MPRI 2006–2007
Jeux pour la théorie des automates, la vérification et l'internet

Olivier Serre
serre@liafa.jussieu.fr
`www.liafa.jussieu.fr/~serre`

3 octobre 2006

Table des matières

Chapitre 1

Définitions de base

1.1 Graphe, graphe de jeu, jeu

Définition 1.1 *Un **graphe** est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arc. Si le graphe est non étiqueté, E est un sous-ensemble de $V \times V$. Dans le cas étiqueté, E est un sous-ensemble de $V \times A \times V$.*

Un graphe est fini ssi V est fini.

La représentation graphique d'un graphe est donné dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1 La Figure 1.1 donne la représentation graphique du graphe $\{a, b\}$-étiqueté $G = (V, E)$ où :
- $V = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $E = \{(1, a, 2), (1, b, 2), (1, a, 4), (2, a, 1), (2, b, 2), (4, a, 2)\}$.

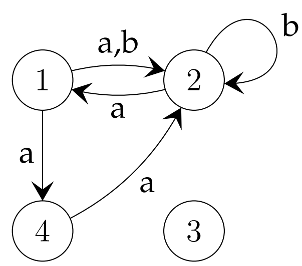


FIG. 1.1 – Représentation graphique d'un graphe

Les deux protagoniste d'un jeu, à savoir les joueurs, seront la plupart du temps appelé Eve et Adam (Alternativement 0 et 1, Éloïse et Abelard, joueur existentiel et joueur universel...).

On se fixe un graphe $G = (V, E)$.

On considère une partition des sommets $V = V_\mathbf{E} \cup V_\mathbf{A}$ entre les deux joueurs : les sommets (positions) dans $V_\mathbf{E}$ sont celles (contrôlés par) d'Eve tandis que les sommets dans $V_\mathbf{A}$ appartiennent à Adam.

Un triplet $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ est appelé un **graphe de jeu** (ou une **arène**). La représentation graphique est la même que pour un graphe à la différence près que les sommets d'Eve sont représentés par des cercles et ceux d'Adam par des carrés. La Figure 1.2 donne la représentation du graphe de jeu $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ où $V_{\mathbf{E}} = \{2, 4, 7, 8\}$ et $V_{\mathbf{A}} = \{1, 3, 5, 6\}$.

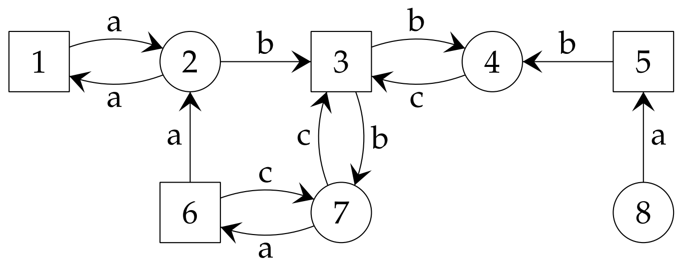


FIG. 1.2 – Exemple de graphe de jeu

1.2 Conditions de gain

Une **condition de gain** sur $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble Ω de E^ω (ou de façon équivalente de V^ω si le graphe n'est pas étiqueté).

Enfin, un **jeu à deux joueurs** sur un graphe de jeu $\mathcal{G}$ est un couple $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$, où $\mathcal{G}$ est un graphe de jeu et Ω une condition de gain sur $\mathcal{G}$.

Une **partie** dans un jeu $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ débutant en v_0 est définie comme suit. Le joueur qui contrôle le sommet initial v_0 choisit, si c'est possible, un arc $e_1 = (v_0, a_0, v_1)$ d'origine v_0. Si un tel arc n'existe pas, la partie se termine. Sinon le joueur qui contrôle v_1 choisit l'arc suivant $e_2 = (v_1, a_1, v_2)$ s'il en existe un, et ainsi de suite. Une partie est donc un chemin maximal (fini ou infini) dans G : $(v_0, a_0, v_1)(v_1, a_1, v_2) \cdots$. Par **partie partielle** on désignera le préfixe d'une partie, c'est à dire un chemin fini dans G. Autant que peut se faire, on réservera les lettres Λ et λ pour les parties (partielles).

Dans le graphe de jeu donné dans la figure 1.2,
$(1, a, 2)(2, b, 3)(3, b, 7)(7, a, 6)(6, a, 2)((2, a, 1)(1, a, 2))^\omega$ est une partie.

Eve **remporte** une partie infinie ssi elle appartient à Ω, sinon c'est Adam qui gagne. Dans le cas d'une partie finie (qui termine donc dans un cul-de-sac), le joueur qui est bloqué perd la partie.

On va considérer principalement deux types de conditions de gain : les conditions de gains internes et les conditions de gain externes.

Définition 1.2 *Une **condition de gain interne** sur un graphe de jeu $\mathcal{G}$ de sommets V est un sous-ensemble Ω of V^ω. Une partie $\Lambda = (v_0, a_0, v_1)(v_1, a_1, v_2) \cdots$ est remportée par Eve ssi $v_0 v_1 v_2 \cdots$ appartient à Ω.*

Définition 1.3 *Une **condition de gain externe** sur un graphe de jeu A-étiqueté $\mathcal{G}$est un sous-ensemble Ω de A^ω. Une partie $\Lambda = (v_0, a_0, v_1)(v_1, a_1, v_2) \cdots$ est remportée par Eve ssi $a_0 a_1 a_2 \cdots$ appartient à Ω.*

Etant donnée une condition de gain Ω, on considère la **condition duale** $\overline{\Omega}$ définie comme $\overline{\Omega} = E^\omega \setminus \Omega$. Il est clair que la condition duale d'une condition interne est une condition interne, et que la condition duale d'une condition externe est une condition externe.

Donnons maintenant quelques exemples de conditions de gains. On commence par les conditions d'accessibilité et de sûreté

Définition 1.4 *Soit un sous-ensemble $F \subseteq V$ de sommets, appelés* ***sommets finaux****. La condition interne V^*FV^∞ est une condition dite d'****accessibilité****. Ainsi, Eve remporte une partie si un état final est visité au cours de celle-ci.*

La condition duale $(V \setminus F)^\omega$ d'une condition d'accessibilité est une condition dite de ***sûreté****. On parle alors pour F de sommets* ***interdits****. Ainsi, Eve remporte une partie si on ne visite pas d'état interdit au cours de celle-ci.*

Pour les condition de gains suivantes, on adopte la convention qu'une partie finie est perdue par le joueur qui ne peut bouger. On définit alors les conditions de Büchi, de co-Büchi, de parité et de Muller.

Définition 1.5 *Soit un sous-ensemble $F \subseteq V$ de sommets, appelés* ***sommets finaux****. La condition interne $(V^*F)^\omega$ est une condition dite de* ***Büchi****. Ainsi, Eve remporte une partie si on visite infiniment souvent des états finaux au cours de celle-ci.*

La condition duale $\bigcup_{i\geq 0}(V^*F)^i(V \setminus F)^\omega$ d'une condition de Büchi est une condition dite de ***co-Büchi****. On parle alors pour F de sommets* ***interdits****. Ainsi, Eve remporte une partie si on ne visite qu'un nombre fini d'états interdits au cours de celle-ci.*

Définition 1.6 *Soit un sous-ensemble fini $C \subseteq \mathbb{N}$ d'entiers positifs appelés* ***couleurs*** *et soit une application col de V dans C, appelée* ***fonction de coloriage****. La condition interne $\{v_0v_1v_2\cdots \in V^\omega \mid \liminf(col(v_i))_{i\geq 0}$ est paire$\}$ est une condition dite de* ***parité****. Ainsi, Eve remporte une partie si la plus petite couleur infiniment souvent visitée est paire.*

La condition duale $\{v_0v_1v_2\cdots \in V^\omega \mid \liminf(col(v_i))_{i\geq 0}$ est impaire$\}$ est une condition dite de ***co-parité****. Ainsi, Eve remporte une partie si la plus petite couleur infiniment souvent visitée est impaire.*

Remarque 1.1 Considérons une condition Ω de co-parité sur un graphe de jeu coloré par une fonction de coloriage col. On considère alors la fonction de coloriage col' définie par $col'(v) = col(v) + 1$. Il est facile de voir que la condition de parité Ω' sur le graphe de jeu précédent coloré par la fonction col', est telle que $\Omega = \Omega'$.

Définition 1.7 *Soit un sous-ensemble fini $C \subseteq \mathbb{N}$ d'entiers positifs appelé* ***couleurs****, et soit une application col de V dans C, appelée* ***fonction de coloriage****. Soit une collection $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de C, appelés* ***ensembles finaux****. La condition interne $\{v_0v_1v_2\cdots \in V^\omega \mid \{c \mid \exists^\infty i,\ col(v_i) = c\} \in \mathcal{F}\}$ est une condition dite de* ***Muller****. Ainsi, Eve remporte une partie si l'ensemble des couleurs infiniment souvent visitées est dans $\mathcal{F}$.*

La condition duale d'une condition de Muller d'ensembles finaux $\mathcal{F}$ est également une condition de Muller avec la même fonction de coloriage et avec $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}$ pour ensembles finaux.

Donnons enfin un exemple de condition externe.

Définition 1.8 *Considérons un langage ω-régulier L sur un alphabet d'étiquetage A. Soit un graphe de jeu A-étiqueté. Le langage $\Omega = L$ est une condition dite **ω-régulière**. La condition duale d'une condition ω-régulière est également ω-régulière, par clôture par complémentation des langages réguliers.*

1.3 Stratégies et positions gagnantes

Dans toute ce paragraphe, on se donne un graphe de jeu $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$, où $G = (V, E)$.

Stratégies

Qui dit jeu dit envie de gagner, et donc stratégie. Une stratégie consiste à considérer les coups déjà joués ainsi que la position courante pour décider quel sommet atteindre. Plus formellement, une **stratégie** pour Eve est une fonction $\varphi : E^* \to E$ telle que, pour toute partie partielle λ se terminant en $v \in V_{\mathbf{E}}$, $\varphi(\lambda)$ a pour origine v. De même, on définit les stratégies pour Adam comme des fonctions $\psi : E^* \to E$ telles que, pour toute partie partielle λ se terminant en $v \in V_{\mathbf{A}}$, $\psi(\lambda)$ a pour origine v.

Il existe d'autres définitions plus générales pour les stratégies. En particulier, on peut les définir non plus comme des fonctions à valeur dans E, mais comme des applications à valeur dans $\mathcal{P}(E)$. Une **stratégie non déterministe** pour Eve est une application $\varphi : E^* \to \mathcal{P}(E)$ telle que, pour toute partie partielle λ se terminant en $v \in V_{\mathbf{E}}$, les éléments de $\varphi(\lambda)$ ont pour origine v. De même, on définit les stratégies pour Adam comme des applications $\psi : E^* \to E$ telles que, pour toute partie partielle λ se terminant en $v \in V_{\mathbf{A}}$, les éléments de $\psi(\lambda)$ ont pour origine v.

Les stratégies non déterministes généralisent bien les stratégies déterministes. En effet, étant donnée une stratégie déterministe φ, on définit un stratégie φ' équivalente en posant $\varphi'(\lambda) = \emptyset$ pour tout λ si φ n'est pas définie en λ, et $\varphi'(\lambda) = \{\varphi(\lambda)\}$ sinon. Pour la suite des définitions, on se place dans le cadre des stratégies non déterministes.

Etant donnée une stratégie φ pour Eve, cette dernière peut la **respecter** en choisissant toujours de prendre un arc donné par φ sur le préfixe de partie déjà joué. Plus formellement, on dira qu'Eve *respecte* φ au cours d'une partie $\lambda = e_1 e_2 \cdots$ si, pour tout $0 \leq i < |\lambda|$, $e_{i+1} \in \varphi(e_1 \cdots e_i)$ dès lors que e_i termine par un sommet de $V_{\mathbf{E}}$. De même, on définit le fait qu'Adam respecte une stratégie ψ.

Les stratégies intéressantes sont celles que l'on peut suivre tout au long d'une partie. Plus précisément, on dira qu'une stratégie φ pour Eve est **praticable** depuis un sommet v si, pour toute partie partielle λ d'origine v où Eve respecte φ, et se terminant par un arc d'extrémité dans $V_{\mathbf{E}}$, $\varphi(\lambda)$ est non vide. De même, on définit les stratégies praticables pour Adam.

Remarque 1.2 Evoquons maintenant le cas particulier des graphes non étiquetés. Dans la remarque **??**, nous avions noté que l'on peut représenter les chemins par des mots sur l'alphabet des sommets. Dans ce formalisme, une stratégie pour Eve est alors une application φ de V^∞ dans $\mathcal{P}(V)$ telle que, pour toute partie partielle λ se terminant dans un sommet

$v \in V_{\mathbf{E}}$ et pour tout $v' \in \varphi(\lambda)$, $(v, v') \in E$. De façon symétrique, on définit les stratégies pour Adam.

Etant donnée une stratégie φ, Eve respecte φ lors d'une partie $\lambda = v_1 v_2 v_3 \cdots$ si, pour tout $1 \leq i < |\lambda|$, $v_i \in V_{\mathbf{E}} \Rightarrow v_{i+1} \in \varphi(v_1 v_2 \cdots v_i)$.

Considérons maintenant un jeu $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ sur $\mathcal{G}$, une position initiale v_0 et une stratégie φ pour Eve. On dira que φ est une **stratégie gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}$ depuis** v_0 si toute partie au départ de v_0 où Eve respecte φ, est remportée par Eve. On définit de même les stratégies gagnantes pour Adam. Le jeu $\mathbb{G}$ est **déterminé** si, pour toute position initiale, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante depuis cette position dans $\mathbb{G}$.

Remarque 1.3 Etant donné un jeu, l'un des deux joueurs au plus a une stratégie gagnante. En effet, si les deux joueurs possédaient une stratégie gagnante, la partie obtenue quand ces derniers respectent leurs stratégies gagnantes respectives serait à la fois dans et hors de Ω.

Tous les jeux considérés dans ce cours seront déterminés.

Remarque 1.4 Etant donné une stratégie φ gagnante pour Eve depuis un sommet v dans un jeu $\mathbb{G}$, il est facile de voir qu'Eve possède une stratégie gagnante déterministe depuis v. En effet, il suffit de considérer la stratégie φ' définie pour tout $\lambda \in E^\infty$ tel que $\varphi(\lambda)$ est non vide, par $\varphi'(\lambda) = e_\lambda$, où e_λ est un élément quelconque de $\varphi(\lambda)$. On vérifie alors facilement que φ' est gagnante pour Eve.

1.3.1 Positions gagnantes

Une position v dans un jeu $\mathbb{G}$ est une **position gagnante**pour Eve si celle-ci possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{G}$ depuis v. L'ensemble des positions gagnantes pour Eve sera généralement noté $W_{\mathbf{E}}$. On définit de même l'ensemble $W_{\mathbf{A}}$ des positions gagnantes pour Adam.

1.3.2 Quelques stratégies particulières

On se fixe maintenant un graphe de jeu $\mathcal{G} = ((V, E), V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$, et un jeu $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ sur $\mathcal{G}$. Dans ce paragraphe, nous discutons de quelques types particuliers de stratégies possibles et de leurs représentations respectives.

Evoquons le cas des stratégies dites *sans mémoire* ou *positionnelles*. Une stratégie est sans mémoire si le choix du coup à jouer ne dépend pas du passé de la partie mais uniquement de la position courante.

Définition 1.9 *Une stratégie φ est **sans mémoire** (ou **positionnelle**) si pour toutes parties partielles λ et λ' de même extrémité, $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda')$. Ainsi, les stratégies sans mémoire pour Eve (respectivement pour Adam) sont exactement l'ensemble des applications φ de $V_{\mathbf{E}}$ (respectivement de $V_{\mathbf{A}}$) dans $\mathcal{P}(E)$ telles que pour tout $v \in V$, les éléments de $\varphi(v)$ ont pour origine v. Dans le cas des graphes non étiquetés, ce sont les fonctions de $V_{\mathbf{E}}$ (respectivement de $V_{\mathbf{A}}$) dans $\mathcal{P}(V)$, telles que pour tout $v \in V_{\mathbf{E}}$ et tout $v' \in \varphi(v)$, $(v, v') \in E$.*

Dans le cas où le graphe de jeu est fini, une stratégie sans mémoire est donc représentable de façon finie. Dans le cas où le graphe est infini, ce n'est pas le cas en général, puisque le graphe lui-même peut ne pas être finiment représentable. C'est pourquoi on préférera parler de stratégie sans mémoire pour les jeux sur des graphes finis, et de stratégie positionnelle pour les jeux sur des graphes infinis.

Entre les deux extrêmes que sont les stratégies générales et les stratégies positionnelles, le concept de *stratégies avec mémoire* permet de définir les deux notions précédentes mais aussi de les raffiner.

Définition 1.10 *Soit M un ensemble que l'on appelle* mémoire. *Une* stratégie à mémoire M *pour Eve est un triplet (m_0, φ, up) formé d'un élément $m_0 \in M$ appelé* mémoire initiale, *d'une application φ de $V \times M$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que pour tout couple (v, m), tout élément de $\varphi(v, m)$ est d'origine v, et d'une application up de $M \times E$ dans M appelée* application de mise à jour. *Eve respecte φ au cours d'une partie $\lambda = e_1 e_2, \cdots$ si pour tout $i < |\lambda|$, $e_{i+1} \in \varphi(v_i, m_i)$, où v_i est l'extrémité de e_i si $i \geq 1$ et où l'on pose $m_i = up(m_{i-1}, e_i)$ pour tout $i \geq 1$. En d'autres termes, quand Eve doit jouer, elle regarde la valeur de la mémoire ainsi que le sommet courant pour déterminer quel arc emprunter. Après chaque coup (effectué par Eve ou par Adam), Eve met à jour sa mémoire à l'aide de la fonction up en considérant l'ancienne valeur et le dernier coup joué. La stratégie φ est gagnante si toutes les parties où Eve respecte φ sont gagnantes. On définit également le caractère praticable d'une stratégie à mémoire. Il est alors facile de définir les mêmes notions pour Adam.*

Lorsque M est réduit à un seul élément (et n'est donc pas utile), on retrouve les stratégies sans mémoire (d'où leur nom).

Soit une stratégie φ générale et soit v une position initiale. Considérons la stratégie à mémoire M, (m_0, ψ, up) où l'on pose $M = E^\infty$, $m_0 = \varepsilon$, $\psi(v, m) = \varphi(m)$ et $up(e_1 \cdots e_n, e_{n+1}) = (e_1 \cdots e_n e_{n+1})$. La stratégie ci-dessus stocke donc dans sa mémoire le préfixe de partie déjà joué. Dès lors il est évident que l'ensemble des parties où Eve respecte la stratégie (m_0, ψ, up) est exactement l'ensemble des parties où Eve respecte φ.

Un cas particulièrement intéressant est celui des *stratégies à mémoire finie*, c'est-à-dire des stratégies à mémoire M où M est fini. Lorsque le graphe de jeu est fini, une telle stratégie est réalisée par un transducteur (c'est-à-dire un automate fini avec sortie).

Chapitre 2

Jeux sur des graphes finis

On considère diverses conditions de gain pour des jeux sur des graphes finis et on en donne la résolution.

2.1 Jeux d'accessibilité

On se fixe un graphe non étiqueté $G = (V, E)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un ensemble $F \subseteq V$ de sommets finaux et on note $\mathbb{G}$ le jeu d'accessibilité induit.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans $\mathbb{G}$ et construire des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.*

Le reste de la section est dévolu à la preuve de ce résultat. On définit par induction la suite croissante de sous-ensembles de V.

$Attr_0^{\mathbf{E}}(F) = F$ et
$Attr_i^{\mathbf{E}}(F) = Attr_i^{\mathbf{E}}(F) \cup \{v \in V_{\mathbf{E}} \mid \exists v' \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F) \text{ t.q. } (v, v') \in E\}$
$\cup \{v \in V_{\mathbf{A}} \mid (v, v') \in E \Rightarrow v' \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F)\}$

Comme la suite précédente et croissante et bornée, elle converge : on note $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ sa limite et on va montrer que $Attr^{\mathbf{E}}(F) = W_{\mathbf{E}}$. L'ensemble $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ est appelé **Attracteur pour Eve de** F et son complément est qualifié de **piège pour Eve** .

Il est facile de voir que pour tout $v \in Attr^{\mathbf{E}}(F)$, si $v \in V_{\mathbf{E}}$ alors soit $v \in F$ soit v a un successeur v' dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ tel que $rg(v') < rg(v)$. Si $v \in V_{\mathbf{A}}$ alors soit $v \in F$ soit pour tout successeur v' de v, v' est dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ et $rg(v') < rg(v)$.

Soit $v \in Attr^{\mathbf{E}}(F)$. On définit $rg(v) = \min\{i \mid v \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F)$. On définit enfin une stratégie sans mémoire φ pour Eve en définissant pour tout $v \in Attr^{\mathbf{E}}(F) \cap V_{\mathbf{E}}$, $\varphi(v) = v'$ pour un v' tel que $rg(v') < rg(v)$ (il est facile de voir qu'un tel v' existe bien).

On vérifie que si Eve respecte φ dans une partie débutant dans un sommet de $Attr^{\mathbf{E}}(F)$, alors la partie reste dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ jusqu'à atteindre F : en effet, soit une telle partie $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ alors pour tout i tel que $v_j \notin F$ pour tout $j < i$, on a $rg(v_{i+1}) < rg(v_i)$: en $rg(v_0)$ étapes on arrive dans F. La stratégie φ est donc gagnante depuis tout sommet dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$.

Il reste à prouver que pour tout sommet dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$, Adam a une stratégie gagnante sans mémoire.

Il est facile de voir que pour tout $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$, si $v \in V_{\mathbf{A}}$ alors v a un successeur v' qui n'est pas dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$. Si $v \in V_{\mathbf{E}}$ alors pour tout successeur v' de v, v' n'est pas dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$.

On définit une stratégie sans mémoire ψ pour Adam en définissant pour tout $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(F) \cap V_{\mathbf{A}}$, $\psi(v) = v'$ pour un v' tel que $v' \notin Attr^{\mathbf{E}}(v)$ (un tel v' existe bien d'après ce qui précède).

On vérifie que si Adam respecte ψ dans une partie débutant dans un sommet pas dans $Attr^{\mathbf{E}}(F)$, alors la partie reste hors de $Attr^{\mathbf{E}}(F)$. En effet, soit une partie $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ où Adam respecte ψ débutant dans un $v_0 \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$. Par induction on prouve que $v_i \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$ pour tout i : c'est vrai pour $i = 0$ et ça vient de la définition de ψ pour v_{i+1} si $v_i \in V_{\mathbf{A}}$ et de la remarque initiale si $v_i \in V_{\mathbf{E}}$.

2.2 Jeux de Büchi

On se fixe un graphe non étiqueté $G = (V, E)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un ensemble $F \subseteq V$ de sommets finaux et on note $\mathbb{G}$ le jeu de Büchi induit.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans $\mathbb{G}$ et construire des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.*

Tout d'abord on commence par définir une variante de l'attracteur. Soit S un sous-ensemble de sommets. On définit la suite croissante suivante :$Attr_0^{+\mathbf{E}}(S) = S$ et $Attr_{i+1}^{+\mathbf{E}}(S) = Attr_i^{+\mathbf{E}}(S) \cup \{v \in V_{\mathbf{E}} \mid \exists v' \in Attr_i^{+\mathbf{E}}(S) \text{ t.q. } (v, v') \in E\}$
$\cup \{v \in V_{\mathbf{A}} \mid (v, v') \in E \Rightarrow v' \in Attr_i^{+\mathbf{E}}(S)\}$. On note $Attr^{+\mathbf{E}}(S)$ sa limite et on parle alors d'attracteur strict.

Une simple adaptation du résultat sur les jeux d'accessibilité permet de montrer qu'un sommet est dans $Attr^{+\mathbf{E}}(S)$ ssi Eve a une stratégie pour atteindre en au moins un coup S.

On définit maintenant la suite (décroissante) suivante : $Z_0 = V$, $Z_{i+1} = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_i) \cap F$. On note Z_∞ sa limite. En particulier $Z_\infty = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_\infty)$ et $Z_\infty \subseteq F$.

On va montrer que $W_{\mathbf{E}} = Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$. Pour cela, on définit la stratégie sans mémoire φ suivante pour Eve. Si $v \in Z_\infty$ on pose $\varphi(v) = v'$ où v' est donné par une stratégie sans mémoire pour l'attracteur strict vers Z_∞ ; en particulier $v' \in W_{\mathbf{E}}$. Si $v \notin Z_\infty \cap W_{\mathbf{E}}$, on pose $\varphi(v) = v'$ où v' est donné par une stratégie sans mémoire pour l'attracteur vers Z_∞. Il est clair qu'une partie où Eve respecte φ et qui débute dans $W_{\mathbf{E}}$ atteint Z_∞ et ensuite visite infiniment $Z_\infty \subseteq F$ et donc F : la partie est donc gagnante pour Eve.

Considérons maintenant $W_{\mathbf{A}} = V \setminus W_{\mathbf{E}}$ et montrons qu'Adam possède une stratégie gagnante sans mémoire pour $W_{\mathbf{A}}$. Soit $v \in W_{\mathbf{A}} \cap V_{\mathbf{A}}$: on montre facilement qu'il existe i tel que $v \notin Attr(Z_i)$. On considère le plus petit i tel que $v \in Attr(Z_i) \notin Attr(Z_{i+1})$. On considère le successeur de v par une stratégie d'Adam pour éviter Z_{i+1} si $v \notin F$: on pose $\psi(v) = v'$. Si $v \in F$, comme $v \notin Z_\infty$ il existe un successeur $v' \notin Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$ (donc

$v' \in W_{\mathbf{A}}$) : on pose $\psi(v) = v'$. Par induction sur i, on montre facilement que ψ est une stratégie gagnante pour Adam sur $W_{\mathbf{A}}$.

2.3 Jeux de parité

On se fixe un graphe non étiqueté $G = (V, E)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un ensemble de couleurs $C = \{0, \ldots, d\}$ et une fonction de coloriage $col : V \to C$. On appelle alors $\mathbb{G}$ le jeu de parité induit.

On a alors le résultat suivant dont la preuve occupe le reste de cette section.

Théorème 2.3 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans $\mathbb{G}$ et construire des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.*

Pour un joueur σ (Eve ou Adam), on désignera par $\overline{\sigma}$ l'autre joueur.

2.3.1 Définitions de base

On commence par quelques définitions de base utiles pour la suite.

Définition 2.1 (Sous-graphe de jeu) *Soit $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ un graphe de jeu avec $G = (V, E)$, et soit $U \subseteq V$. Soit $col : V \to C$ une fonction de coloriage sur G. On considère le sous-graphe de jeu coloré (en restreignant col à U) de $\mathcal{G}$ induit par U, $\mathcal{G}[U] = (G[U], V_{\mathbf{E}} \cap U, V_{\mathbf{A}} \cap U)$ où $G[U] = (U, E \cap (U \times U))$. On dira que $\mathcal{G}[U]$ est un **sous-graphe de jeu** si et seulement s'il est sans cul-de-sac,* i.e. *pour tout $u \in U$, il exists $u' \in U$ tel que $(u, u') \in E$.*

Fait 2.1 *Un sous-graphe de jeu d'un sous-graphe de jeu est un sous-graphe de jeu.*

Définition 2.2 (Piège) *Soit un joueur σ et soit $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ un graphe de jeu avec $G = (V, E)$. Un **piège pour** σ (ou σ-piège) dans $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ tel que*
- *pour tout $v \in U \cap V_\sigma$, $(v, v') \in E \Rightarrow v' \in U$ (σ ne peut sortir de U) ;*
- *pour tout $v \in U \cap V_{\overline{\sigma}}$, il existe $v' \in U$ tel que $(v, v') \in E$ ($\overline{\sigma}$ peut rester dans U) ;*

Fait 2.2 *Le joueur $\overline{\sigma}$ possède une stratégie sans mémoire pour maintenir une partie dans un σ-piège.*

Preuve. Ceci vient du fait que rester dans un piège est la condition duale d'atteindre un sommet hors du piège, qui est une condition d'accessibilité. Le résultat découle alors du fait que les joueurs ont des stratégies sans mémoire pour les jeux d'accessibilité. ∎

Fait 2.3 *Soit U un piège pour σ dans un graphe de jeu $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G}[U]$ est un sous-graphe de jeu.*

Preuve. Immédiat.

Définition 2.3 (Attracteur) *Soit un joueur σ et soit $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ un graphe de jeu avec $G = (V, E)$. L'**attracteur** de $U \subseteq V$ pour σ (σ-attracteur), noté $Attr^\sigma(\mathcal{G}, U)$ ($\mathcal{G}$ est omis si le contexte est clait), est défini comme la limite de la suite (croissante et bornée) :*
- *$Attr_0^\sigma(U) = U$;*

– $\forall i \geq 0$, $Attr^\sigma_{i+1}(U) = Attr^\sigma_i(U) \cup \{v \in V_\sigma \mid \exists v' \in Attr^\sigma_i(U)$ *t.q.* $(v, v') \in E\} \cup \{v \in V_{\overline{\sigma}} \mid (v, v') \in E \Rightarrow v' \in Attr^\sigma_i(U)\}$

Fait 2.4 *L'ensemble $Attr^\sigma(\mathcal{G}, U)$ est l'ensemble des positions gagnantes pour σ dans le jeu d'accessibilité vers U.*

Le complémentaire d'un attracteur pour σ est un piège pour σ.

L'attracteur pour σ d'un piège pour $\overline{\sigma}$ est un piège pour $\overline{\sigma}$

Preuve. Immédiats ou conséquences directes des résultats sur les jeux d'accessibilité.

2.3.2 Preuve du Théorème 2.3

On peut enfin prouver le Théorème 2.3. On va prouver en plus du résultat annoncé que W_σ est un piège pour $\overline{\sigma}$.

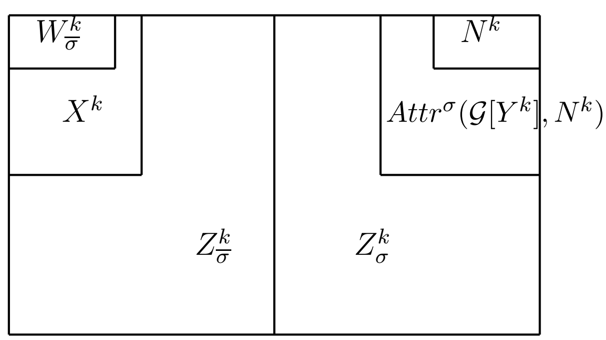
La preuve est faite par induction sur le nombre n de couleurs. Le cas de base est celui où $n = 1$ et le résultat est alors immédiat : selon la parité de l'unique couleur, Eve (paire) ou Adam (impaire) gagne partout et peut appliquer n'importe quelle stratégie (en particulier, une stratégie positionnelle).

On suppose le résultat prouvé pour un certain $n - 1 \geq 1$ et l'on considère le cas où il y a n couleurs. On note pour le reste de la preuve par σ le joueur qui gagne si la plus petite couleur c est infiniment souvent visitée (*i.e.* Eve si σ est paire, Adam sinon).

On construit alors une suite de sous-ensembles de V que l'on note $(W^k_{\overline{\sigma}})$ et une suite de stratégies positionnelles $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ pour $\overline{\sigma}$ telles que :

1. Pour tout k, $W^k_{\overline{\sigma}}$ est un piège pour σ et $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ est une stratégie gagnante pour $\overline{\sigma}$ sur $W^k_{\overline{\sigma}}$.
2. La suite des $W^k_{\overline{\sigma}}$ est croissante, et chaque $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ étend $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$

Pour cela on commence par poser $W^0_{\overline{\sigma}} = \emptyset$ et les propriétés sont alors vérifiées. On suppose maintenant que $W^k_{\overline{\sigma}}$ et $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ sont construits et on définit $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ et $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$.



On commence par poser $X^k = Attr^{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W^k_{\overline{\sigma}})$. Il s'agit d'un piège pour σ car c'est l'attracteur d'un piège pour σ (Hypothèse d'induction).

Le complémentaire $Y^k = V \setminus X^k$ de X^k est un piège pour $\overline{\sigma}$ car c'est le complémentaire d'un $\overline{\sigma}$-attracteur. C'est en particulier un sous-graphe de jeu que l'on note alors $\mathcal{G}[Y^k]$.

On regarde alors l'ensemble des sommets de Y^k de couleur c : $N^k = \{v \in Y^k \mid \rho(v) = c\}$ et enfin on retire à Y^k l'attracteur pour σ de N^k dans le sous-graphe de jeu :

$$Z^k = Y_k \setminus Attr^\sigma(\mathcal{G}[Y^k], N^k)$$

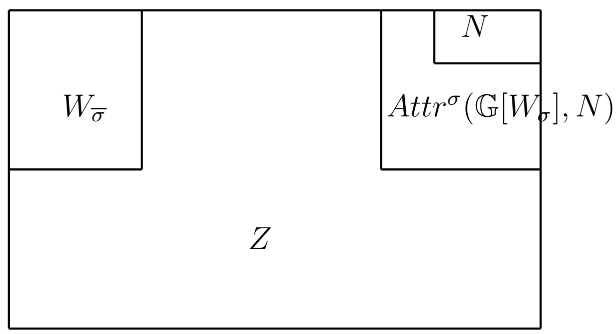
L'ensemble Z^k ainsi obtenu est un piège pour σ (complémentaire d'un σ attracteur) et définit un sous-graphe de jeu (sous-graphe de jeu d'un sous-graphe de jeu). De plus tous les sommets dans Z^k ont une couleur supérieure ou égale à $c+1$.

En applicant l'hypothèse de récurrence, on définit Z^k_σ et $Z^k_{\overline{\sigma}}$. Enfin, on pose $W^{\overline{\sigma}}_{k+1} = X^k \cup Z^k_{\overline{\sigma}}$, et on définit $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ comme l'union des stratégies (positionnelles sur ces deux ensembles). Cette dernière est clairement gagnante sur $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ et étend $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$.

Enfin, le fait que $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ est un piège est immédiat.

Maintenant, on prend pour $W_{\overline{\sigma}}$ la limite de la suite précédente et de même pour $\varphi_{\overline{\sigma}}$. Il est alors clair que les points (1) et (2) pour $\overline{\sigma}$ sont vérifiés ici.

On pose alors $W_\sigma = V \setminus W_{\overline{\sigma}}$. Le fait que W_σ soit un piège pour $\overline{\sigma}$ vient du fait qu'il est le complémentaire d'un $\overline{\sigma}$-attracteur car $W_{\overline{\sigma}} = Attr^{\overline{\sigma}}(W_{\overline{\sigma}})$. Il reste donc à prouver que σ y possède une stratégie gagnante positionnelle.



Pour cela, on pose $N = \{v \in W_\sigma \mid \rho(v) = c\}$ et on pose

$$Z = W_\sigma \setminus Attr^\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)$$

Par définition de $W_{\overline{\sigma}}$, $\overline{\sigma}$ ne peut gagner sur Z (sinon $W_{\overline{\sigma}}$ ne serait pas la limite de la suite $W^k_{\overline{\sigma}}$). Ainsi σ a une stratégie positionnelle sur Z (HR). On définit alors la stratégie φ_σ de la façon suivante :

– Suivre la stratégie gagnante positionnelle quand on est dans Z.
– Dans $Attr^\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)$ suivre la stratégie positionnelle d'attracteur.
– Dans N rester dans l'ensemble gagnant.

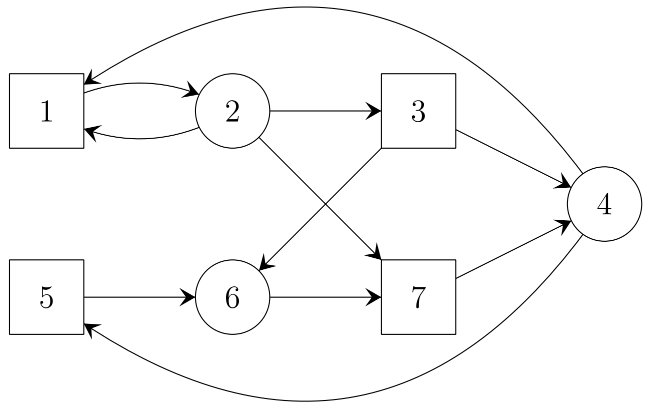
On vérifie facilement que cette stratégie est gagnante et positionnelle.

2.4 Jeux de Muller

On se fixe un graphe non étiqueté $G = (V, E)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un ensemble de sous-ensembles d'états $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_i\}$, $F_i \subseteq V$ pour tout i. On appelle alors $\mathbb{G}$ le **jeu de Muller** induit : Eve gagne une partie ssi l'ensemble des sommets visités infiniment souvent au cours de la partie est dans $\mathcal{F}$.

2.4.1 Les stratégies gagnantes peuvent requérir de la mémoire

On considère le graphe de jeu suivant et on prend $\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$.



Il est facile de vérifier qu'une stratégie sans mémoire pour Eve ne peut être gagnante : depuis 2, Eve doit aller vers 3 (qui doit dans tous les cas être infiniment souvent visité), et si elle choisit d'aller depuis 4 vers 1, Adam peut jouer de sorte à ce que tous les sommets soient visités souvent infiniment sauf 5, et si elle choisit d'aller depuis 4 en 5, Adam peut jouer de sorte à ce que les sommets visités infiniment souvent soient $\{4,5,6,7\}$.

Une stratégie gagnante avec mémoire pour Eve est la suivante :
- Depuis 2 toujours aller vers 3
- Depuis 4 si l'on vient de 3, aller vers 1.
- Depuis 4, si l'on vient depuis 7 via 3 et 6, aller vers 5 puis 6 puis 7 puis 4 puis 1.

En d'autres termes, Eve regarde en 4 quels sont les deux derniers états impairs visités :
- $(1,3)$ ou $(5,7)$: aller vers 1.
- $(3,7)$: aller vers 5

Il est à notre que cette information est facilement constructible par un automate fini et qu'une telle machine peut donc réaliser une stratégie gagnante pour Eve.

On généralise ces idées dans la suite.

2.4.2 Résolution des jeux de Muller : le last appearance record

On identifie dans la suite V avec $\{1,\ldots,n\}$. On appelle **last appearance record (LAR)** une permutation de V avec un entier dans $\{1,\ldots,n\}$ (le **hit**). On représentera cela par un n-uplet dont le j-ème élément est souligné si le hit vaut j, et on note $LAR(V)$ l'ensemble des LAR sur V. Le LAR est défini par induction pour toute suite (finie) de sommets (en particulier toute partie partielle) en posant : $LAR(\varepsilon) = (1,\ldots,\underline{n})$ et en posant si $LAR(\lambda) = (v_1,\cdots,v_n)$, $LAR(\lambda\cdot v) = (v_1,\cdots v_{j-1},\underline{v_{j+1}},v_{j+2},\cdots,v_n,v)$ si $v = v_j$: v est mis au fond et la position qu'il occupait devient le hit. Ainsi $LAR(\lambda\cdot v)$ *ne dépend que* de v et de $LAR(\lambda)$.

Il est facile de voir que l'ensemble des sommets infiniment souvent répétés est F au cours d'une partie **ssi** au bout d'un certain moment, le LAR a toujours un hit supérieur ou égal à $|F|$ et que infiniment souvent le hit vaut $|F|$ et alors les $|F|$ derniers sommets du LAR forment une permutation de F.

On considère un nouveau graphe de jeu dans lequel les sommets vont en plus contenir une information sur le LAR. Plus formellement, on considère le graphe $G' = (V \times LAR(V), E')$ où $((v,\tau),(v',\tau')) \in E$ ssi $(v,v') \in E$ et τ' est le LAR obtenu en allant vers v' avec le LAR τ. On considère la partition de V' donnée par $V'_{\mathbf{E}} = V_{\mathbf{E}} \times LAR(V)$, et on appelle $\mathcal{G}'$ le graphe de jeu associé. Enfin, on définit la condition de gain suivante sur $\mathcal{G}'$: pour tout $i = 1, \cdots n$, on note E_i l'ensemble des sommets de V' avec un hit $< i$ et par F_i l'ensemble des sommets de E_i augmenté des sommets dont le hit vaut i et dont les $n-i+1$ derniers sommets du LAR (*i.e.* ceux à partir du hit) forment une permutation d'un ensemble présent dans $\mathcal{F}$. On a donc une chaîne $E_1 \subseteq F_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots F_n$. Afin de rendre cette dernière stricte, on fusionne éventuellement E_j et E_{j+1} si $E_j = F_j$, et F_j et F_{j+1} si $E_{j+1} = F_j$. La condition de gain sur $\mathcal{G}'$ est la suivante : Eve gagne si et seulement s'il existe un j tel que E_j est finiment visité et F_j est infiniment souvent visité, et on note $\mathbb{G}'$ le jeu ainsi obtenu. La condition de gain précédente est qualifiée de **condition en Chaîne de Rabin**.

On a alors les deux résultats suivants qui permettent de conclure :

Lemme 2.1 *Un sommet v est gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}$ ssi le sommet $(v, LAR(\varepsilon))$ est gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}'$*

Preuve. Considérons une partie $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$. On considère alors la partie $\lambda' = v'_0 v'_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$ définie par $v'_i = (v_i, LAR(v_0 \cdots v_{i-1})) \cdots$ pour tout i. Il est alors facile de voir que λ est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}$ ssi λ' est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}'$. Ceci vient de la caractérisation donnée des sommets infiniment souvent répétés en terme de LAR, et de la définition des E_i/F_i.

On note τ la fonction (bijection en fait) telle que $\tau(\lambda) = \lambda'$ et π la fonction inverse qui projette λ' en λ, et on considère les versions naturelles de ces fonctions définie sur les parties partielles. Maintenant, si φ est une stratégie d'Eve dans $\mathbb{G}$ on définit la stratégie φ' pour Eve dans $\mathbb{G}'$ en posant $\varphi'(\lambda') = last(\tau(\varphi(\pi(\lambda))))$, où $last$ est la fonction qui associe à une partie son dernier sommets. Il est alors facile de vérifier que φ' est gagnante depuis $(v, LAR(\varepsilon))$ si φ est gagnante depuis v. Comme cette construction peut être également faite pour une stratégie gagnante d'Adam, cela conclut la preuve. ∎

Lemme 2.2 *La condition en chaîne de Rabin peut être exprimée comme une condition de parité. Ainsi, les jeux munis d'une condition en chaîne de Rabin admettent des stratégies gagnantes sans mémoire.*

Preuve. On considère le coloriage suivant : $col(v) = 2i - 1$ pour tout $v \in E_i \setminus F_{i-1}$ (avec $F_0 = \emptyset$) et $col(v) = 2i$ pour tout $v \in F_i \setminus E_i$. On conclut alors facilement. ∎

On a donc en résumé le théorème suivant :

Théorème 2.4 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu de Muller ainsi que des stratégies gagnantes qui nécessitent une mémoire de taille $k.k!$ où k est le nombre de sommets du graphe de jeu considéré.*

Preuve. La première partie du résultat est une conséquence directe des deux lemmes précédents. La seconde partie (taille de la mémoire) est laissée en exercice. ∎