MPRI, Jeux : exercices 3

Olivier Serre
Olivier.Serre@liafa.jussieu.fr

⋆ ⋆ ⋆

Note : Ces exercices sont là pour vous aider à vous familiariser avec les notions vues en cours et à approfondir certains points. Ils peuvent être l'occasion pour vous de vous confronter à la rédaction de preuves comme vous aurez à en faire lors du partiel puis de l'examen. La plupart des exercices ne seront pas corrigés en cours. Cependant, s'il y a une demande, la solution à un exercice pourra être présentée en début de cours, faire l'objet d'une rédaction écrite par mes soins. Si vous souhaitez me donner des solutions rédigées par vos soin je les lirai volontiers et vous ferai part de mes remarques...

Exercice 1 : Jeux munis de conditions (externe) régulières

On se fixe un graphe **étiqueté** $G = (V, E \subseteq V \times A \times V)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_E \cup V_A$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un langage régulier $\Omega \subseteq A^\omega$ que l'on voit comme une condition de gain externe. On appelle alors $\mathbb{G}$ le jeu induit.

Dans ce qui suit, on considérera le cas particulier où Ω peut être décrit par un automate *déterministe complet* de Büchi[1] que l'on note $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_{in}, F)$. On rappelle ici que Q est un ensemble fini d'états, que $q_{in}Q$ est l'état initial, $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finaux, A l'alphabet d'entrée et $\delta : Q \times A \to Q$ est la fonction de transition. Enfin, on rappelle qu'un mot (infini) est accepté par $\mathcal{A}$ ssi l'unique calcul de $\mathcal{A}$ débutant en q_{in} visite infiniment souvent l'état F.

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème. On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans $\mathbb{G}$ et construire des stratégies avec mémoire fini pour les deux joueurs.

Pour cela, on construira un nouveau jeu, équipé cette fois d'une condition de Büchi, sur un graphe de jeu plus gros.

Donner un exemple où la construction précédente ne fonctionne pas si l'on remplace l'automate de Büchi par un automate *non déterministe* de Büchi.

[1] Ceci n'est pas toujours possible, puisqu'il faut en général, pour garder le déterminisme, considérer une condition de parité (ou de façon équivalente de Muller). Pour éviter d'introduire des notions peut être peu familière pour certains, on se concentrera sur le cas d'une condition d'acceptation de Büchi en remarquant que la preuve proposée par la suite se généralise facilement pour le cas général.