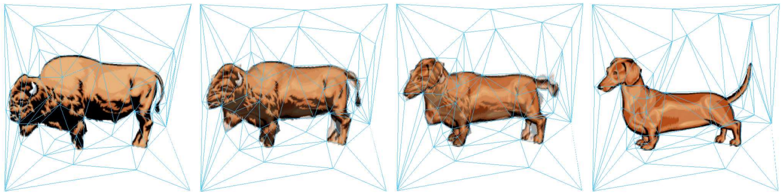
Steinitz theorem via Tutte barycentric theorem



– Menger theorem

– Tutte barycentric theorem

– Steinitz theorem

–

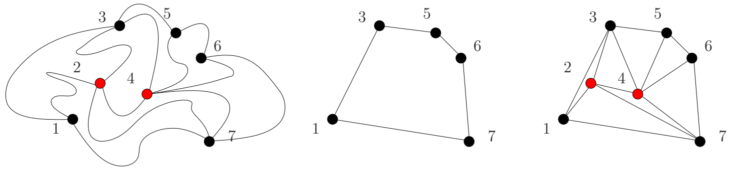
connectivité des graphes

Soit G un graphe simple connexe à n sommets. Un séparateur de G est un ensemble de sommets dont la suppression déconnecte G. La connectivité $\kappa(G)$ de G est la taille du plus petit séparateur de G. Un graphe G est dit k-connexe si $\kappa(G) \geq k$. Soient v, w deux sommets de G. Un vw-séparateur de G est un ensemble S de sommets distincts de v et w tel que tout chemin de v à w passe par un sommet de S.

Theorem 1 (Menger, 1927). *Le nombre maximal de chemins sommets-disjoints connectant deux sommets distincts non-adjacents v and w est égal à la taille minimum d'un vw-séparateur.* □

Corollary 1.1. *Un graphe G à $k+1$ sommets est k-connexe si et seulement si deux sommets distincts de G sont connectés par au moins k chemins sommets-disjoints.* □

Tutte barycentric theorem



Theorem 2 (Tutte, 1962). *Soit $G = (V, E)$ un graphe plan 3-connexe. Soit p un plongement linéaire strictement convexe du bord de la face externe de G, et soit ω une famille de réels strictement positifs indexée par les arêtes internes de G. Alors il existe une unique extension de p à l'ensemble des sommets internes de G telle que pour tout sommet interne v*

$$\sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} \omega_{v,w} \{p(v) - p(w)\} = 0.$$

De plus p réalise ainsi un plongement linéaire strictement convexe de G. □

Tutte barycentric theorem

1. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ une énumération des positions $p(v)$ des noeuds internes v du graphe G;
2. Le vecteur u est alors solution d'un système d'équations linéaires
$$Au = b \iff \begin{cases} u_1 &= \sum_{j \neq 1} \lambda_{1j} u_j + b_1 \\ u_2 &= \sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} u_j + b_2 \\ \ldots & \\ u_n &= \sum_{j \neq n} \lambda_{1j} u_j + b_n \end{cases}$$
où $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{j : j \neq i} \lambda_{ij} \leq 1$;
3. La matrice A est inversible. ✎ — Preuve.

Tutte barycentric theorem

Une bonne représentation d'un graphe plan 3-connexe $G = (V, E)$ est une application $p : V \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(-1) l'application p réalise un plongement linéaire strictement convexe du bord de la face externe de G;
(-2) l'image par p de tout sommet interne de G appartient à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe des images par p de ses voisins.

Theorem 3. *Soit p une bonne représentation d'un graphe planaire 3-connexe G. Alors p réalise un plongement linéaire strictement convexe de G.* $\square$

Lemma 3.1. *Soit p une bonne représentation d'un graphe plan 3-connexe G. Alors*

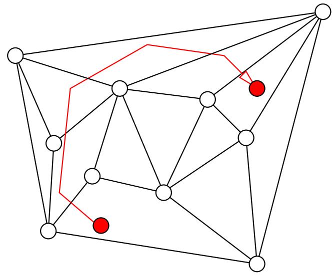
1. *pour tout $v \in V$ l'enveloppe affine des images par p des voisins de v est $\mathbb{R}^2$;*
2. *l'image par p de tout triplet de sommets appartenant à une même face interne de G est un triplet affinement libre.* $\square$

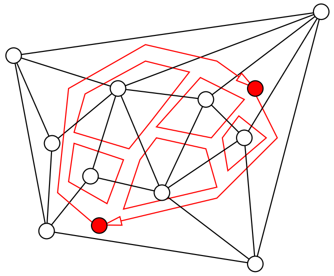
Lemma 3.2. *Soit p une bonne représentation d'un graphe plan 3-connexe G dont les faces internes sont des triangles. Alors les angles intérieurs de $p(G)$ sont tous positifs.* $\square$

Steinitz's theorem

Theorem 4. *Every Tutte embedding of a graph is the projection of a piecewise linear convex surface.* $\square$

Theorem 5 (Steinitz's Theorem). *If a graph is planar and 3-connected, then it is the edge graph of a 3-polytope.* $\square$



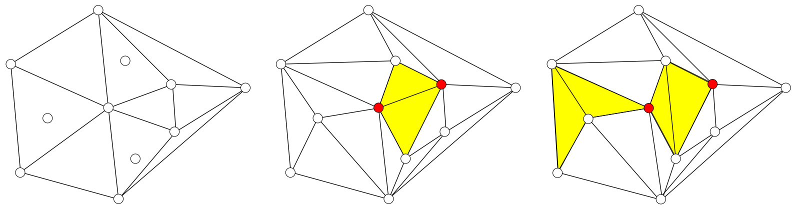


Quantitative analysis : the grid size on which all combinatorial types of 3-polytopes with n vertices can be realized is $\leq 2^{18n^2}$ (43^n for 3-polytopes with a triangular facet). Lower bound?

Notes

Notes

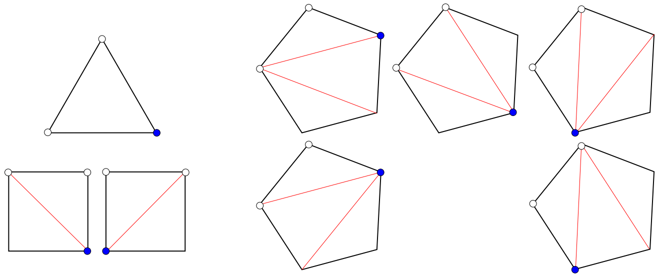
TRIANGULATIONS



1. Une triangulation d'une collection A de n points (n'appartenant pas à une même droite) est une triangulation de l'enveloppe convexe de A et de sommets dans A. Les nombres de triangles et d'arêtes d'une triangulation de A ayant m sommets dont h sont extrémaux sont respectivement égaux à $2m-2-h$ et $3m-3-h$.
2. Arêtes flippables.

✐ — THE NUMBER OF FLIPPABLE EDGES IS AT LEAST $n/2-2$. THIS BOUND IS SHARP.

NUMBER OF TRIANGULATIONS

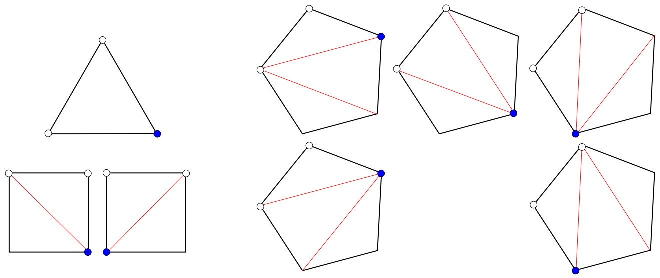


- The number of triangulations of a set $n+2$ points in convex position is the nth Catalan number: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^n}{n^{3/2}}$.
- The number of triangulations of a set of n points is a $O(59^n/n^6)$

[1] F. Santos and R. Seidel. A better upper bound on the number of triangulations of a planar point set. J. Combin. Theory Ser. A, 102(1):186–193, 2003.

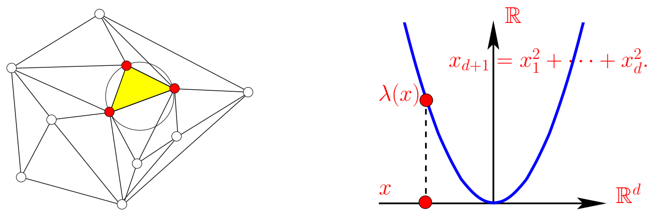
[2] C. Touma and C. Gostman. Triangle mesh compression. Graphics Interface 98, pages 26–34, 1998.

THE ASSOCIAHEDRON



1. The associahedron $\mathcal{A}_n$ is the secondary polytope of a set P of n points in convex position. Its number of vertices is the number of triangulations of P, i.e., the $n-2$-th Catalan number C_{n-2}.
2. The diameter of the graph of $\mathcal{A}_n$ is $2n-10$ for n enough large.

TRIANG. DELAUNAY & ENVELOPPE CONVEXE

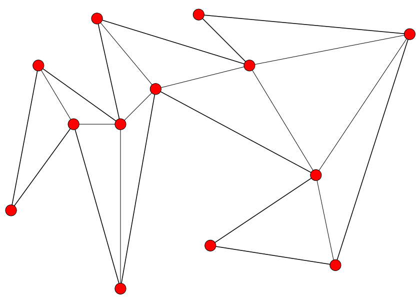


– Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de n points en "position générale" (pas $d+1$ points cocycliques), et soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des parties $R \neq \emptyset$ de S telles qu'il existe une d-sphère *vide* circonscrite à R. Pour $R \in \mathcal{R}$ on appelle *cellule de Delaunay* de R et on note $D(R)$ l'enveloppe convexe de R.

– L'ensemble D des cellules de Delaunay est une triangulation de S, appelée la triangulation de Delaunay de S.

– La triang. Delaunay de S est la proj. env. conv. inf. $\lambda(S)$

TRIANGULATION D'UN POLYGONE SIMPLE

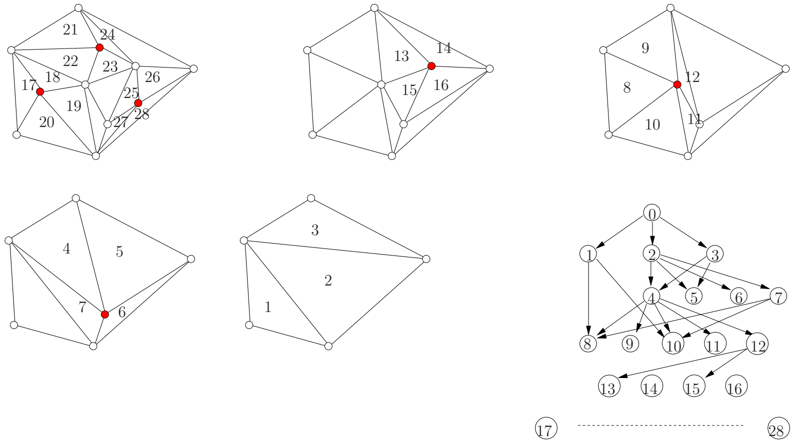


Les nombres de triangles et arêtes internes (diagonales) d'un polygone simple à n sommets sont, respectivement, $n-2$ et $n-3$.

[1] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. Discrete Comput. Geom., 6(5):485–524, 1991.

[2] N. M. Amato, M. T. Goodrich, and E. A. Ramos. A randomized algorithm for triangulating a simple polygon in linear time. Discrete Comput. Geom., 26(2):245–265, 2001.

LOCALISATION



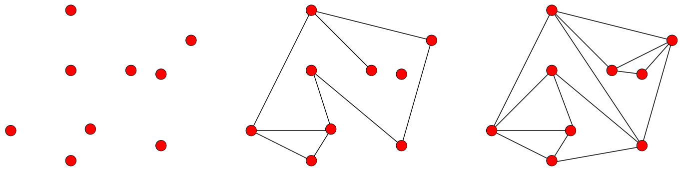
$$\boxed{\sum_{\text{sommet}} \text{degré du sommet} = 2 \times \text{nbr d'arêtes} = 6n - 6 - 2h.}$$

STRUCTURE DE LOCALISATION

Theorem 6. *Le problème de la localisation dans une carte planaire est résoluble en temps $O(\log n)$ avec une structure de données de taille $O(n)$ constructible en temps $O(n \log n)$.* □

1. Suite "croissante" de triangulations $T = T_1, T_2, \dots, T_{O(\log n)}$ de même enveloppe convexe
   - la taille de T_{i+1} est une fraction $\leq \alpha < 1$ de la taille de T_i
   - chaque triangle de T_{i+1} recouvre $O(1)$ triangles de T_i.
2. Taille de la structure $O(n)$.
3. Temps de requête $O(\log n)$.

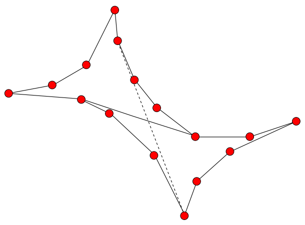
PSEUDO-TRIANGULATIONS (MINIMALES OU POINTÉES)



Soit P un ensemble de n points du plan en position générale et soit E l'ensemble des $n(n-1)/2$ segments d'extrémités dans P. Les éléments de E sont appelés les arêtes de P. Un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ est dit pointé si par tout point p de P passe une droite ne séparant pas les arêtes de F dont p est une extrémité. Une pseudo-triangulation pointée de P est la décomposition de l'enveloppe convexe de P induite par un ensemble maximal (pour la relation d'inclusion) pointé d'arêtes disjointes deux-à-deux (sauf éventuellement en leurs extrémités).

Theorem 7. *Les faces d'une pseudo-triangulation pointée d'une collection de n points en position générale sont des pseudotriangles en nombre $n-2$ et le nombre d'arêtes d'une pseudo-triangulation minimale est $2n-3$.* □

FLIP D'UNE ARÊTE



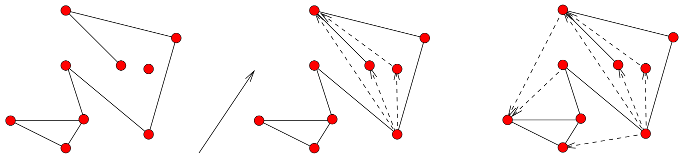
Theorem 8. *Le graphe des pseudo-triangulations pointées liées par une opération de flip est polytopal.* □

Proof. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Soit Q le polytope de $\mathbb{R}^{2n}$ intesections des demi-espaces

$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq f_{ij}$$

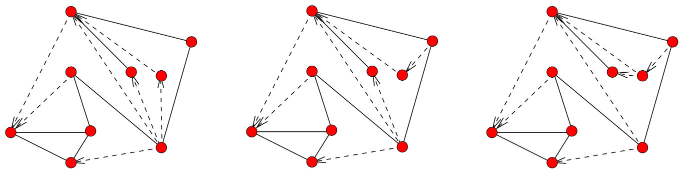
avec égalités pour ij arête de l'enveloppe convexe des p_i et $f_{ij} = \det(a, p_i, p_j)\det(b, p_i, p_j)$ où a, b deux points du plan. Je dis .... □

... GOOD ORDER AND MILITARY DISCIPLINE



1. $K \subset E$ plane and pointed
2. $E_K = \{e \in E \mid K \cup \{e\}$ is plane and pointed$\}$
3. We define a partial order $\prec_K$ on E_K as follows : $e \prec_K e'$ if there exists a sequence of edges $e_1 = e, e_2, \ldots, e_k = e'$ such that e_i and e_{i+1} share a common endpoint and $\Theta(e_i) < \Theta(e_{i+1})$ where $\Theta(e_i) \in [0, \pi)$ is the angle of e_i directed upward with the horizontal positive direction.
4. For any filter I of the poset $(E_K, \prec_K)$, we define a maximal plane pointed set of edges $G(I) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ recursively: edge e_1 is minimal in I, and, for $i > 1$, edge e_{i+1} is minimal in the set of edges $e \in I \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$ such that $K \cup \{e_1, \ldots, e_i, e\}$ is plane and pointed — note that this set is empty after at most $2n - 3$ steps.
5. Replace E_K by $\mathbb{E}_K = E_K \times \mathbb{Z}$, $\Theta(e, k) = \Theta(e) + k\pi$

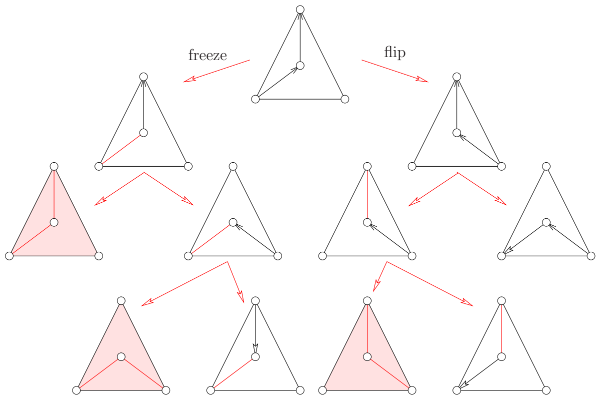
LE FLIP GLOUTON



Theorem 9 (Greedy Flip Property). *Soit e minimal dans le filtre I. Alors $G(I \setminus e)$ est obtenue par flip de e dans $G(I)$.* □

- — Enumération des éléments de E_K; graphes de visibilité.
- — Enumération des pseudo-triangulations minimales.

ENUMERATION OF POINTED PSEUDOTRIANGULATIONS



[1] H. Brönnimann, L. Kettner, M. Pocchiola et J. Snoeyink. – Counting and enumerating pointed pseudo-triangulations with the greedy flip algorithm. In : Proc. 7th Workshop on Algorithm Engeneering and Experiments (ALENEX'05). – SIAM, 2005. To appear.

COUNTING POINTED PSEUDOTRIANGULATIONS

# points	lower-bound	upper bound
3	1	1
4	2	3
5	5	13
6	14	76
7	42	485
8	132	3555
9	429	27874
10	1430	234160

Table 1: Number of pseudo-triangulations found among all the order types.

Conjecture: For any set of points in general position in the plane its number of triangulations is less than its number of pointed pseudotriangulations with equality iff the points are in convex position.

Bibliographie

[1] L. J. Billera, P. Filliman, and B. Sturmfels. Constructions and complexity of secondary polytopes. Adv. Math., 83:155–179, 1990.

[2] Stefan Felsner. Geometric Graphs and Arrangements: Some Chapters from Combinatorial Geometry. Vieweg Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg Verlag, 2004.

[3] D. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivision. SIAM J. Comput., 12(1):28–35, February 1983.

[4] S. Bespamyatnikh. An efficient algorithm for enumeration of triangulations. Comput. Geom. Theory Appl., 23(3):271–279, 2002.

[5] J. Richter-Gebert. Realization Spaces of Polytopes. Number 1643 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1996.

[6] Peter McMullen. Duality, sections and projections of certain euclidean tilings. Geometriae Dedicata, pages 183–202, 1994.

[7] E. Colin de Verdière, M. Pocchiola et G. Vegter. – Tutte's barycentric method applied to isotopies. Comput. Geom. Theory Appl., vol. 26, nN° 1, August 2003, pp. 81–97.

Notes

Notes