# Cours de $\lambda$-calcul *

CHAPITRE 6. Sémantiques fonctionnelles †
*(la sémantique continue et la sémantique stable),*
*applications et limites.*

Ch. Berline

## Table des matières



*DEA de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique (2000-2001), UFR de Mathématiques, Université Paris 7.

†Version du 11 Avril 2001, révisée 29/03/02 et 19/03/03 pour ce qui concerne la seule sémantique continue.

# 1 Introduction.

Dans ce chapitre nous donnons les préliminaires mathématiques nécessaires pour pouvoir développer des sémantiques fonctionnelles du $\lambda$-calcul, et nous présentons la sémantique continue et la sémantique stable.

Exhiber un modèle du $\lambda$-calcul, même pur (non typé) ne nécessite pas toute cette théorie, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, mais les éléments que nous donnons maintenant, sont nécessaires à une compréhension suffisamment générale des principes de modélisation.

La sémantique continue a été développée par Dana Scott à la fin des années 70, et reste le socle des autres sémantiques fonctionnelles développées depuis lors. C'est dans ce cadre que Scott mis au point (en 1968) le premier modèle du $\lambda$-calcul pur différent du modèle des termes (le modèle $\mathcal{D}_\infty$), donnant ainsi une preuve sémantique de la consistance du $\lambda$-calcul. La construction originelle de $\mathcal{D}_\infty$ (et celle qui est encore enseignée la plupart du temps) est par limite inverse, dans une catégorie adéquate, mais ce modèle admet aussi une construction élémentaire, que l'on trouvera au chapitre suivant. Le modèle le plus simple du $\lambda$-calcul non typé, ou modèle de Engeler-Plotkin, fut construit peu après (1970). Il appartient aussi à la sémantique continue et est en fait suffisant pour la plupart des applications de cette sémantique au $\lambda$-calcul non typé ; il a par ailleurs un analogue dans la sémantique stable, et dans la sémantique fortement stable que nous mentionnons plus bas.

L'intérêt des sémantiques fonctionnelles est en premier lieu conceptuel : elles permettent de *redonner au $\lambda$-calcul le sens fonctionnel* qui était derrières les intuitions de Church, de prendre ses distances avec la syntaxe, et d'avoir une *vision différente* de certains aspects du calcul. Elles permettent de rendre compte de la notion de partialité (fonctions partielles, informations partielles), et d'approximation (d'un résultat, d'une information, etc.) par des éléments "finiment présentés. Elles permettent de remplacer des preuves syntaxiques fastidieuses, et difficilement contrôlables dès qu'elles atteignent une certaine complexité, par des *arguments élégants*. Malheureusement elles sont sous-employées à cet égard. Enfin elles permettent de montrer la *consistance d'extensions* très sophistiquées, voire très puissantes, des $\lambda$-calculs (calcul pur ou calculs typés, avec éventuellement ajout de constructeurs, de règles de calcul, etc.). etc.

Il s'agit de *sémantiques dénotationnelles* en ce sens que, telles la sémantique par réductibilité que nous avons déja vue, elles ne modélisent pas, a priori, la manière dont on conduit le calcul, mais s'intéressent surtout aux résultats. Les modèles que l'on y construit sont cependant reliés en profondeur à la syntaxe, et on peut parfois l'exploiter et faire le lien avec des sémantiques opérationnelles.

En dehors de la résolution de problèmes de consistance, l'une des jolies applications des sémantiques fonctionnelles est qu'elles permettent, ainsi que nous le verrons, certains "*arguments de réfutation*" ; par là on entendra : des arguments permettant de prouver que "il n'existe pas de $t \in \Lambda$ tel que ...". De tels arguments sont disponibles dans la sémantique continue, mais de manière insuffisante, ce qui a conduit à réfléchir à d'autres sémantiques.

La sémantique stable (Berry 1978) et la sémantique fortement stable (Bucciarelli et Ehrhard 1993-95), qui sont en un sens des raffinements de la sémantique continue, ont été introduites dans ce but. La sémantique stable étant par ailleurs un peu plus "économique" que la sémantique continue. Bien que plus raffinées les deux dernières sémantiques ne sont pas "plus fortes" que la sémantique continue : pour chacune de ces sémantiques il existe des termes réfutables par l'une et pas par les deux autres (phénomènes de compensation).

## 2 Modèles du $\lambda$-calcul.

Le cadre mathématique que nous développons dans la suite permet de modéliser bien des $\lambda$-calculs typés, éventuellement enrichis par des types primitifs (types de base), des constructeurs, et des règles de réduction supplémentaires. Nous nous centrerons sur la modélisation du $\lambda$-calcul non typé ; cette modélisation nécessite des structures "réflexives" qui ne sont pas utiles dans le cas typé (au moins au premier ordre).

Les modèlisations du $\lambda$-calcul non typé dont il sera question ici se présenteront comme suit. On disposera d'un ensemble $\mathcal{M}$ muni d'une certaine structure mathématique et on sera capable d'interpréter tout terme $t \in \Lambda$ dans tout environnement $\rho$, c'est-à-dire toute fonction partielle $\rho : V \to \mathcal{M}$, défini au moins sur les variables libres de $t$. On obtiendra ainsi l'interprétation $|t|_\rho \in \mathcal{M}$ de $t$ dans cet environnement. Une telle interprétation s'étend facilement aux termes de $\Lambda(\mathcal{M})$, c'est à dire aux $\lambda$-termes à paramètres dans $\mathcal{M}$ [1].

**Dfinition 1** *Etant donnés $t, u \in \Lambda(\mathcal{M})$ nous dirons que $\mathcal{M} \models t = u$, à lire "$\mathcal{M}$ satisfait $t = u$" si pour tout $\rho$ on a $|t|_\rho = |u|_\rho$. Nous écrirons aussi $t =_{\mathcal{M}} u$. Nous désignerons par $Th(\mathcal{M})$ l'ensemble des équations entre termes de $\Lambda$ qui sont satisfaites par $\mathcal{M}$.*

**Dfinition 2** *Nous dirons que $\mathcal{M}$ est un modèle du $\lambda$-calcul (resp. du $\lambda$-calcul extensionnel) si $Th(\mathcal{M})$ est une $\lambda$-théorie (resp. $\lambda\eta$-théorie), c'est-à-dire si l'égalité dans $\mathcal{M}$ est contextuelle et égalise les termes $\beta$-équivalents (resp. $\beta\eta$-équivalents).*

Compte tenu de la contextualité il est bien sûr suffisant d'exiger seulement en plus l'égalité des couples redex-réduit ; et en ce qui concerne $\eta$, cela revient à satisfaire l'équation $\varepsilon = I$, où $I =_{def} \lambda x.x$ et $\varepsilon =_{def} \lambda x \lambda y.xy$.

[1] Rappelons que $\Lambda(\mathcal{M})$ s'obtient en ajoutant aux règles de construction de $\Lambda$, un ensemble de constantes pour chaque élément de $\mathcal{M}$. Ces constantes sont toujours interprétées par l'élément de $\mathcal{M}$ correspondant (et on les notera de la même manière). On aura ainsi la relation $\left|t[\bar{x}, \bar{d}]\right|_\rho = |t[\bar{x}, \bar{y}]|_{\rho[\bar{y}:=\bar{d}]}$.

**Dfinition 3** *Une $\lambda$-théorie est dite* sensible *si elle égalise tous les termes non résolubles et* semi-sensible *si elle n'égalise jamais un résoluble et un non résoluble. Nous dirons qu'un modèle $\mathcal{M}$ est* sensible *(resp.* semi-sensible*) si sa théorie l'est.*

**Remarque 4** *La sensibilité implique la semi-sensibilité. En effet l'équation $I = YK$ est inconsistante avec $=_\beta$, car elle implique trivialement $I = \lambda x.I$ et donc $V = IV = (\lambda x.I)V = I = \lambda x.I = F$.*

# 3 La sémantique continue.

Nous commençons par développer la théorie mathématique. Les intuitions et motivations de Scott sont présentées en Section 3.5.

*Notations et définitions de base.*
Dans la suite $P(D)$ est l'ensemble des partie de l'ensemble $D$, et $P^{fin}(D)$ ou $D^{fin}$ désigne l'ensemble des parties finies de $D$.
Etant donnée une fonction $\theta : D \to E$, la fonction $\theta^\bullet : P(D) \to P(E)$ est définie par $\theta^\bullet(A) =_{def} \{\theta(d) \,/\, d \in A\}$ et la fonction $\theta^{\bullet -} : P(E) \to P(D)$ est définie par $\theta^{\bullet -}(B) =_{def} \{d \,/\, \theta(d) \in B\}$
Un *préordre* est une relation binaire réflexive et transitive ; à tout préordre $\leq$ sur l'ensemble $D$ est associé une relation d'équivalence sur $D$ : $\alpha \sim \beta$ si et seulement si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$. Une *relation de cohérence* est une relation binaire réflexive et symétrique. Toute relation d'équivalence est à la fois un préordre et une cohérence.
Etant donnée une relation binaire $R$ sur un ensemble $E$ on désignera par $R^{op}$ la relation opposée : $xR^{op}y \Leftrightarrow yRx$.

## 3.1 Domaines.

**Dfinition 5** *Un* ordre partiel *(p.o.) est un couple $(\mathcal{D}, \preceq)$, où $\preceq$ est une relation binaire réflexive, transitive et anti-symétrique.*
*$A \subseteq \mathcal{D}$ est une* chaîne *de $\mathcal{D}$ si il est totalement ordonné pour l'ordre induit.*
*$A \subseteq \mathcal{D}$ est* filtrant *si pour tous $d, d' \in A$ il existe $d'' \in A$ tel que $d, d' \preceq d$".*
*Les éléments de $A \subseteq \mathcal{D}$ sont* compatibles *si $A$ a un majorant dans $\mathcal{D}$.*
*$A \subseteq \mathcal{D}$ a une* borne supérieure *(un sup) si l'ensemble de ses majorants (est non vide et) a un plus petit élément. Ce sup est alors noté $sup(A)$ ou $\vee A$.*
*$A \subseteq \mathcal{D}$ a une* borne inférieure *(un $inf$) si l'ensemble de ses minorants (est non vide et) a un plus grand élément. Cet inf est alors noté $inf(A)$ ou $\wedge A$.*

**Remarque 6** *Toute chaine d'un p.o. $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble filtrant. $\emptyset$ est une chaine, $sup(\emptyset)$ existe dans $\mathcal{D}$ ssi $\mathcal{D}$ a un plus petit élément (de même $inf(\emptyset)$ existe ssi $\mathcal{D}$ a un plus grand élément).*

**Remarque 7** *(i) Tout $A \subseteq \mathcal{D}$ qui a un plus grand élément est filtrant.*
*(ii) Tout $A$ filtrant a au plus un élément maximal, et si il en a un alors cet élément est le plus grand élément de $A$.*

**Exemple 8** *Si* $(\mathcal{D}, \preceq)$ *est* $(P(D), \subseteq)$, *pour un certain ensemble* $D$, *alors pour tout* $d \subseteq D$ *l'ensemble* $P^{fin}(d)$ *est filtrant, et a pour sup* $d$.

**Dfinition 9** *Un* dcpo, *ou* "ordre partiel complet pour les sous-ensembles filtrants"*, est un ordre partiel* $(\mathcal{D}, \preceq)$ *tel que tout sous-ensemble filtrant* $A$ *de* $\mathcal{D}$ *a un sup; ceci implique que* $\mathcal{D}$ *a un plus petit élément, à savoir* $\vee\emptyset$*, qu'on note* $\perp$ [2]. *Quand il n'y aura pas d'ambiguïté on omettra de préciser* $\preceq$ . *Un p.o. est* chaine-complet *(i.e. complet pour les chaines) si toutes ses chaines ont un sup.*

Tout *dcpo* est donc en particulier chaîne-complet.

**Dfinition 10** *Un* treillis complet *est un p.o. tel que tout sous-ensemble* $A$ *a un* sup *(équivalent : tout sous-ensemble* $B$ *a un* inf *). Tout treillis complet a un plus petit élément, ainsi qu'un plus grand élément, qu'on note* $\top$ $(= sup(\mathcal{D}))$.

Tout treillis complet est donc un dcpo. Les dcpos sont les structures fondamentales en sémantique du $\lambda$-calcul ; on les rencontre partout ; il en est de même de la continuité. Les premiers des exemples ci-dessous sont utilisés pour modéliser les types de bases des différents systèmes de typage qui sont des extensions "simples" de $S$.

**Exemple 11** (Domaines plats). *Soit* $D$ *un ensemble et* $\perp$ *un élément non dans* $D$. *Le domaine* $D_\perp$ *est par définition le p.o. dont l'ensemble de base est* $D \cup \{\perp\}$ *et dont l'ordre est défini par :* $x \preceq y$ *ssi* $x = \perp$ *ou* $x = y$. *Exemple : le domaine des entiers plats est* $N_\perp$*, le domaine trivial* $\emptyset_\perp = \{\perp\}$ *et le domaine de Sierpinski* $O =_{def} \{T\}_\perp$. *Ces deux derniers domaines plats sont des treillis complets et ce sont évidemment les seuls.*

**Exemple 12** *(*Divers domaines pour les entiers). *L'ordinal* $\omega + 1$, $N_\perp$, $N_{Lazy}$ *sont des dcpo susceptibles de représenter les entiers, où* $N_{Lazy}$ *est défini de la manière suivante : l'ensemble sous-jacent est* $N_{Lazy} =_{def} \omega \uplus (\omega + 1)$ *(l'union disjointe d'une copie de* $N$ *et d'une autre copie complétée par un point à l'infini) les éléments des deux copies sont respectivement notés* $s^n 0$, $n \in \omega$ *et* $s^n \perp$, $n \in \omega + 1$; *l'ordre est défini par* $x \preceq y$ *ssi* $x = y$ *ou il existe* $n \in \omega + 1$ *et* $n'$ *tels que* $x = s^n \perp$ *et* $y = s^{n'} z$ *avec* $n \leq n'$ *et* $z = 0$ *ou* $\perp$ . *On vérifie que cet ordre, dont la forme est un peigne infini dont les extrémités des dents sont les* $s^n 0$*, a pour plus petit élément* $\perp$ . ***[Faire dessin]***

**Exemple 13** *(*Un domaine pour les "flux continus" *(en anglais "streams")). Soit* $Str(\Sigma) =_{def} \Sigma^\omega \cup \Sigma^{<\omega}$ *l'ensemble de toutes les suites finies ou infinies d'éléments de l'ensemble* $\Sigma$ *(y compris la suite vide* $\varepsilon$*), ordonné par l'ordre préfixe :* $s \sqsubseteq s'$ *si* $s$ *est un segment initial de* $s'$. *Alors* $(Str(\Sigma), \sqsubseteq)$ *est un dcpo qui a pour éléments maximaux les suites infinies. Si* $\Sigma = \{1, ..., n\}$*, ce domaine se représente comme un arbre dont* $\varepsilon$ *est la racine, et qui branche* $n$

[2] Nous gardons les abréviations usuelles dans la littérature en langue anglaise, d'où l'ordre inversé des lettres. Dans *dcpo* le *d* est là pour pour "directed", qui est l'équivalent anglais de"filtrant".

*fois à chaque noeud, et dont toutes les branches de longueur maximales sont infinies, l'adresse de chaque noeud dans l'arbre représente, elle, la suite finie correspondante. On notera que deux éléments $s$ et $s'$ ont un majorant commun ssi ils sont comparables (i.e. $s \sqsubseteq s'$ ou $s' \sqsubseteq s$) ; il en résulte qu'un sous-ensemble $A$ de $Str(\Sigma)$ est filtrant ssi c'est une chaine.*

**Exemple 14** *(*Un domaine pour les réels*). On considère l'ensemble $IR$ des intervalles fermés non vides de $R$, ordonné par l'inclusion inverse. Il s'agit d'un dcpo dont les éléments maximaux sont les singletons $\{a\} = [a, a]$, $a \in R$. On a que $A \subseteq IR$ a un sup ssi $\cap A \neq \emptyset$, et dans ce cas $\vee A = \cap A$.*

Les exemples qui suivent sont à la base des constructions simples de modèles du $\lambda$-calcul pur que nous effectuerons dans le chapitre suivant. Dans tous ces exemples le domaine sera un ensemble de sous-ensembles, muni de l'inclusion, et, on aura $\vee A = \cup A$ (avec existence de $\vee A$ ssi $\cup A$ est un élément du domaine.

**Exemple 15** *$(P(D), \subseteq)$ est un treillis complet, pour tout ensemble $D$.*

**Exemple 16** *Soit $(D, \leq)$ un ensemble préordonné. Pour $u \in P(D)$ soit $\downarrow u =_{def} \{x \in D \,/\, \exists x \in u \; (x \leq x')\}$ et soit $S(D) =_{def} \{d \in P(D) \,/\, d = \downarrow d\}$. Alors $(S(D), \subseteq)$ est un treillis complet. Les éléments de $S(D)$ sont appelés* segments initiaux *de $(D, \leq)$. L'exemple précédent correspond au cas particulier où $\leq$ est triviale, au sens où $\leq$ est l'égalité de $D$.*

**Exemple 17** *Soit $(D, \coh)$ un ensemble muni d'une relation binaire, symétrique et réflexive (aussi appelée relation de* cohérence*). On note $P^{coh}(D)$ l'ensemble des* parties cohérentes *de $D$ qui sont par définition les sous-ensembles de $D$ dont les éléments sont cohérents deux à deux. Alors $(P^{coh}(D), \subseteq)$ est un dcpo, et n'est un treillis complet que si $\coh$ est triviale (dans le sens que $\coh = D \times D$). Les domaines plats correspondent aux cas particulier où $\coh$ est "$=$".*

**Exemple 18** *(pcs) Soit $(D, \coh, \leq)$ un ensemble muni d'un préordre et d'une relation de cohérence, les deux étant compatibles dans le sens que pour toute partie $u$ de $D$, si $u$ est cohérent alors $\downarrow u$ est cohérent (équivalent : $\forall x, x', y, y' \in D \; ((x \coh y$ et $x' \leq x$ et $y' \leq y) \Rightarrow (x' \coh y'))$. Alors $(S^{coh}(D), \subseteq)$ est un dcpo, où $S^{coh}(D)$ est l'ensemble des segments initiaux cohérents de $(D, \coh, \leq)$. De tels triplets seront appelés* pcs.

La dernière famille d'exemples englobe bien sûr les précédentes, qui correspondent au cas où l'une des relations précédentes est triviale au sens ci-dessus (ou les deux). Dans tous ces exemples le sup, quand il existe, est donné par l'union et l'inf par l'intersection.

**Exemple 19** *Tout p.o. $\mathcal{D}$ qui a un $\perp$ et qui ne contient pas de suite croissante infinie est un dcpo, car tout sous-ensemble filtrant y a un plus grand élément. C'est le cas par exemple des domaines plats de l'Exemple 11.*

**Dfinition 20** *Etant donnés deux ordres partiels $(\mathcal{D}, \preceq)$ et $(\mathcal{D}', \preceq')$, leur* produit direct $(\mathcal{D} \times \mathcal{D}', \preceq \times \preceq')$ *est par définition l'ensemble produit muni de l'ordre produit : $(x,y) \preceq (x', y')$ si $x \preceq x'$ et $y \preceq' y'$. On définit de manière analogue les* produits directs infinis *de po.*

**Lemme 21** *Tout produit direct de dcpos, muni de l'ordre produit, est un dcpo. Si $A \subseteq \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ a pour projections $A_1$ sur $\mathcal{D}_1$ et $A_2$ sur $\mathcal{D}_2$, et si $A$ est filtrant, alors $A_1$ et $A_2$ sont filtrants, et $\vee A = (\vee A_1, \vee A_2)$. Cette propriété se généralise aux produits directs infinis.*

*Preuve.* On traite le cas où $\mathcal{D} =_{def} \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Soit donc $A$ filtrant dans $\mathcal{D}$. Le fait que $A_1$ et $A_2$ sont filtrants est facile à montrer. Soient $d_1$ et $d_2$ les sups respectifs de $A_1$ et $A_2$; comme $A \subseteq A_1 \times A_2$ il est clair que $(d_1, d_2)$ est un majorant de $A$, et donc $\vee A \preceq (d_1, d_2)$. Par ailleurs tout majorant de $A$, et en particulier $\vee A$, est un couple dont les composantes majorent respectivement $A_1$ et $A_2$, et donc $(d_1, d_2)$.

**Remarque 22** *Tout produit direct de treillis complets est un treillis complet.*[3]

La remarque suivante traite d'un cas particulier important de produit direct infini.

**Dfinition 23** *Etant donnés un po $\mathcal{D}$ et un ensemble $E$, l'*ordre extensionnel *sur l'ensemble $\mathcal{D}^E$ de toutes les fonctions de $E$ dans $\mathcal{D}$ est défini par $f \preceq g$ ssi $\forall x\,(f(x) \preceq g(x)\,)$.*

**Corollaire 24** *Si $\mathcal{D}$ est un dcpo alors $\mathcal{D}^E$, ordonné par l'ordre extensionnel, est aussi un dcpo. Si $B \subseteq \mathcal{D}^E$ est filtrant alors son sup est la fonction $F_B$ définie sur tout $x \in \mathcal{D}$ par $F_B(x) = \vee_{f \in B} f(x)$. Si $\mathcal{D}$ est un treillis complet alors $\mathcal{D}^E$ en est un aussi, et la formule précédente définit le sup de tout ensemble $B \subseteq \mathcal{D}^E$.*

*Preuve.* On peut le vérifier directement, mais on peut aussi faire la remarque que $(\mathcal{D}^E, \preceq)$ est isomorphe, en tant que *p.o.*, au produit direct $\Pi_{x \in E} \mathcal{D}_x$ muni de l'ordre produit, chaque $\mathcal{D}_x$ étant identique à $\mathcal{D}$, et utiliser la remarque suivante.

**Remarque 25** *Isomorphismes de p.o.*
*On rappelle que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des ordres (partiels), un* morphisme $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *est juste une fonction croissante. Pour que $f$ soit un* isomorphisme *d'ordres, c'est à dire un morphisme inversible (à gauche et à droite) dont l'inverse est aussi morphisme, il suffit qu'elle soit bijective et que pour tous $x, y \in \mathcal{D}$ on ait $x \preceq y$ ssi $f(x) \preceq f(y)$. On remarquera que si $f$ est un isomorphisme alors $f$ commute à tous les sups existants : si $A \subseteq \mathcal{D}$ a un sup, alors $f^\bullet(A)$ a aussi un sup et $f(\vee A) = \vee f^\bullet(A)$ (exercice), et qu'il en est de même pour les infs.*

[3]On pourra noter que si $\mathcal{D}_1 =_{def} (P(D_1), \subseteq)$ et $\mathcal{D}_2 =_{def} (P(D_2), \subseteq)$ avec $D_1$ et $D_2$ disjoints, alors $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ est isomorphe, en tant qu'ordre partiel, à $(P(D_1 \cup D_2), \subseteq)$, mais ce n'est pas lui même un ensemble de parties (sauf exception, dans le cas par exemple où l'un des $D_i$ est un singleton. En résumé la classe des $P(D)$ n'est pas close par produit direct.

## 3.2 Fonctions continues.

**Dfinition 26** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux dcpos. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est* continue *si elle est croissante ($x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$) et si, pour tout $A$ filtrant non vide, on a : $f(\vee A) = \vee f^\bullet(A)$.*

Le fait d'exclure $A = \emptyset$ correspond à ne pas exiger d'une fonction continue qu'elle soit nécessairement *stricte*, au sens que $f(\perp) = \perp$. L'hypothèse de croissance est nécessaire pour que le deuxième membre de l'équation ait toujours un sens, en effet elle assure que $f^\bullet(A)$ est filtrant. On trouve souvent "*monotone*" à la place de "croissante" dans la littérature, mais c'est avec la même signification.

**Exemple 27** *1. Les fonctions constantes sont continues.*
*2. Les projections sont continues (et l'identité en particulier).*

**Remarque 28** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont deux dcpos et si $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme d'ordres partiels alors $f$ est continue ; et il en est évidemment de même pour son inverse $g$.*

**Remarque 29** *Soit $\mathcal{D}$ un p.o. ayant un plus petit élément et pas de suite strictement croissante infinie, alors $\mathcal{D}$ est un dcpo et toute fonction monotone de $\mathcal{D}$ dans un dcpo quelconque est continue (cf. Exercice 11).*

**Proposition 30** *Une fonction définie sur un produit direct fini est continue ssi elle est continue en chacun de ses arguments.*

*Preuve.* Commençons par remarquer qu'il est trivial qu'une fonction est monotone sur un produit fini ssi elle est séparément monotone (la direction "si" est fausse pour les produits infinis).
Il est clair que toute fonction continue sur un produit est continue composante par composante. Réciproquement soit $f : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \to \mathcal{E}$ et soit $A \subseteq \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ filtrant. Par le Lemme 21 nous savons que $\vee A = \vee(A_1 \times A_2) = (\vee A_1, \vee A_2)$ où $A_1$ et $A_2$ sont les projections de $A$. Donc, si $f$ est continue par rapport à chaque composante, $f(\vee A) = f(\vee A_1, \vee A_2) = \vee\{\, \vee\{\, f(d_1, d_2) \,/\, d_2 \in A_2 \,\} \,/\, d_1 \in A_1 \,\} = \vee\{\, f(d_1, d_2) \,/\, (d_1, d_2) \in A_1 \times A_2 \,\} = \vee f^\bullet(A)$. Les deux dernières égalités se démontrent en remarquant que chacun des sups majore l'autre sup parce qu'il majore l'ensemble dont on prend le sup [4].

**Proposition 31** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des dcpos alors l'ensemble $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, muni de l'ordre extensionnel, est aussi un dcpo. C'est un treillis complet si $\mathcal{E}$ en est un..*

*Preuve.* Soit $B$ un sous-ensemble quelconque de $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$, et supposons que la fonction $F_B$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ qui est définie pour tout $x \in D$ par $F_B(x) = \vee_{f \in B} f(x)$ est bien définie, c'est-à-dire que le sup existe pour tout $x$ (ce qui est le cas si

[4] On pourrait aussi utiliser un lemme général (à deviner) sur l'associativité et la commutativité des sups dans les p.o., lemme qui s'appliquerait aussi à plusieurs autres des preuves de ce chapitre.

$B$ est filtrant, ou pour tout $B$ si $\mathcal{E}$ est un treillis complet (cf. Corollaire 24)). Nous allons vérifier que $F_B$ est continue, ce qui impliquera clairement que c'est le sup de $B$ dans $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$.
• Monotonicité : supposons $x \preceq y$, alors pour toute $f \in B$ on a $f(x) \preceq f(y)$, donc $f(x) \preceq \vee_{f \in B} f(y)$, donc $\vee_{f \in B} f(y)$ est un majorant commun à tous les $f(x)$, donc il est plus grand que $\vee_{f \in B} f(x)$; finalement $F_B(x) \preceq F_B(y)$.
• Soit $A \subseteq \mathcal{D}$ un ensemble filtrant non vide. Alors
$F_B(\vee A) =_{def} \vee_{f \in B} f(\vee A)$
$= \vee_{f \in B} \vee \{\, f(x) \,/\, x \in A \,\}$ (continuité des $f$ )
$= \vee\{\, f(x) \,/\, x \in A$ et $f \in B\}$ $(*)$
$= \vee_{x \in A} \vee \{\, f(x) \,/\, f \in B \,\}$ $(**)$
$= \vee_{x \in A} F_B(x)$
$=_{def} \vee F_B^{\bullet}(A)$.
$(*)$ se démontre ainsi : $\{\, f(x) \,/\, x \in A \,\} \subseteq \{\, f(x) \,/\, x \in A$ et $f \in B\}$, donc $\vee\{\, f(x) \,/\, x \in A$ et $f \in B\}$ est un majorant de $\{\, f(x) \,/\, x \in A \,\}$, donc de $\vee\{\, f(x) \,/\, x \in A \,\}$; comme ceci est vrai pour toute $f \in B$, on a $\vee_{f \in B} \vee \{\, f(x) \,/\, x \in A \,\} \preceq \vee\{\, f(x) \,/\, x \in A$ et $f \in B\}$. Inversement, puisque tout $f(x)$ est majoré par $\vee_{f \in B} \vee \{\, f(x) \,/\, x \in A \,\}$, on a $\vee\{\, f(x) \,/\, x \in A$ et $f \in B\} \preceq \vee_{f \in B} \vee \{\, f(x) \,/\, x \in A \,\}$.
$(**)$ se démontre de la même manière.

**Proposition 32** *1. Si $f, g \in [\mathcal{D} \to \mathcal{D}']$ alors $(f, g) \in [\mathcal{D} \to \mathcal{D}'^2]$*
*2. La fonction $eval_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} : ([\mathcal{D} \to \mathcal{D}'] \times \mathcal{D}) \to \mathcal{D}'$ qui associe $f(d)$ au couple $(f, d)$ est continue.*
*3. La composée de deux fonctions continues est continue.*
*4. L'opérateur de composition est lui-même continu.*

*Preuve.* 1. est immédiat.
2. est facile (composante par composante).
3. Si $f$ et $g$ sont continues, alors $(g \circ f)(\vee A) = g(f(\vee A)) = g(\vee f^{\bullet}(A)) = \vee g^{\bullet}(f^{\bullet}(A)) = \vee (g \circ f)^{\bullet}(A)$.
4. Si $B$ un sous-ensemble filtrant de $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$, et $F_B = \vee B$, alors :
$(g \circ F_B)(x) = g(F_B(x)) = g(\vee_{f \in B} f(x))$ (definition de $F_B$)
$= \vee_{f \in B} g(f(x))$ (continuité de $g$)
$= \vee_{f \in B} (g \circ f)(x) = (\vee_{f \in B} (g \circ f))(x)$.
donc $g \circ \vee B = \vee_{f \in B} (g \circ f)$, comme souhaité.
et symétriquement pour le premier argument de $\circ$.

**Proposition 33** *Si $f \in [(\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \to \mathcal{D}]$ alors la fonction $curry(f) : \mathcal{D} \to [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ qui est définie par $curry(f)(x)(y) = f(x, y)$ est continue. De plus curry est un isomorphisme entre $[\mathcal{D} \to [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]]$ et $[(\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \to \mathcal{D}]$ dont l'application inverse est définie par $décurry(g)(x, y) =_{def} g(x)(y)$.*

**Remarque 34** *(pour les mathématiciens).*
*La continuité dont il est question ici est bien une continuité "topologique" :*

*Les fonctions continues sur $\mathcal{D}$ sont exactement celles qui sont continues vis-à-vis de la "topologie de Scott" dont les ouverts sont les sous-ensembles $U$ de $\mathcal{D}$ tels que :*
*a)* $d \in U$ *et* $d \preceq d'$ *impliquent* $d' \in U$ *, et*
*b) si* $A$ *est filtrant non vide et* $\sup(A) \in U$ *, alors* $A \cap U \neq \emptyset$.
*Il est facile de voir que ce n'est pas une topologie séparée. Toutefois si $\mathcal{D}$ est un dcpo algébrique (cf. Section 3.4) il est facile de montrer que pour tous $d, d' \in \mathcal{D}$ tels que $d \neq d'$ alors il existe un ouvert $U$ qui contient $d$ et pas $d'$, soit il en existe un qui contient $d'$ et pas $d$, résultat qui est d'ailleurs vrai dans un cadre plus général.*

## 3.3 Modélisation du $\lambda$-calcul pur.

**Dfinition 35** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux dcpo. On dira que $\mathcal{D}$* est un retract de *$\mathcal{D}'$ si il existe deux applications continues $f \in [\mathcal{D} \to \mathcal{D}']$ et $g \in [\mathcal{D}' \to \mathcal{D}]$ telles que $g \circ f = id_{\mathcal{D}}$. On notera $\mathcal{D} \lhd \mathcal{D}'$, ou plus précisément $(f, g) : \mathcal{D} \lhd \mathcal{D}'$. On dit aussi que $f$ est inversible à gauche et $g$ à droite.*

**Dfinition 36** *Un* dcpo réflexif *est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \lambda, \alpha)$ tel que $(\lambda, \alpha)$ : $[\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \lhd \mathcal{D}$ (en particulier $\alpha \circ \lambda = id_{[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]}$).*

Noter que $\lambda$ est injective (et $\alpha$ surjective), et que $\mathcal{D}$ est infini si il n'est pas réduit à $\{\perp\}$. En effet il est immédiat que si $\mathcal{D}$ est un dcpo fini non trivial alors $[\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$ a strictement plus d'éléments que $\mathcal{D}$, ce qui contredirait l'injectivité de $\lambda$.

*Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.*

**Thorme 37** *Tout dcpo réflexif engendre un modèle du $\lambda$-calcul pur, que nous noterons aussi $\mathcal{M}$. Cette modélisation est triviale ssi $card(\mathcal{D}) = 1$. Le modèle est extensionnel ssi $\lambda \circ \alpha = id_{\mathcal{D}}$, ssi $(\lambda, \alpha)$ est une paire d'isomorphismes inverses.*

Nous verrons dans le chapitre suivant que l'on peut construire une très grande variété de treillis complets, et d'autres dcpos, qui sont réflexifs.

*A partir de maintenant on fixe un dcpo reflexif $(D, \lambda, \alpha)$.*

**Dfinition 38** *Un* environnement *est ici une fonction partielle $\rho$ de $V$ dans $\mathcal{D}$. On notera $\mathcal{D}^W$ l'ensemble des environnements de domaine $W$. Etant donnés $\bar{x}, W$ et $\rho \in \mathcal{D}^W$, ainsi que $\bar{d} \in \mathcal{D}^{\bar{x}}$, l'environnement $\rho[\bar{x} := \bar{d}]$ est défini par $dom(\rho[\bar{x} := \bar{d}]) = W \cup \bar{x}$ [5], $\rho[\bar{x} := \bar{d}](x_i) = d_i$ pour tout $i$, et enfin $\rho[\bar{x} := \bar{d}](y) = \rho(y)$ pour tout $y \in W - \bar{x}$.*

Il suit du Corollaire 24 que les ensembles $\mathcal{D}^W$, munis de l'ordre produit, sont des *dcpo*.

[5] En assimilant $\bar{x}$ et son ensemble sous-jacent.

**Lemme 39** *Pour tous $\bar{x}, W$ la fonction $(\rho, \bar{d}) \mapsto \rho[\bar{x} := \bar{d}]$ de $\mathcal{D}^W \times \mathcal{D}^{l(\bar{x})} \rightarrow \mathcal{D}^{W \cup \bar{x}}$ est continue.*

*Preuve :* elle est facile et laissée en exercice (on pourra travailler avec $l(\bar{d}) = 1$ et séparément sur $\rho$ et $\bar{d}$).

*L'interprétation des termes* se fait de la manière suivante, par induction sur la longueur des termes, et à chaque étape $t$ pour tous les environnements $\rho$ dont le domaine contient $Vlib(t)$.

$|x|_\rho =_{def} \rho(x)$
$|uv|_\rho =_{def} \alpha(|u|_\rho)(|v|_\rho)$
$|\lambda x.u|_\rho =_{def} \lambda( d \in \mathcal{D} \mapsto |u|_{\rho[x:=d]})$.

Il reste à justifier que ceci est une bonne définition (c'est-à-dire que la fonction sur laquelle porte le $\lambda$ est continue). On notera que cette fonction est la composée de : $d \mapsto \rho[x := d]$, qui est continue par le lemme précédent, et de $\rho' \mapsto |u|_{\rho'}$. Ceci suggère de montrer, au fur et à mesure que l'on définit $|t|_\rho$, que $|t|_\rho$ dépend continûment de $\rho$ (Lemme 40).
Le lecteur vérifiera ensuite que $|t|_\rho$ ne dépend que de la valeur de $\rho$ sur les variables libres de $t$. Il notera aussi que la définition même de $|-|_\rho$ fait que, si elle est correcte, l'égalité qu'elle engendre est nécessairement contextuelle.

**Lemme 40** *Pour tout $t \in \Lambda$ et pour tout $W$ contenant $Vlib(t)$, la fonction $h_t : \mathcal{D}^W \rightarrow \mathcal{D}$ définie par $h_t(\rho) = |t|_\rho$ est bien définie et continue.*

*Preuve.* Par induction sur la longueur de $t$.
∘ Si $t$ est une variable, alors $h_t$ est une projection, et est donc continue.
∘ Si $t \equiv uv$, alors $h_t(\rho) =_{def} \alpha(h_u(\rho))(h_v(\rho))$, donc $h_t = eval \circ (\alpha \circ h_u,\, h_v)$, et on conclut avec l'hypothèse d'induction et la Proposition 32
∘ Si $t \equiv \lambda x.u$ alors $h_t(\rho) =_{def} \lambda( d \in \mathcal{D} \mapsto |u|_{\rho[x:=d]}) = \lambda(h_u \circ (curry(\phi_x)(\rho)))$, où $\phi_x$ est la fonction $(\rho, d) \mapsto \rho[x := d]$. C'est maintenant un travail de routine de déduire de l'hypothèse d'induction ainsi que des Propositions 32 et 33, et du Lemme 39, d'abord que $h_t$ est bien définie (c'est-à-dire que l'argument de $\lambda$ est bien une fonction continue) et ensuite que $h_t$ est continue, en remarquant que $h_t = \lambda \circ C \circ (curry(\phi_x), k)$, où $C$ est l'opérateur de composition et $k$ est la fonction constante qui associe $h_u$ à tout $\rho$..

Si $t$ est clos son interprétation, qui est indépendante de $\rho$, sera notée $|t|$.
*Remarque.* On aurait pu aussi bien travailler ici uniquement avec des environnements totaux, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{D}^V$.

**Remarque 41** *Le lemme précédent exprime que pour tout terme $t[\bar{x}]$ la fonction $\bar{d} \mapsto \left|t[\bar{x} := \bar{d}]\right|$ est continue sur $\mathcal{D}^{l(\bar{x})}$; autrement dit que (l'interprétation de) tout terme clos à paramètres dans le modèle dépend continûment de ces paramètres.*

**Exemple 42** *d'interprétation de termes :*
$|I| = \lambda(id_{\mathcal{D}})$ *et* $|\varepsilon| = \lambda(\lambda \circ \alpha)$, *où* $I = \lambda x.x$ *et* $\varepsilon = \lambda x.\lambda y.xy$.

**Lemme 43** *Pour tous $t, u, \rho$ on a :*
*1.* $|t[x := u]|_\rho = |t|_{\rho[x:=|u|_\rho]}$
*2.* $|(\lambda x.t)u|_\rho = |t[x := u]|_\rho$

*Preuve.* Laissée en exercice. 1. est par induction sur $t$ (5 cas) et 2. suit directement de 1. et de la définition de$| \ |_\rho$. **A Faire**.

**Lemme 44** *$Th(\mathcal{M})$ est une $\lambda$-théorie, qui est triviale ssi $card(\mathcal{D}) = 1$.*
*C'est une $\lambda\eta$-théorie (i.e. une $\lambda$-théorie extensionnelle) ssi $\lambda \circ \alpha = id_\mathcal{D}$.*

*Preuve.* On sait déja que $Th(\mathcal{M})$ est contextuelle ; le fait qu'elle contienne $=_\beta$ suit du lemme précédent, c'est donc une $\lambda$-théorie (cf. Chapitre 1).
$Th(\mathcal{M})$ est triviale ssi elle contient $0 = 1$ (i.e. elle égalise les deux booléens) ; dans ce cas elle contient aussi $x = y$ (par contextualité) or cette égalité ne peut être vraie dans $\mathcal{M}$ que si $\mathcal{D}$ est réduit à un point.
$Th(\mathcal{M})$ est extensionnelle ssi $\mathcal{M} \models \varepsilon = I$, compte tenu de la valeur de l'interprétation de ces deux termes (Example 42) et du fait que $\lambda$ est injective, ceci est vrai ssi $\lambda \circ \alpha = id_\mathcal{D}$.

$1 \equiv V$ et $0 \equiv F$ ! ! !

**Notation 45** *Pour $u, v \in \Lambda(\mathcal{M})$, les notations $\mathcal{M} \models u \preceq v$ ou $u \preceq_\mathcal{M} v$ signifient que, pour tout $\rho$ dont le domaine contient les variables libres de $u$ et $v$, on a $|u|_\rho \preceq |v|_\rho$*

De la définition de $|-|_\rho$ et de la monotonicité de $A$ et $\lambda$ il suit facilement que :

**Lemme 46** *La relation $\preceq_\mathcal{M}$ est contextuelle.*

**Corollaire 47** *Si $\mathcal{M} \models 0 \preceq 1$ (ou l'inverse) alors $\mathcal{M}$ est trivial.*

*Preuve.* Il suit de l'hypothèse et du lemme précédent que $\mathcal{M}$ satisfait $001 \preceq 101$, donc $1 \preceq 0$, donc $1 = 0$.

**Remarque 48** *la plupart du temps on abbrègera $\alpha(d)(d')$ en $d.d'$ ou $dd'$.*

## 3.4 Domaines algébriques et premiers algébriques.

Dans le suite $\mathcal{D}$ désigne toujours un dcpo.

**Dfinition 49** *Un élément $h$ de $\mathcal{D}$ est* compact *ou* "fini" *ssi pour tout ensemble filtrant non vide $A \subseteq \mathcal{D}$ on a : $h \preceq \vee A \Rightarrow (\exists d \in A \ h \preceq d)$. En particulier $\perp$ est toujours compact.*

**Notation 50** *$K(\mathcal{D})$ est l'ensemble des éléments compacts de $\mathcal{D}$*
*Pour $d \in \mathcal{D}$ on définit $A_d =_{def} K(\mathcal{D}) \cap \downarrow d$.*

**Dfinition 51** *$\mathcal{D}$ est* algébrique *si pour tout $d \in \mathcal{D}$ l'ensemble $A_d$ est filtrant et $d = \vee A_d$.*

**Dfinition 52** *$\mathcal{D}$ est un* domaine de Scott *si c'est un dcpo algébrique tel que tout sous-ensemble majoré a un* sup.

**Remarque 53** *Il est facile de voir que si $\mathcal{D}$ est Scott, alors le sup de tout ensemble fini majoré de compacts est compact.*

**Dfinition 54** *Un élément $p \neq \perp$ d'un domaine de Scott est* premier *si pour tout ensemble non vide et majoré $A \subseteq \mathcal{D}$ on a : $p \preceq \vee A \Rightarrow (\exists d \in A\ p \preceq d)$. Une définition équivalente est : $p$ est compact et pour tous $d, d'$ compatibles dans $\mathcal{D}$ on a $p \preceq d \vee d' \Rightarrow (p \preceq d$ ou $p \preceq d')$.*

**Notation 55** *$W(\mathcal{D})$ est l'ensemble des éléments premiers de $\mathcal{D}$ et $P_d = W(\mathcal{D}) \cap \downarrow d$.*

On notera que $W(\mathcal{D}) \subseteq K(\mathcal{D})$ et que $P_d \subseteq A_d$.

**Dfinition 56** *Un domaine de Scott $\mathcal{D}$ est* premier-algébrique *si pour tout $d \in \mathcal{D}$ on a $d = \vee P_d$.*

**Exemple 57** *A l'exception de $I(R)$, tous les exemples que nous avons donnés dans la Section 3.1 sont des domaines de Scott premier-algébriques. Plus précisément :*
*Si $\mathcal{D} = P(D)$ on a $K(\mathcal{D}) = P^{fin}(D)$ et $W(\mathcal{D}) = \{\{\alpha\} / \alpha \in D\}$.*
*Si $\mathcal{D} = P^{coh}(D, \frown\!\!\!\!\smile)$, on a $K(\mathcal{D}) = P^{cohfin}(D)$ et $W(\mathcal{D})$ comme ci-dessus.*
*Si $\mathcal{D} = S(D, \leq)$, on a $K(\mathcal{D}) = \{\downarrow a / a \in P^{fin}(D)\}$ et $W(\mathcal{D}) = \{\downarrow \{\alpha\} / \alpha \in D\}$.*
*Si $\mathcal{D} = S^{coh}(D, \frown\!\!\!\!\smile, \leq)$, on a $K(\mathcal{D}) = \{\downarrow a / a \in P^{cohfin}(D)\}$ et $W(\mathcal{D})$ comme ci-dessus.*
*Si $\mathcal{D} = (Str(\Sigma), \sqsubseteq)$ on a $K(\mathcal{D}) = \Sigma^{<\omega} = W(\mathcal{D})$.*

**Exemple 58** *$I(R)$ a pour seul élément compact $\perp$, c'est à dire l'intervalle $R$ lui même ; il est donc très très loin d'être algébrique.*

**Lemme 59** *Etant donnés deux dcpos $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$, on a $K(\mathcal{D} \times \mathcal{E}) = K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{E})$ et $W(\mathcal{D} \times \mathcal{E}) = W(\mathcal{D}) \times W(\mathcal{E})$, et le dcpo $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ est algébrique (resp. Scott, resp. premier algébrique) ssi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ le sont.*

**Lemme 60** *Si $\mathcal{D}$ est un dcpo algébrique, et $W$ un ensemble quelconque, alors $\mathcal{D}^W$ est algébrique, et $K(\mathcal{D}^W) = \{\rho\ /\ supp(\rho)$ est fini et $\forall x \in W\ (\rho(x) \in K(\mathcal{D}))\}$, où $supp(\rho) =_{def} \{x / \rho(x) \neq \perp\}$. Si $\mathcal{D}$ est Scott alors $\mathcal{D}^W$ est Scott.*

**Dfinition 61** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux domaines de Scott. On dira que $f \in \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ est* additive *si elle est continue et commute à tous les sups d'ensembles majorés.*

Par exemple, pour toute fonction $\theta : D \to E$, les fonctions $\theta^{\bullet}$ et $\theta^{\bullet -}$ sont additives.

Dans un domaine algébrique tout élément $d$ est ainsi approximable par les éléments “finis” qui sont dessous. Il en résulte que la valeur d'une fonction continue $f$ en $d \in \mathcal{D}$ est connue dès qu'on connait la valeur de $f(h)$ pour tout $h \in A_d$. Plus précisément la fonction continue $f$ est déterminée par sa trace, définie de la manière suivante.

**Dfinition 62** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux domaines algébriques et $f \in [\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$.*
*La* trace de $f$ *est définie par :*
$Tr^1(f) =_{def} \{ (h,k) \in K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{E}) \ / \ k \preceq f(h) \}$
*Si $\mathcal{E}$ est premier algébrique il est plus intéressant de travailler avec :*
$Tr^2(f) =_{def} \{ (h,p) \in K(\mathcal{D}) \times W(\mathcal{E}) \ / \ p \preceq f(h) \}$
*et si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont engendrés par des pcs $(D, \leq_D, \stackrel{\frown}{\smile}_D)$ et $(E, \leq_E, \stackrel{\frown}{\smile}_E)$ avec :*
$Tr^3(f) =_{def} \{ (a, \alpha) \in P^{cohfin}(D) \times E \ / \ \alpha \in f(\downarrow a) \}$

On notera que $(\bot, \bot)$ est toujours dans $Tr^1(f)$, mais est automatiquement exclu des autres formes de trace.

**Lemme 63** *$Tr$ est continue (resp. additive) et injective de $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ dans $P(U)$, où $U =_{def} K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{E})$ (resp. $K(\mathcal{D}) \times W(\mathcal{E})$ ) (resp. $P^{cohfin}(D) \times E$ ).*

*Preuve.* On vérifie facilement que les $Tr^i$ sont continues (resp. additives), et que si $f$ est continue, alors :
dans le premier cas $f(d) = \vee\{ k \in K(\mathcal{E}) \ / \ \exists h \in A_d \ (h,k) \in Tr^1(f) \}$.
dans le second : $f(d) = \vee\{ p \in W(\mathcal{E}) \ / \ \exists h \in A_d \ (h,p) \in Tr^2(f) \}$.
et dans le troisième : $f(d) =\downarrow \{ \alpha \in E \ / \ \exists a \subseteq_{fin} d \ (a, \alpha) \in Tr^3(f) \}$.
On vérifiera au passage que le premier sup porte sur un ensemble filtrant et le second sur un ensemble majoré.

**Exercice 64** *1. Supposons que $\mathcal{E}$ est un treillis complet algébrique (resp. premier-algébrique) on définit : $\mathcal{T} =_{def} S(U, \preceq_U)$, où $\preceq_U =_{def} (\preceq_{\mathcal{D}}^{op} \times \preceq_{\mathcal{E}})$.*
*Montrer que $Tr$ est un isomorphisme entre $([\mathcal{D} \to \mathcal{E}], \preceq)$ et $(\mathcal{T}, \subseteq)$, en exhibant un morphisme inverse de p.o.*
*2. Dans le cas où $\mathcal{E}$ n'est pas un treillis complet il faut remplacer $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T}' =_{def} \{T \in \mathcal{T} \ / \forall S \subseteq_{fin} T \ \ (S_1$ majoré $\Rightarrow S_2$ majoré$) \}$, où $S_1$ et $S_2$ sont les projections de $S$.*

**Notation 65** *Les fonctions $\varepsilon_{h,k} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sont définies par $\varepsilon_{h,k}(d) = k$ si $h \preceq d$, et $\bot$ sinon. On vérifiera qu'elles sont continues ssi $h \in K(\mathcal{D})$, compactes dans $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ ssi (en plus) $k \in K(\mathcal{E})$, et sont des éléments premiers ssi $k \in W(\mathcal{E})$.*

**Exercice 66** *$\varepsilon_{h,k} \preceq f$ ssi $(h,k) \in Tr(f)$ ($f$ continue et $h, k$ compacts).*

**Exercice 67** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont Scott alors $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ est Scott, et pour tout $A \subseteq [\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ majoré, $(\vee A)(d) = \vee_{f \in A} f(d)$. Les éléments compacts sont les sups d'ensembles finis formés de fonctions $\varepsilon_{h,k}$ compatibles. Si $\mathcal{E}$ est premier algébrique, alors $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ est premier algébrique et ses éléments premiers sont les fonctions $\varepsilon_{h,p}$, $p \in W(\mathcal{E})$.*
Question subsidiaire : *expliciter à quelle condition (nécessaire et suffisante) un ensemble de fonctions $\varepsilon_{h,k}$ est majoré.*

Les classes suivantes de domaines sont donc closes par isomorphisme, produit direct et espaces de fonctions continues ; elles contiennent aussi tous les domaines réduits à un point. Il s'agit respectivement de la classe des dcpos, des treillis complets, des domaines de Scott, des dcpos premier-algébriques, et des ... intersections de ces classes. Mais on notera que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont seulement algébriques, alors $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ n'est pas nécessairement algébrique (c'est la raison pour laquelle Scott a demandé l'existence des sups d'ensembles majorés dans la définition de la classe de domaines qui porte maintenant son nom).

**Exercice 68** *Si $\mathcal{D}$ est un dcpo algébrique et si $K(\mathcal{D})$ est dénombrable (ce qui est le cas des $S^{coh}(D, \leq, \frown)$ si $D$ est dénombrable), alors :*
*1. tout élément $d$ de $\mathcal{D}$ est sup d'une suite croissante $(h_n)_{n\in\omega}$ de compacts,*
*2. pour tout ensemble $A$ filtrant il existe une suite croissante $(d_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de $A$ telle que $\vee A = \vee d_n$, et :*
*3. les fonctions continues sur $\mathcal{D}$ sont exactement les fonctions $\sigma$-continues, qui sont par définition les fonctions qui commutent aux sups de suites croissantes indexées par $\omega$.*

## 3.5 Les intuitions derrière la monotonicité, la continuité et l'algébricité.

Quant on travaille sur des $\lambda$-calculs simplement typés on peut interpréter les types de base par des ensembles quelconques et $\sigma \to \tau$ par l'ensemble de toutes les fonctions de $|\sigma|_\rho$ dans $|\tau|_\rho$. Cette interprétation, qui est dite "*pleine*", a peu d'applications, et de toute manière on s'apperçoit vite qu'on ne peut pas l'étendre aux calculs typés dont la logique est riche (ex : système $F$), ni au $\lambda$-calcul pur, sans rencontrer de contradiction (le point commun est un usage substantiel de la self-application, et les contradictions souvent obtenues par un argument de cardinalité) [6].

Les interprétations fonctionnelles des divers $\lambda$-calculs se passent en fait dans des catégories [7] dont les objets sont des "domaines", qui sont des structures partiellement ordonnées (au moins), et dont les morphismes sont des applications (au moins) monotones.

L'introduction d'un ordre partiel et la condition de monotonicité correspondent à la vision de Scott des modèles du $\lambda$-calcul (ou des types) comme étant essentiellement des ensembles dont chaque élément est identifié avec un ensemble d'informations (ou d'observations), et des fonctions calculables comme des fonctions (au moins) croissantes sur ces ensembles (augmenter l'information sur $x$ est censée augmenter celle sur $f(x)$ ); la croissance étant relative à l'inclusion. La notion d'élément compact correspond à celle d'un élément descriptible à partir d'un ensemble fini d'informations élémentaires.

A posteriori la monotonicité s'est trouvée aussi justifiée par le fait qu'il est en fait très difficile de trouver des modèles du $\lambda$-calcul pur qui ne sont pas ordonnables

[6] Par exemple, pour le $\lambda$-calcul pur : si $M^M$ s'injecte dans $M$ c'est que $card(M) = 1$.

[7] La définition d'une *catégorie* se trouve partout, par exemple dans le livre de Barendregt [Bar84]. On pourra voir aussi les premières pages du livre de MacLane (Categories for the working mathematician). La modélisation abstraite du $\lambda$-calcul en termes de catégories est développée dans les livres de Asperti-Longo et de Amadio-Curien.

[8] : le modèle des termes $\Lambda/ =_\beta$ lui-même n'a été montré "non-ordonnable" que très récemment (Selinger 96). Pour les mêmes raisons de cardinalité on ne peut pas, si on veut modéliser le $\lambda$-calcul non typé (ou des $\lambda$-calculs typés par des logiques très permissives), accepter toutes les fonctions monotones comme morphismes. Le travail fait dans la section 3.3 montre que la continuité est une restriction adéquate, et nous verrons que la stabilité, qui est une restriction plus forte, convient également [9]. L'idée de Scott était que "les fonctions ou fonctionnelles [10] calculables induisent des fonctions continues sur des domaines". Nous en donnons maintenant une illustration, en connection avec le Théorème de Myhill-Shepherdson.

Rappelons tout d'abord que toute fonction partielle $f$ sur $N$ peut être vue comme une fonction totale sur $N_\perp$ (on donne la valeur $\perp$ à $\perp$ et à tous les entiers qui n'étaient pas dans $dom(f)$ ). La signification intuitive de $\perp$ étant ici que c'est un entier virtuel sur lequel on n'a aucune information. Nous avons vu par ailleurs que pour les fonctions $f : N_\perp^n \to N_\perp$ la continuité coincidait avec la monotonicité (puisque $N_\perp^n$ n'a pas de suite strictement croissante infinie). Ceci n'est plus vrai si l'on considère les fonctionnelles. Par exemple, $F : (N_\perp \to N_\perp) \to N_\perp$ est continue si et seulement si elle est monotone et si de plus pour toute $f : N_\perp \to N_\perp$ il existe une restriction finie $g$ de $f$ telle que $F(f) = F(g)$ [11]. Ainsi, la valeur de $F$ sur $f$, quand elle est différente de $\perp$, ne dépend que d'une partie finie du graphe de $f$. L'analogue de cette remarque [qui concerne les fonctionnelles continues sur sur l'espace de fonctions continues sur $N_\perp$] pour les fonctionnelles récursives sur les fonctions récursives est le Théorème de Myhill-Shepherdson, qui est intuitivement vrai, du point de vue de la calculabilité, puisque si un algorithme effectuant le calcul de $F(f)$ avait besoin regarder une portion infinie du graphe de $f$ pour rendre le résultat, le calcul ne terminerait pas.

## 3.6 Opérateurs de point fixe sur les domaines.

Les lemmes suivants sont utiles à connaître. Ils nous aideront par la suite à construire des modèles satisfaisant des contraintes supplémentaires, et il nous

[8]La définition d'"ordonnable" dont nous avons besoin ici est la suivante : un couple $(M, .)$ formé d'un ensemble $M$ et d'une fonction binaire sur $M$ (appelée application) est ***ordonnable*** si on peut le munir d'un ordre partiel $\preceq$ non trivial tel que l'application est monotone pour cet ordre.

[9]En fait une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse modéliser le $\lambda$-calcul est que l'on ait une "catégorie cartésienne close". Comme nous l'avons vu dans le cas particulier de la sémantique continue, certaines propriétés de clôtures de la classe des objects ainsi que de celle des morphismes sont en effet nécessaires. Pour le $\lambda$-calcul pur il faut de plus l'existence d'objects réflexifs non triviaux.

[10]Etant donné un type de base, mettons $N$ (entiers) ou $B$ (booléens), on distingue les *fonctions*, dont le domaine est un type de base ou un produit de types de bases, des *fonctionnelles*, qui sont par définition les fonctions (au sens usuel) dont le domaine contient un espace de fonctions.

[11]Où $g$ est *finie* si $\{ x \in N \ / \ g(x) \neq \perp \}$ is finie. On utilise le fait que $f$ est le sup de l'ensemble filtrant $A_f =_{def} \{ g : N_\perp \to N_\perp \ / \ g$ finie et $g \leq f \}$, en d'autres termes que $N_\perp \to N_\perp$ est algébrique, et qu'il n'y a pas de chaine infinie dans $N_\perp$.

permettront aussi d'étendre les techniques de réductibilité aux cadres plus complexes que ceux du système $E$ (ou $F$) qui sont nécessaires pour effectuer l'étude de modèles moins simples que le modèle d'Engeler dans les chapitres suivants.

**Lemme 69** *(Knaster-Tarski, 1928,1950) Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ une fonction croissante sur un ensemble chaîne-complet et si $d \in \mathcal{D}$ est tel que $d \preceq f(d)$ , alors $f$ admet un plus petit point fixe $\succeq d$ . En particulier $f$ a toujours un plus petit point fixe. Si $f$ est continue ces plus petits points fixes sont respectivement $\vee f^n(d)$ et $\vee f^n(\perp)$ .*

*Démonstration.* Soit $d_\alpha$ la suite ordinale définie par $d_0 \equiv d$ , $d_{\alpha+1} \equiv f(d_\alpha)$ et $d_\alpha \equiv \bigvee_{\beta<\alpha} d_\beta$ si $\alpha$ est limite. Si cette suite est bien définie (aux ordinaux limites) et croissante, alors elle est stationnaire (pour des raisons de cardinalité), il existe un plus petit $\alpha$ tel que $d_{\alpha+1} = d_\alpha$ et donc $d_\alpha$ est un point fixe de $f$ (et après la suite est constante). D'autre part il est facile de montrer, que tout point fixe $x$ de $f$ est plus grand que $d_\beta$ pour tout $\beta$ (par induction sur $\beta$ ), donc que le point fixe précédemment exhibé est bien le plus petit. Il reste à montrer que la suite est bien définie et est monotone (en particulier ce sera une chaîne). Pour cela on montre, par induction sur $\alpha$, que $(d_\beta)_{\beta<\alpha}$ est bien définie et monotone (et donc une chaîne), et que $d_\alpha \preceq f(d_\alpha)$ ; pour $\alpha = 0$ c'est évident, pour le reste c'est facile ; remarquons seulement que si $\alpha$ est limite $(d_\beta)_{\beta<\alpha}$ est une chaîne, donc son sup est bien défini. La troisième assertion du lemme est également facile à voir.

Dans le cas où $\mathcal{D}$ est un treillis complet ces (plus petits) points fixes peuvent être atteints par une autre voie :

**Lemme 70** *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ une fonction croissante sur un treillis complet. Si $d \in \mathcal{D}$ est tel que $d \preceq f(d)$ , alors $f$ admet un plus petit point fixe $\succeq d$ , à savoir :*

$$\wedge\mathcal{F}\ ,\ \text{où } \mathcal{F} =_{def} \{x \in \mathcal{D}\ /\ d \preceq x \text{ et } f(x) \preceq x\}$$

*En particulier, $f$ admet toujours un plus petit point fixe.*

*Démonstration.* $\mathcal{F}$ est non vide car elle contient $\top$; elle est close par inf quelconque, et stable par $f$ ; il en résulte que $d' =_{def} \wedge\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$ ainsi que $f(d')$ ; comme $d'$ est manifestement le plus petit élément de $\mathcal{F}$ on a : $d' \preceq f(d')$ ; comme $d'$ est dans $\mathcal{F}$ on a $f(d') \preceq d'$ ; ainsi $d'$ est un point fixe plus grand que $d$, et c'est manifestement le plus petit.

L'application qui associe à toute $f$ continue son plus petit point fixe, est appellée *opérateur de plus petit point fixe* de $\mathcal{D}$. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il existe des modèles qui interprètent tous les combinateurs de point fixes par l'opérateur de plus petit point fixe du domaine sous-jacent. Ce n'est pas le cas général comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 71** *Si un modèle du $\lambda$-calcul satisfait $\mathcal{M} \models \omega \neq \perp$ alors l'interprétation de $Y$ dans $\mathcal{M}$ n'est pas l'opérateur de plus petit point fixe (Aide : $\omega =_\beta YI$ ).*

## 3.7 Applications et limites de la sémantique continue.

### 3.7.1 Arguments de réfutation.

**Exemple 72** *Montrons qu'il n'existe pas de terme $t \in \Lambda^0$ tel que pour tout $r \in \Lambda^0$ on ait : $tr =_\beta 1$ si $r$ est résoluble et $tr =_\beta 0$ sinon.*

rappel : ici $1 \equiv V$ et $0 \equiv F$.

- *Argument sémantique.* Choisissons un modèle non trivial $\mathcal{M}$ qui satisfait $|\omega| = \perp$, où $\omega =_{def} \delta\delta$ (il en existe énormément, le plus simple étant le modèle d'Engeler que nous verrons au début du chapitre suivant). Puisque $\preceq_{\mathcal{M}}$ est contextuelle (Lemme 46) pour tous $t, r \in \Lambda^0$ on a : $t\omega =_{\mathcal{M}} t \perp \preceq_{\mathcal{M}} tr$. Si de plus $t$ remplit les conditions ci-dessus et $r$ est résoluble on a $tr =_{\mathcal{M}} 1$ et $t\omega =_{\mathcal{M}} 0$. On en déduit que $0 \preceq_{\mathcal{M}} 1$ et donc que $\mathcal{M}$ est trivial (Corollaire 47), contradiction. Nous avons en fait utilisé très peu de choses du modèle : la monotonicité de l'application, et l'interprétation par $\perp$ d'un non résoluble.
- *Argument syntaxique.* Il est élémentaire, mais pénible. On commence par remarquer que $t$ est nécessairement résoluble puisque $tx$ (par exemple) est résoluble. Sans perte de généralité on peut supposer que $t$ est une forme normale de tête. Procédant par élimination, on montre que nécessairement il commence par 3 lambda, mettons $\lambda x \lambda y \lambda z$ , que sa variable de tête ne peut pas être $x$ car alors $t\omega$ serait non résoluble, ni différente de $x$ car ça l'obligerait à être $y$ et aussi $z$ ; contradiction.
- *Argument récursiviste.* On pourrait ici utiliser un théorème qui dit qu'il n'existe pas de sous-ensemble non trivial de $\Lambda$ qui soit récursif et clos par $\beta$-équivalence [K. p.30, ou Bar]. Or si il existait un $t$ qui remplisse les conditions ci-dessus l'ensemble des termes clos résolubles serait un contre exemple, puisque la $\beta$-réduction gauche de $tr$ se terminerait dans tous les cas, sur 1 quand $r$ est résoluble, et sur 0 sinon, ce qui permettrait de décider si $r$ est résoluble ou pas.

*Compliquons un peu le problème.* Soit $B = \{0, 1\}$ . La fonction "*ou*" de $B^2$ dans $B$ , où 1 et 0 représentent respectivement le vrai et le faux, est évidemment récursive, donc il existe un terme clos normal $t$ tel que

$$t01 =_\beta t10 =_\beta t11 =_\beta 1 \text{ et } t00 =_\beta 0$$

mais on n'a pas de contôle sur ce qui se passe à l'extérieur de la clôture de $B$ par $\beta$-équivalence. On peut par exemple montrer, par des arguments analogues à ceux de l'exercice précédent que :

**Exercice 73** *Il n'existe pas dans $\Lambda$ de terme clos $t$ tel que pour tous $r, s \in \Lambda^0$*

$$\begin{array}{rcl} trs & = & _\beta 1 \textit{ ssi } (r,s) =_\beta (1,1) \textit{ ou } (0,1) \textit{ ou } (1,0) \\ trs & = & _\beta 0 \textit{ sinon} \end{array}$$

Mais supposons que l'on veuille montrer qu'il n'existe pas dans $\Lambda$ de "ou parallèle", c'est-à-dire de terme clos $t$ tel que, pour tous $r, s \in \Lambda^0$ :

$$\begin{array}{rcl} trs & = & _\beta 1 \text{ si } r =_\beta 1 \text{ ou } s =_\beta 1 \\ trs & = & _\beta 0 \text{ si } r =_\beta 0 \text{ et } s =_\beta 0 \end{array}$$

La démonstration syntaxique des exercices précédents s'adapte, mais l'argument sémantique de monotonicité ne suffit plus. Et le fait que l'application soit non seulement monotone mais continue n'apporte rien de plus (ici).
Ceci dit, on peut faire l'observation suivante dans tout modèle $\mathcal{M}$ qui interprète $\omega$ par $\perp$.

$$\begin{array}{rcl} (|1|, |\omega|) & = & (|1|, \perp) \\ (|\omega|, |1|) & = & (\perp, |1|) \\ (|\omega|, |\omega|) & = & (\perp, \perp) \end{array}$$

Or $(\perp, \perp)$ est l'inf dans $\mathcal{M}^2$ des couples $(|1|, \perp)$ et $(\perp, |1|)$, couples qui admettent par ailleurs $(|1|, |1|)$ pour majorant commun. Si, pour tout $t$ la fonction $(d, d') \longmapsto |t|\, dd'$ avait le bon goût d'être non seulement croissante en ses deux arguments, mais en plus de commuter aux infs, en tout cas aux infs de couples d'éléments compatibles ($\equiv$ ayant un majorant commun), alors on pourrait arguer ainsi :
Si $t$ répond à la question alors :

$$\begin{array}{rcl} |t\omega\omega| & = & |t| \perp\perp = \inf(|t| \perp |1|, |t|\, |1| \perp) = \inf(|t\omega 1|, |t 1 \omega|) = \inf(|1|, |1|) = |1| \\ |t\omega\omega| & = & |t| \perp\perp \leq |t|\, |0|\, |0| = |t00| = |0| \end{array}$$

Donc $\mathcal{M} \models |1| \leq |0|$, et on conclurait à une contradiction comme précédemment.

C'est la raison pour laquelle les fonctions stables, qui sont les fonctions continues commutant aux infs d'éléments compatibles ont été introduites par Berry. Elles ne suffisent cependant pas à régler tous les problèmes de ce type comme nous le verrons, à la fin de la section suivante, ce qui a motivé un raffinement supplémentaire : la sémantique fortement stable, que nous n'étudierons pas ici, et qui elle-même ... Rappelons que ces sémantiques ne sont en fait pas comparables, au sens suivant : il existe des termes qu'on peut réfuter dans la sémantique continue et pas dans la sémantique stable, etc.

### 3.7.2 Consistance d'extensions du $\lambda$-calcul.

On se contentera ici de traiter des exemples très simples montrant que la recherche de modèles avec des propriétés supplémentaires permet de modéliser certaines extensions du $\lambda$-calcul (ici non typé), soit issues de réflexions théoriques, soit de considérations informatiques pratiques, par exemple certains ajouts de "sucre syntaxique".

**A. $\Omega/\omega$-réduction et $\Omega/\omega$-équivalence.** Certaines $\lambda$-théories, telles $=_\beta$ et $=_{\beta_\eta}$ sont engendrées par des règles de réécriture : une telle théorie est la clôture réflexive, symétrique et transitive d'une relation binaire de "réécriture", telle $\rightarrow_{\beta_0}$ et$\rightarrow_{\beta\eta_0}$ . Nous nous intéressons ici aux extensions du $\lambda$-calcul, c'est à dire que sera toujours sous-entendue la présence des schémas de règles de la $\beta$-réduction ou de la $\beta$-équivalence, en particulier le fait que tout passe au contexte. Ces extensions peuvent s'obtenir par simple ajout de règles, telle $\rightarrow_{\beta\omega}$, qui s'obtient en rajoutant au règles définissant $\rightarrow_\beta$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x.\omega & \rightarrow & \omega \\ \omega t & \rightarrow & \omega \text{ (pour tout } t \in \Lambda \text{)} \end{array}$$

(où $\omega = \delta\delta$), ou telle $=_{\beta\omega}$ qui s'obtient en ajoutant aux règles de $=_\beta$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x.\omega & = & \omega \\ \omega t & = & \omega \text{ (pour tout } t \in \Lambda \text{)} \end{array}$$

Il peut aussi être intéressant de considérer des extensions dans un langage plus riche : on ajoute des constantes de termes, et des règles précisant un certain comportement de ces constantes. Par exemple on rajoute une constante $\Omega$ et les règles :

$$\begin{array}{rcl} \lambda x.\Omega & \rightarrow & \Omega \\ \Omega t & \rightarrow & \Omega \text{ (pour tout } t \in \Lambda \text{)} \end{array}$$

La théorie équationnelle engendrée s'obtenant en ajoutant les axiomes :

$$\begin{array}{rcl} \lambda x.\Omega & = & \Omega \\ \Omega t & = & \Omega \text{ (pour tout } t \in \Lambda \text{)} \end{array}$$

à ceux de la $\beta$-équivalence.

Pour modéliser de tels systèmes il faudra pouvoir interpréter les constantes et ce de façon compatible avec les règles ; ce sera suffisant puisque toutes les relations considérées sont contextuelles.
Dans notre contexte la *consistance* d'un système de réécriture c'est que 1 ne se réécrit pas en 0, ou, ce qui est équivalent si il est CR, qu'il existe deux termes qui ne se réécrivent pas l'un dans l'autre ; pour une théorie équationnelle c'est que l'on ne peut pas en inférer $1 = 0$. Le problème de la consistance de ces différents systèmes n'est pas le même, quoique les solutions n'en soient pas indépendantes.
Retournons à notre famille d'exemples :
Le système de réécriture $\rightarrow_{\beta\Omega}$ est Church-Rosser (enrichir légèrement la preuve donnée pour le $\lambda$-calcul pur [cf. Barendregt]) ; on en déduit facilement sa consistance, et celle de la théorie équationnelle $=_{\beta\Omega}$ qu'il engendre. Un autre moyen de voir la consistance de cette théorie est de remarquer que le modèle d'Engeler la modélise : il suffit de décider qu'on interprète la constante $\Omega$ par $\emptyset$, et les termes de $\Lambda(\Omega)$ de la manière inductive habituelle. On a alors $t =_{\beta\Omega} t' \Rightarrow |t| = |t'|$, ce qui implique $0 \neq_{\beta\Omega} 1$ .

Pour les deux premiers systèmes c'est un peu différent : en effet $\omega$ est un terme clos du $\lambda$-calcul pur, on n'a donc aucune latitude pour l'interpréter (dans un modèle donné). Il n'en reste pas moins que la théorie $=_\beta$ est consistante, par exemple parce que le modèle d'Engeler (mais aussi beaucoup d'autres) satisfait $\omega t = \lambda x.\omega = \omega\ (=\perp)$. Noter que la consistance des $\beta\omega$-relations implique celle des $\beta\Omega$-relations puisqu'elle nous permet en fait une interprétation au niveau des termes (de $\Omega$ par $\omega$ ).

*Il existe des théories équationnelles consistantes provenant de systèmes de réécriture non CR (le couple surjectif par exemple), mais même si on a un candidat CR qui serait susceptible d'engendrer une théorie qui nous intéresse, il peut être beaucoup plus facile de démontrer la consistance d'une théorie en la modélisant par une structure mathématique simple et en nous guidant sur une signification sémantique.*

**B. L'exemple du couple surjectif.** Un exemple très simple en est donné par ce qu'on appelle "le couple surjectif". Le système analogue en $\lambda$-calcul simplement typé (ou presque) est CR, mais il a été démontré que ce n'était pas le cas en $\lambda$-calcul pur [Klopp, cf. Bar. p.408, exercice 15.4.4]. Le but est de montrer la consistance de la théorie $=_{\beta c}$ induite par les règles suivantes, où $c, \pi_1, \pi_2$ sont de nouveaux symboles de constantes, et $u, v, w$ varient dans $\Lambda$ .

$$\begin{array}{rcl}(\pi_1)(c)uv & \to & u\\ (\pi_2)(c)uv & \to & v\\ ((c)(\pi_1)w)(\pi_2)w & \to & w\end{array}$$

**Proposition 74** *Si $\mathcal{M} =_{def} (\mathcal{D}, \lambda, \alpha)$ est un dcpo réflexif tel que $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, alors on peut interpréter le $\lambda_{\beta c}$-calcul dans $\mathcal{M}$.*

*Preuve.* Soient $\gamma : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ et $\gamma^{-1} = (p_1, p_2)$ les deux fonctions continues qui réalisent l'isomorphisme ci-dessus, on vérifie facilement que si on interprète $\pi_1, \pi_2$ et $c$ respectivement par $\lambda(p_1)$, $\lambda(p_2)$ et $\lambda(\lambda \circ curry(\gamma)))$, alors $\mathcal{M} \models (\pi_1)(c)xy = x$, $(\pi_2)(c)xy = y$ et $((c)(\pi_1)z)(\pi_2)z = z$ (où $x, y, z$ sont des variables distinctes).

Il reste bien sûr à trouver une telle structure mathématique, mais nous verrons dans le chapitre suivant que tous les modèles de graphe répondent à la question. En effet pour tous ces modèles $\mathcal{D} = (P(D), \subseteq)$, avec $D$ infini, or il est très facile dans ce cas de créer un isomorphisme de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ : il suffit de fixer une partition de $D$ en deux sous-ensembles disjoints de même cardinalité $D = D_1 \uplus D_2$, et on a dans ce cas : $P(D) \simeq P(D_1) \times P(D_2) \simeq P(D) \times P(D)$.
On peut ajouter des équations supplémentaires qui se trouvent vérifiées dans certains de ces modèles, par exemple le modèle d'Engeler.

**Remarque 75** *Les termes* $\tau = \lambda x\lambda y\lambda f.\ fxy$, $\tau_1 = \lambda x.(x)1$ *et* $\tau_2 = \lambda x.(x)0$ *du* $\lambda$*-calcul pur ne pouvaient pas nous aider car, s'il est vrai qu'ils vérifient* $(\tau_1)(\tau)uv \to_\beta u$ *et* $(\tau_2)(\tau)uv \to_\beta v$ *pour tous* $u, v \in \Lambda$, *en revanche* $((\tau)(\tau_1)w)(\tau_2)w \to_\beta w$ *n'est vrai que pour les termes* $w$ *qui sont* $\beta$*-équivalents à un terme de la forme* $(\tau)\,uv$.

### 3.7.3 Construction de modèles satisfaisant des "équations aux domaines". A ECRIRE.

Ou *"pourquoi on ne se contente pas de travailler avec les treillis complets"*.
Les équations $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \simeq [\mathcal{D} \to \mathcal{D}]$, voire $\mathcal{D} \simeq [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \times \mathcal{D}$ ont des solutions dans les treillis complets, mais $\mathcal{D} \simeq [\mathcal{D} \to \mathcal{D}] \oplus \mathcal{D}$, où $\oplus$ dénote etc... n'en a pas. Si pour une raison ou une autre on a besoin de résoudre cette équation, ou plus généralement faire des sommes de domaines il faut travailler avec une classe de domaines plus large.

# 4 La sémantique stable.

## 4.1 Infs et sups dans les domaines de Scott.

**Lemme 76** *Si* $\mathcal{D}$ *est un domaine de Scott alors tout sous-ensemble non vide* $B$ *de* $\mathcal{D}$ *a un* inf .

*Preuve.* En effet l'ensemble $C$ des minorants de $B$ est non vide, car il contient $\perp$, et il est majoré car $B$ n'est pas vide, donc il a un *sup*. Soit $b \in B$, comme $b$ majore $C$ il majore $\vee C$, comme c'est vrai pour tous les $b \in B$, $\vee C$ est un minorant de $B$, et $C$ a donc $\vee C$ pour plus grand élément. Ainsi $B$ a bien un $inf$, et $\wedge B = \vee C$.

**Lemme 77** *Soient* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{E}$ *des domaines de Scott et* $B \subseteq [\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ *fini non vide. Alors* $\wedge B$ *est la fonction* $G_B$ *définie par :* $G_B(x) = \wedge\{\, f(x) \,/\, f \in B \,\}$.

*Preuve.* $G_B$ est clairement l'inf de $B$ dans $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ muni de l'ordre extensionnel. Il suffit donc de vérifier que $G_B$ est continue. Montrons déja qu'elle est monotone. Si $d \preceq d'$ alors pour toute $g \in B$ on a $g(d) \preceq g(d')$ donc $G_B(d) \preceq g(d')$, donc $G_B(d)$ est un minorant commun à tous les $g(d')$ pour $g \in B$, donc il minore leur inf, qui n'est autre que $G_B(d')$, donc $G_B(d) \preceq G_B(d')$. Soit $A \subseteq \mathcal{D}$ filtrant non vide. Il suffit de vérifier que $G_B(\vee A) \preceq \vee G_B^\bullet(A)$ (l'autre sens est conséquence de la monotonicité de $G_B$), et pour cela il suffit, du fait de l'algébricité de $\mathcal{E}$, de vérifier que tout compact $h$ plus petit que le premier membre est plus petit que le second. Supposons donc $h \preceq G_B(\vee A) =_{def} \wedge_{f\in B} f(\vee A)$. On a alors, pour tout $f \in B$, $h \preceq f(\vee A) = \vee f^\bullet(A)$ (continuité de $f$). Comme $h$ est compact, pour tout $f \in B$ il existe $d_f \in A$ tel que $h \preceq f(d_f)$. Comme $B$ est fini et $A$ est filtrant, $A$ contient un élément $d$ qui majore tous les $d_f$. Il en résulte que $h \preceq f(d)$ pour tout $f \in B$, et donc $h \preceq G_B(d) \preceq \vee_{d\in A} G_B(d)$, cqfd.

**Lemme 78** *Si $\mathcal{D}$ est Scott et $A \subseteq \mathcal{D}$ est majoré alors $\vee A = \vee A^*$, où $A^*$ est l'ensemble filtrant défini par $e \in A^*$ ssi il existe $C \subseteq_{fin} A$ tel que $e = \vee C$.*

Notons que $\vee C$ existe puisque $C$ est majoré, par exemple par $\vee A$.

**Exercice 79** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont Scott, alors $(f, g) \mapsto f \wedge g$ est continue sur $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ [12].*

**A faire : *ajouter*** un lemme d'associativité pour les sups et les infs, le plus tôt possible dans le chapitre.

## 4.2 DI-domaines.

**Dfinition 80** *Un* DI-domaine *est un domaine de Scott $(\mathcal{D}, \preceq)$ tel que :*
*1. Pour tout $h \in K(\mathcal{D})$, $\Downarrow h =_{def} \{d \in \mathcal{D} \,/\, d \preceq h\}$ est fini.*
*2. Pour tous $d, e, e' \in \mathcal{D}$ compatibles on a $d \wedge (e \vee e') = (d \wedge e) \vee (d \wedge e')$.*

**Remarque 81** *Puisque $\mathcal{D}$ est algébrique,* 1. *implique que $\Downarrow h = A_h$ et est équivalent à : $A_h$ est fini. Par ailleurs* 2. *est équivalente à la version où on ne demande pas que $d$ soit compatible avec $e, e'$ est vraie aussi (remplacer dans ce cas $d$ par $d \wedge (e \vee e')$ ).*

**Lemme 82** *Tout DI-domaine est premier-algébrique.*

*Preuve.* Il suffit de montrer que tout compact est le sup de l'ensemble $P_h$ des éléments premiers qui lui sont plus petits. On le fait par induction sur le cardinal de $\Downarrow h$. Si $h$ est premier c'est fini. Sinon il existe $d$ et $d'$ compatibles tels que $h \preceq d \vee d'$ et $h \not\preceq d$ et $h \not\preceq d'$. Maintenant $h = h \wedge (d \vee d') = (h \wedge d) \vee (h \wedge d')$ et comme ni $h \wedge d$ ni $h \wedge d'$ ne sont égaux à $h$ les cardinaux correspondants sont strictement inférieurs à ceux de $h$, et chacun est sup des premiers qui sont sous lui ; il en résulte que c'est pareil pour $h$.

**Exemple 83** Espaces cohérents *(Girard).*
*$\mathcal{D} =_{def} (P^{coh}(D), \subseteq)$, où $(D, \frown\!\!\!\!\smile)$ est un ensemble muni d'une relation de cohérence (relation binaire réflexive et symmétrique). Tout espace cohérent est un DI-domaine premier algébrique. C'est un treillis complet (distributif) ssi $\frown\!\!\!\!\smile$ est triviale. Les domaines $\mathcal{D}$ ont été également appelés par Girard* domaines qualitatifs binaires. *Noter que $\mathcal{D} =_{def} (P^{ach}(D), \subseteq)$, où $P^{ach}(D)$ est l'ensemble des antichaines de $\frown\!\!\!\!\smile$ (c'est-à-dire des ensembles dont tous les points distincts sont non cohérents) est aussi de même nature (pour une relation de cohérence à définir en fonction de $\frown\!\!\!\!\smile$) [13].*

**Exemple 84** *Les dcpos plats $D_\perp$ sont des DI-domaines (ils correspondent au cas particulier des espaces cohérents où $\frown\!\!\!\!\smile$ est "$=$".*

[12] Aide : utiliser l'algébricité de $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$.
[13] C'est sous cette forme que les espaces cohérents sont présentés dans [Kri].

**Exemple 85** *Tout domaine $\mathcal{D} =_{def} (S^{coh}(D), \subseteq)$, où $(D, \frown\!\!\!\!\smile, \leq)$ est un pcs tel que $\downarrow \{\alpha\}$ est fini pour tout $\alpha \in D$.*

**Exemple 86** *Tout produit de $DI$-domaines, muni de l'ordre produit, est un $DI$-domaine.*

**Lemme 87** *(distributivité) Soit $\mathcal{D}$ un $DI$-domaine, $A \subseteq \mathcal{D}$ tel que $\vee A$ existe, alors, pour tout $d \in \mathcal{D}$, on a $d \wedge (\vee A) = \vee_{e \in A}(d \wedge e)$.*

*Preuve.* Le cas où $A$ est fini se démontre par induction sur la cardinalité de $A$, en utilisant la condition 2. de la définition de $DI$-domaine (et la remarque qui la suit). Supposons maintenant $A$ quelconque. Un sens est quasi-trivial : $d \wedge (\vee A)$ est un majorant de tous les $d \wedge e$, donc c'est un majorant de leur *sup*. Montrons inversement que $d \wedge (\vee A) \preceq \vee_{e \in A}(d \wedge e)$. Il suffit, à cause de l'algébricité de $\mathcal{D}$, de montrer que tout compact $h$ qui minore le premier membre minore aussi le second. Par transitivité de $\preceq$ on a que $h \preceq d$ et $h \preceq \vee A$. Maintenant $\vee A = \vee A^*$, où $A^*$ est l'ensemble (filtrant) des sups des sous-ensembles finis $C$ de $A$ (Lemme 78). Comme $h$ est compact il existe $e' \in A^*$ tel que $h \preceq e'$. Maintenant $e' = \vee_{i \in I} e_i$ avec $I$ fini et $e_i \in A$ et on a $h \preceq d$ et $h \preceq \vee_{i \in I} e_i$, donc $h \preceq d \wedge (\vee_{i \in I} e_i) = \vee_{i \in I}(d \wedge e_i) \preceq \vee_{e \in A}(d \wedge e)$.

## 4.3 Les fonctions stables.

**Dfinition 88** *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est* stable *si elle est continue et si $f(d \wedge d') = f(d) \wedge f(d')$ pour tout couple d'éléments $d$ et $d'$ compatibles. On notera $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$ l'ensemble des fonctions stables de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$.*

Noter que $f(d \wedge d') \preceq f(d) \wedge f(d')$ est conséquence de la monotonicité et de la définition de $\wedge$. Pour montrer qu'une fonction continue est stable il suffira donc de prouver l'inégalité inverse.

**Lemme 89** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux $DI$-domaines, $f$ est stable ssi $f$ est continue et pour tous $h \in K(\mathcal{D})$ et $k \in K(\mathcal{E})$ tels que $k \preceq f(h)$ il existe un unique compact minimal $h_0 \preceq h$ tel que $k \preceq f(h_0)$.*

*Preuve.*
$\Rightarrow$: L'ensemble $A$ des compacts $h'$ tels que $h' \preceq h$ et $k \preceq f(h')$ est fini, non vide et majoré ; ne particulier $\wedge A$ existe ; il est clair que $\wedge A \preceq h$ et par ailleurs, puisque $k$ minore $f^\bullet(A)$ et que $f$ est stable, on a $k \preceq \wedge f^\bullet(A) = f(\wedge A)$ car $f$ est stable et $A$ majoré. Donc $\wedge A \in A$ et c'est manifestement le $h_0$ voulu.
$\Leftarrow$: Soit $f$ continue. Supposons la propriété vraie et montrons que $f$ est stable. Pour montrer que $f(d) \wedge f(d') \preceq f(d \wedge d')$, pour tous $d, d'$ compatibles, il suffit de montrer, puisque $\mathcal{D}$ est algébrique, que tout compact $h$ plus petit que le premier membre est plus petit que le second. Soit $k \preceq f(d) \wedge f(d')$, on a donc $k \preceq f(d)$ et $k \preceq f(d')$. Soient $h$ et $h'$ compacts tels que $k \preceq f(h)$ et $k \preceq f(h')$ (continuité de $f$) et soient $h_0 \preceq h$ minimal tel que $k \preceq f(h_0)$ et $h'_0 \preceq h'$ minimum tel que $k \preceq f(h'_0)$. Comme $d$ et $d'$ sont compatibles il en est de même de $h$ et

$h'$, donc $h \vee h'$ existe et est compact. Maintenant on remarque que si $h_0$ et $h'_0$ étaient distincts ils contrediraient la propriété pour $h \vee h'$. Donc ils sont égaux et $h_0 \preceq h, h' \preceq d, d'$ donc $h_0 \preceq d \wedge d'$ et $k \preceq f(h_0) \preceq f(d \wedge d')$, cqfd.

Du fait de cette propriété on pourra se contenter de travailler avec des fragments des traces usuelles (fragments que nous appelerons les "traces stables") ; nous y reviendrons d'ici la fin de cette section. Nous nous occupons d'abord des propriétés utiles pour la modélisation du $\lambda$-calcul.

**Exemple 90** *1. Les fonctions constantes et les projections sont stables.*
*2. Tout isomorphisme d'ordre partiel entre deux $DI$-domaines est stable et son inverse également.*
*3. Si $\mathcal{D}$ est un $DI$-domaine toute fonction monotone de $E_\perp$ dans $\mathcal{D}$ est stable.*

Il est important de remarquer qu'une fonction stable sur un produit est stable composante par composante mais que la réciproque est fausse, au niveau de la commutation aux infs. Considérons en effet la fonction $f : O^2 \to O$ définie par : $f(\perp,\perp) = \perp$ et $f(\perp,T) = f(T,\perp) = f(T,T) = T$. Cette fonction est monotone sur un domaine plat donc continue, elle est évidemment stable composante par composante, mais on a $f((\perp,T) \wedge (T,\perp)) = f(\perp,\perp) = \perp \neq T = f(\perp,T) \wedge f(T,\perp)$.

**Exemple 91** *Les fonctions $\varepsilon_{h,k} \in [\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$ sont stables.*

Nous définissons maintenant un ordre sur $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$ qui raffine l'ordre extensionnel. Cet ordre, dû à Berry, permet d'en faire un $DI$-domaine, et nous verrons qu'il correspond à l'inclusion des traces stables.

**Dfinition 92** *Soient $f, g \in [\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$. On définit :*
*$f \preceq_s g$ si $\forall x, y \in \mathcal{D}$ $(x \preceq y \Longrightarrow f(x) = f(y) \wedge g(x))$.*

Il est clair que $\preceq_s$ est réflexive, antisymmétrique et transitive ; c'est donc une relation d'ordre partiel. Il est également clair que $f \preceq_s g$ implique $f \preceq g$ (ordre extensionnel). Par la suite les notions relatives à $\preceq_s$ seront indicées par $s$.

**Exercice 93** *Pour $f \in [\mathcal{D} \to_s \mathcal{D}]$ on a :*
- *$id_\mathcal{D} \preceq_s f \Longrightarrow f = id_\mathcal{D}$ et*
- *$f \preceq_s id_\mathcal{D} \Longrightarrow f \circ f = f$*
- *$(f \preceq_s g$ et $g$ constante$) \Longrightarrow (f$ constante$)$.*

**Exemple 94** • *$\varepsilon_{h,k} \preceq_s \varepsilon'_{h',k'}$ ssi $h = h'$ et $k \preceq k'$*
• *$\varepsilon_{h,k} \preceq \gamma_k$ mais $\varepsilon_{h,k} \not\preceq_s \gamma_k$, où $\gamma_k$ est la fonction $d \in \mathcal{D} \mapsto k$.*

**Exercice 95** *$\varepsilon_{h,k}$ et $\varepsilon_{h',k'}$ sont s-compatibles si et seulement si :*
*$(h \mathrel{\hat{\smile}} h' \Longrightarrow k \mathrel{\hat{\smile}} k')$ et $((h \mathrel{\hat{\smile}} h'$ et $k = k') \Longrightarrow h = h')$,*
*où $e \mathrel{\hat{\smile}} e'$ signifie $e, e'$ compatibles.*

**Proposition 96** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des DI-domaines et $B \subseteq [\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$ est s-filtrant ou s-majoré alors $\vee B = \vee_s B$; de même si $B \neq \emptyset$ est fini et s-majoré on a $\wedge B = \wedge_s B$.*

*Preuve.* Autrement dit, si $B$ est un ensemble de fonctions stables satisfaisant les bonnes hypothèses, alors le sup ou inf qu'il avait pour l'ordre extensionnel est une fonction stable et est encore le sup ou inf dans l'espace restreint et pour $\preceq_s$ .
••Soit $B$ un sous-ensemble filtrant ou majoré de $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$, c'est à dire filtrant ou majoré pour $\preceq_s$; alors $B$ est filtrant ou majoré pour $\preceq$ également. Soit $F_B$ le sup de $B$ dans $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ pour l'ordre extensionnel. Nous savons déja que $F_B(x) = \vee_{f\in B}(f(x))$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, et que $F_B$ est continue (preuve de la Proposition 31). Nous allons montrer qu'elle est stable et que $g \preceq_s F_B$ pour toute $g \in B$. Ceci ce qui impliquera clairement que c'est le sup de $B$ dans $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$.

• Supposons $x, y \in \mathcal{D}$ et compatibles ; alors
$F_B(x \wedge y) = \vee_{f\in B} f(x \wedge y)$ (definition de $F_B$)
$= \vee_{f\in B}(f(x) \wedge f(y))$ (stabilité des $f$)
$= \vee_{f\in B}(f(x)) \wedge \vee_{f\in B}(f(y))$ (distributivité)
$= F_B(x) \wedge F_B(y)$ (définition de $F_B$).
• Supposons $x \preceq y$ et soit $g \in B$.
$g(y) \wedge F(x) = g(y) \wedge \vee_{f\in B}(f(x))$ (définition de $F_B(x)$ )
$= g(y) \wedge \vee_{(f\in B \text{ et } f\succeq_s g)}(f(x))$
$= \vee_{(f\in B \text{ et } f\succeq_s g)}(g(y) \wedge f(x))$ (distributivité)
$= \vee_{f\in B \text{ et } g\preceq_s f}(g(x)) = g(x)$. Donc $g \preceq_s F_B$.
Finalement $F_B = \vee_s B$.

•• Soit $B \neq \emptyset$ fini majoré dans $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$, alors $B$ reste majoré dans $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}]$. Soit $G_B = \wedge B$. On sait que $G_B(x) = \wedge_{f\in B}(f(x))$ pour tout $x$ et que $G_B$ est continue (Lemme 77). Il suffit de montrer qu'elle est stable et que $G_B \preceq_s f$ pour toute $f \in B$. La démonstration est analogue à la précédente sauf que l'on change $\preceq$ en $\succeq$, $\vee$ en $\wedge$, et qu'on utilise l'associativité de l'inf dans $\mathcal{E}$ au lieu de la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$.

**Proposition 97** *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des DI-domaines, alors $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$ est un DI-domaine ce n'est jamais un treillis complet sauf si $\mathcal{E}$ est trivial.*

*Preuve.* Compte tenu de la proposition précédente, il ne reste plus qu'à vérifier : 1. la distributivité de $\vee_s$ par rapport à $\wedge_s$, qui suit du fait qu'ils coincident avec les sups et infs extensionnels et de la distributivité dans $\mathcal{E}$, 2. l'algébricité du domaine, et 3. le fait tout compact n'a qu'un nombre fini de minorants. Ces deux derniers points suivent, par exemple, des exercices de la Section 4.5 plus bas.
[[A intégrer dans une version suivante]].
La dernière assertion suit, par exemple, de l'Exercice 95.

**Remarque 98** *La classe des DI-domaines est donc close par : isomorphisme, produit direct et espaces de fonctions stables (muni de l'ordre stable) ; elles contiennent aussi les domaines réduits à un point.*

**Remarque 99** *On a vu en montrant la Proposition 96 que tout* $B \subseteq [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{E}]$ *filtrant non vide ou majoré, était de même nature dans* $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]$ *et que l'on avait* $\vee_s B = \vee B$ *et de même pour les infs. Il en résulte que si* $F : [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{E}] \rightarrow \mathcal{D}'$ *est la restriction d'une* $G : [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] \rightarrow \mathcal{D}'$ *qui est continue, alors* $F$ *est aussi continue.*

**Proposition 100** *1. Si* $f, g \in [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}']$ *alors* $(f, g) \in [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}'^2]$
*2. La fonction* $eval_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} : ([\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}'] \times \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}'$ *qui associe* $f(d)$ *au couple* $(f, d)$ *est stable.*
*3. La composée de deux fonctions stables est stable.*
*4. L'opérateur de composition est lui-même stable.*

*Preuve.* 1. est immédiat.
2. On sait déja qu'elle est continue (remarque précédente). Soient $(f, d)$ et $(f', d')$ deux couples d'éléments compatibles, et soit $(F, e)$ un $s$-majorant commun. Il faut montrer que $(f \wedge_s f')(d \wedge d') = f(d) \wedge f'(d')$. Du fait que $\wedge_s$ coincide avec l'inf extensionnel et que $f$ et $f'$ sont stables il suit que $(f \wedge_s f')(d \wedge d') = f(d) \wedge f(d') \wedge f'(d) \wedge f'(d')$. Par ailleurs $f(d') = F(d') \wedge f(e)$ et $f'(d) = F(d) \wedge f'(e)$, puisque $F$ est un $s$-majorant de $f$ et $f'$. Il en résulte que $(f \wedge_s f')(d \wedge d') = f(d) \wedge F(d') \wedge f(e) \wedge f'(e) \wedge F(d) \wedge f'(d')$. Compte tenu que $F$ majore extensionnellement $f$ et $f'$ et que $f$ et $f'$, sont croissantes, cette expression compliquée se simplifie en $f(d) \wedge f'(d')$, comme on le souhaitait.
3. Si $f$ et $g$ sont stables alors on sait déja que la composée est continue ; la vérification de la commutation de $g \circ f$ avec les infs est immédiate.
4. On sait déja que l'opérateur de composition est continu (remarque précédente). Il nous reste à vérifier que si $(f, g)$ et $(f', g')$ sont compatibles, et dans des espaces où l'expression suivante a un sens, alors $(g \wedge_s g') \circ (f \wedge_s f') = (g \circ f) \wedge_s (g' \circ f')$. On est ramené à montrer que pour tout $d$ du domaine de départ, $(g \wedge_s g')((f \wedge_s f')(x)) = g(f(x)) \wedge g'(f'(x))$. On procède de façon analogue au point 2.

**Proposition 101** *Si* $f \in [(\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \rightarrow_s \mathcal{D}]$ *alors la fonction* $curry(f) : \mathcal{D} \rightarrow [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}]$*, définie de la même façon que son analogue continue, est stable. De plus* $curry$ *est un isomorphisme entre* $[\mathcal{D} \rightarrow_s [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}]]$ *et* $[(\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \rightarrow_s \mathcal{D}]$.

## 4.4 Modélisation du $\lambda$-calcul pur.

**Dfinition 102** *Soient* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *deux* $DI$*-domaines. On dira que* $\mathcal{D}$ est un retract de $\mathcal{D}'$ *(*au sens de la sémantique stable) [14]*si il existe deux applications stables* $f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}']$ *et* $g \in [\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}]$ *telles que* $g \circ f = id_{\mathcal{D}}$*. On notera* $\mathcal{D} \lhd_s \mathcal{D}'$*, ou plus précisément* $(f, g) : \mathcal{D} \lhd_s \mathcal{D}'$.

**Dfinition 103** *Un* DI-domaine réflexif pour la sémantique stable *est un triplet* $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \lambda, \alpha)$ *tel que* $(\lambda, \alpha) : [\mathcal{D} \rightarrow_s \mathcal{D}] \lhd_s \mathcal{D}$ *(en particulier* $\alpha \circ \lambda = id_{[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]}$*).*

[14]la notion de retract est en fait relative à une catégorie. Ici nous travaillons dans la catégorie dont les objets sont les $DI$-domaines et les morphismes les fonctions stables.

Notons qu'un retract au sens de la sémantique stable est en particulier un retract au sens de la sémantique continue, en revanche un $DI$-domaine réflexif pour la sémantique stable n'a aucune raison d'être réflexif pour la sémantique continue. On ne précisera plus toutefois à chaque fois "au sens de la sémantique stable", le contexte étant censé rappeler de quoi il s'agit. On prouve de manière analogue à ce qu'on a fait pour la sémantique continue, que :

**Thorme 104** *Tout DI-domaine réflexif engendre un modèle du $\lambda$-calcul pur, que nous noterons aussi $\mathcal{M}$. Cette modélisation est triviale ssi $card(\mathcal{D}) = 1$. Le modèle est extensionnel ssi $\lambda \circ \alpha = id_{\mathcal{D}}$, ssi $(\lambda, \alpha)$ est une paire d'isomorphismes inverses.*

La définition d'environnement est inchangée. On rappelle que, pour tout ensemble $W$, l'ensemble $\mathcal{D}^W$, muni de l'ordre extensionnel, est un DI-domaine.

**Lemme 105** *Pour tous $\bar{x}, W$ la fonction $(\rho, \bar{d}) \mapsto \rho[\bar{x} := \bar{d}]$ de $\mathcal{D}^W \times \mathcal{D}^{l(\bar{x})} \to \mathcal{D}^{W \cup \bar{x}}$ est stable.*

*Preuve :* On sait déja qu'elle est continue. Il reste à vérifier que si $(\rho, \bar{d})$ et $(\rho', \bar{d}')$ sont compatibles alors $(\rho \wedge \rho')[\bar{x} := \bar{d} \wedge \bar{d}'] = \rho[\bar{x} := \bar{d}] \wedge \rho'[\bar{x} := \bar{d}']$, ce qui est immédiat.

*L'interprétation des termes* se fait comme dans le cas continu :

$|x|_\rho =_{def} \rho(x)$
$|uv|_\rho =_{def} \alpha(|t|_\rho)(|u|_\rho)$
$|\lambda x.u|_\rho =_{def} \lambda(d \in \mathcal{D} \mapsto |u|_{\rho[x:=d]})$.

Il faut maintenant justifier que la fonction sur laquelle porte le $\lambda$ est stable. la justification de ce fait suit le même plan que dans le cas continu.

**Lemme 106** *Pour tout $W$ contenant $Vlib(t)$,*
*la fonction $h_t : \mathcal{D}^W \to \mathcal{D}$ définie par $h_t(\rho) = |t|_\rho$ est stable.*

*Preuve.* la démonstration est exactement la même que pour la sémantique continue sauf qu'elle s'appuie sur les propriétés de clôtures des espaces de fonctions stables au lieu des espaces de fonctions continues.

**Lemme 107** *Pour tous $t, u, \rho$ on a :*
*1.* $|t[x := u]|_\rho = |t|_{\rho[x:=|u|_\rho]}$
*2.* $|(\lambda x.t)u|_\rho = |t[x := u]|_\rho$

**Lemme 108** *$Th(\mathcal{M})$ est une $\lambda$-théorie, qui est triviale ssi $card(\mathcal{D}) = 1$. C'est une $\lambda\eta$-théorie ssi $\lambda \circ \alpha = id_{\mathcal{D}}$.*

*Preuves.* Les mêmes qu'en sémantique continue, sans en changer un mot.
Et il est trivialement toujours vrai que :

**Exemple 109** *d'interprétation de termes :*
$|I| = \lambda(id_{\mathcal{D}})$ *et* $|\varepsilon| = \lambda(\lambda \circ \alpha)$ *où* $I = \lambda x.x$ *et* $\varepsilon = \lambda x.\lambda y.xy$.

Le Lemme 46 et le Corollaire 47, sont évidemment encore valables pour la sémantique stable, qui n'est qu'une sémantique monotone particulière.

## 4.5 Traces "stables".

**Dfinition 110** *Soient* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{E}$ *deux DI-domaines et* $f \in [\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$. *La* trace "stable" de $f$ *est définie par*
$Tr_s^1(f) =_{def} \{ (h,k) \in K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{E}) \ / \ h$ *est minimal tel que* $k \leq f(h) \}$, *ou*
$Tr_s^2(f) =_{def} \{ (h,p) \in K(\mathcal{D}) \times W(\mathcal{E}) \ / \ h$ *est minimal tel que* $p \leq f(h) \}$, *ou*
$Tr_s^3(f) =_{def} \{ (a,\alpha) \in P^{cohfin}(D) \times E \ / \downarrow a$ *est minimal tel que* $\alpha \in f(\downarrow a) \}$.
*La troisième forme n'étant valable que pour les DI-domaines issus de pcs, et* "$\downarrow$" *disparait quand le préordre est trivial.*

C'est la troisième forme que nous utiliserons dans le Chapitre 7, la première permet d'exprimer $Tr(g \circ f)$ plus simplement en fonction de $Tr(f)$ et $Tr(g)$ si on le souhaite. On notera qu'ici aussi $(\perp,\perp)$ est dans tous les $Tr_s^1(f)$, et dans aucune des autres formes de traces stables.

**Exemple 111** $\mathbf{Tr}_s^3(id_{\mathcal{D}}) =_{def} \{ (\{\alpha\},\alpha) \ / \ \alpha \in D \}$ *si le préordre est trivial.*

**Lemme 112** $Tr_s$ *est une fonction injective stable (resp. et additive) de* $[\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}]$ *dans* $(P(U),\subseteq)$, *où* $U =_{def} K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{E})$ *(resp.* $K(\mathcal{D}) \times W(\mathcal{E})$*).(resp.* $P^{cohfin}(D) \times E$ *).*

*Preuve.* La première chose à vérifier c'est que $Tr_s$ est monotone (pour $\preceq_s$). La démonstration est la même dans les trois cas, faisons-la pour $Tr_s \equiv Tr_s^1$. Supposons $f \preceq_s g$ et soit $(h,k) \in Tr_s(f)$; alors $h$ est minimal tel que $k \preceq f(h)$. Comme $f \preceq g$ on a $k \preceq g(h)$. Montrons que $h$ est minimal pour cette propriété. Soit $h' \preceq h$ tel que $k \preceq g(h')$. Alors $k \preceq g(h') \wedge f(h) = f(h')$, donc $h' = h$ par la propriété de minimalité de $h$; donc $(h,k) \in Tr_s(g)$.
L'injectivité de $Tr_s$ suit du fait que si $f$ est stable, alors :
dans le premier cas $f(d) = \vee\{ k \in K(\mathcal{E}) \ / \ \exists h \in A_d \ (h,k) \in Tr_s(f) \}$.
dans le second : $f(d) = \vee\{ p \in W(\mathcal{E}) \ / \ \exists h \in P_d \ (h,p) \in Tr_s(f) \}$
et dans le troisième $f(d) = \downarrow \{ \alpha \in E \ / \ \exists a \subseteq_{fin} d \ (a,\alpha) \in Tr_s(f) \}$
Il reste à montrer que $Tr_s$ commute aux sups et infs d'ensembles convenables. En fait il est plus rentable de montrer d'abord l'Exercice 114, dont le lemme est un corollaire.

**Exercice 113** *Si* $f$ *est stable alors* $\varepsilon_{h,k} \preceq_s f$ *si et seulement si* $(h,k) \in Tr_s^1(f)$.

**Exercice 114** *Caractériser dans* $P(U)$ *l'ensemble* $\mathcal{T}_s$ *des traces de fonctions stables. Montrer que* $Tr_s$ *est un isomorphisme de p.o. entre* $([\mathcal{D} \to_s \mathcal{E}], \preceq_s)$ *et* $(\mathcal{T}_s, \subseteq)$.

**Exercice 115** *Une fonction stable est compacte ssi sa trace stable est finie.*

## 4.6 Applications et limites de la sémantique stable.

**A écrire.**

- Nous avons déja vu un exemple d'application de la sémantique stable.

• **Exemple (**Berry) d'un terme non réfutable par la sémantique stable, et qui le serait par la sémantique fortement stable :
Il n'existe pas de terme $t$ du $\lambda$-calcul tels que

$$\begin{array}{rcl} t10\omega & \simeq & _\beta t\omega 10 \simeq_\beta t1\omega 0 \simeq_\beta 1 \text{ et} \\ t000 & \simeq & _\beta 0 \end{array}$$

Mais tout modèle stable $\mathcal{M}$ du $\lambda$-calcul contient un élément $d$ tel que $d10\omega = d\omega 10 = d1\omega 0 = 1$ et $d000 = 0$, et ne peut donc réfuter l'existence d'un tel terme.
• Résolution d'équations aux domaines.
Les DI-domaines sont stables par lifting (passage de $\mathcal{D}$ au domaine obtenu en ajoutant un élément plus petit que tous les précédents), et les espaces cohérents non. Le lifting est par exemple utile pour modéliser naturellement le $\lambda$-calcul paresseux.

**Un conseil de lecture (hors cours).**

Le lecteur intéressé par la théorie des domaines et ses applications récentes à la calculabilité (en particulier à la calculabilité "exacte" sur les réels, en analyse, et à des applications graphiques), ou souhaitant gagner de nouvelles intuitions sur le sujet, est invité à lire le cours très éclairant de Abbas Edalat "Domain theory and exact computation", à trouver sur sa page web.

La bibliographie de cet article cite aussi les quelques livres écrits sur la théorie des domaines ces dernières années..