) - \{(\{p\}, p) \,/\, p \in P)$ et i est définie par $i(a, \alpha) =_{def} (a, \alpha)$ si $\alpha \notin P$ ou $a = \{\alpha\}$, et $i(\{p\}, p) =_{def} p$ si $p \in P$. Il ne reste plus qu'à vérifier que le triplet $(D, \asymp, i)$ est bien une G-trame. Comme i est bijective le G-modèle qu'elle engendre est extensionnel, et le modèle $\mathcal{P}^s_\infty$ n'est autre que l'analogue stable $\mathcal{Q}^s_P$ du modèle de graphe $\mathcal{Q}_P$.

Conclusion : comparaison des constructions en sémantiques continue et stable. Pour la construction des modèles extensionnels nous avons évité une étape (celle de la complétion extensionnelle par construction inductive d'un préordre adéquat), mais nous avons payé ce gain par l'obligation d'une construction inductive de $\asymp$ simultanée à celle de D, et ce même dans le cas non extensionnel et même pour le modèle le plus simple (Engeler stable). Au final nous avons des modèles qui nous rendent des services différents en ce qui concerne les arguments de réfutation et cernent de façon différente le comportement des λ-termes, ce que l'on souhaitait.

Notes bibliographiques à ajouter ; en attendant :

[Bar] Barendregt, livre 1984.

[Ber] Berline, From comput to ...., contient de nombreux compléments et toutes les références souhaitables.

[Kri] Krivine, livre (version anglaise pour la sémantique stable)

[Gir] Le système F 15 ans après, TCS 1986.

[Salibra] LICS'2001.