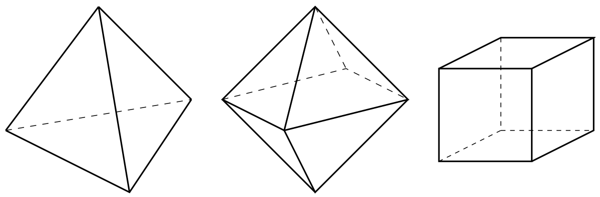
POLYÈDRES ET ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS



- Cônes, polyèdres, polytopes et arrangements
- H- et V-présentations
- Treillis des faces d'un polyèdre
- Théorème d'Euler-Poincaré et théorème de la zone
- Graphe d'un polytope, théorème de la borne supérieure

MATRIX NOTATIONS

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times d}$ .... matrix with m rows and d columns

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & \cdots & a_{2d} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1d} & \cdots & a_{md} \end{bmatrix}$$

$$A \geq 0 \iff a_{ij} \geq 0 \quad \text{for any entry } a_{ij} \text{ of } A$$

$x \in \mathbb{R}^d \approx \mathbb{R}^{d\times 1}$ is considered as a column vector, i.e., $x = [x_1, \dots, x_d]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$

For $a, x \in \mathbb{R}^d$ we set

$$\langle a, x\rangle = a^T x = \sum_{i=1}^{i=d} a_i x_i.$$

CÔNES ET CONVEXES

Un convexe K de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ qui contient les combinaisons convexes de ses parties finies, i.e. pour tout $x, y \in K$, $\lambda \in [0, 1]$, le vecteur $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$. Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^d$ sont des convexes, une intersection de convexes est un convexe et la projection d'un convexe est un convexe. L'enveloppe convexe de $K \subseteq \mathbb{R}^d$ est définie comme le plus petit, pour la relation d'inclusion, convexe contenant K, ou de manière équivalente (exercice) comme l'ensemble des combinaisons convexes des parties finies de K

$$\mathrm{Conv}(K) \;=\; \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in K, \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1\}.$$

Un cône C de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^d$ qui contient les combinaisons positives de ses parties finies, i.e. pour tout $x, y \in C$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, le vecteur $\lambda x + \mu y \in C$. En particulier un cône est convexe et contient toujours le vecteur nul. L'enveloppe positive (ou conique) $\mathrm{Cone}(K)$ de $K \subset \mathbb{R}^d$ est définie comme le plus petit, pour la relation d'inclusion, cône contenant K, ou de manière équivalente (exrecice) comme l'ensemble des combinaisons positives des parties finies de K

$$\mathrm{Cone}(K) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in K, \alpha_i \geq 0\}.$$

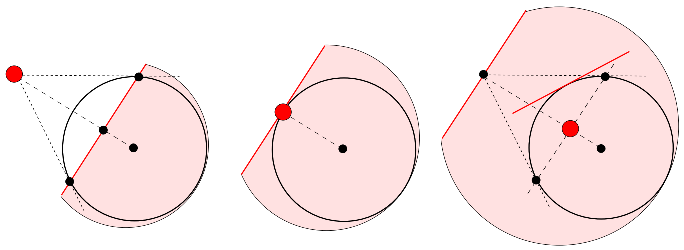
THÉORÈMES DE SÉPARATION

Théorème 1 (Théorème de Hahn-Banach). *Soit A un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit L un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ qui contient L et ne rencontre pas A.* □

Théorème 2. *Soit A un fermé convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap K = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ séparant strictement A et K.* □

Théorème 3. *Soit A un polyèdre convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit L un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ qui contient L et ne rencontre pas A.* □

POLARITÉ



Définition 1. *Le polaire A^* de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est défini comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, z \rangle \leq 1$ pour tout $x \in A$. En d'autres termes le polaire de A est l'intersection des demi-espaces fermés contenant l'origine $\langle z, x \rangle \leq 1$, $x \in A$. L'hyperplan $\langle z, x \rangle$ est appelé l'hyperplan polaire de x.*

Exemples: – $B(o, r)^* = B(o, 1/r)$
– $(\mathrm{Conv}(a_1, a_2, \ldots, a_n))^* = P(\{a_1, \ldots, a_n\}, 1)$
– $(P(\{a_1, \ldots, a_n\}, 1))^* = \mathrm{Conv}(a_1, a_2, \ldots, a_n, o)$.

POLARITÉ (SUITE)

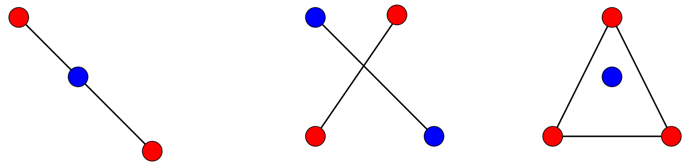
Théorème 4. *Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors*

1. *A^* est un fermé convexe contenant l'origine o de $\mathbb{R}^d$;*
2. *si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$;*
3. *si $A \subset B^*$ alors $B \subset A^*$ – en particulier $A \subseteq A^{**}$;*
4. *A^{**} est l'adhérence de l'enveloppe convexe de $A \cup \{o\}$.* □

✎ — PREUVE

Théorème 5. *Soit C un convexe fermé borné dont l'intérieur contient l'origine o de $\mathbb{R}^d$. Alors C^* est un convexe fermé borné dont l'intérieur contient o, et $C^{**} = C$.* □

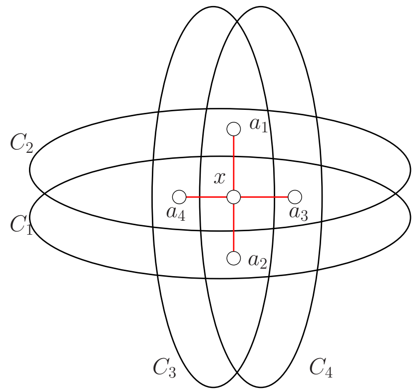
RADON'S LEMMA



Théorème 6 (Radon's Lemma). *Soit A un ensemble de $d+2$ points de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe deux ensembles disjoints $A_1, A_2 \subset A$ tels que $\mathrm{Conv}(A_1) \cap \mathrm{Conv}(A_2) \neq \emptyset$.* □

✎ — PREUVE

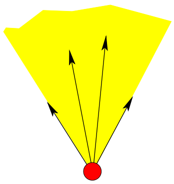
HELLY'S THEOREM

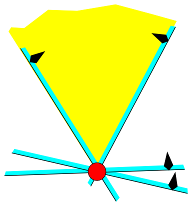


Théorème 7 (Helly's Theorem). *Soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ une collection de $n \geq d+1$ convexes de $\mathbb{R}^d$ telle que toute sous-collection de $d+1$ convexes est d'intersection non vide. Alors l'intersection des C_i est non vide.* □

✎ — PREUVE

CÔNES FINIMENT ENGENDRÉS, CÔNES POLYÈDRIQUES





Une cône C est dit finiment engendré s'il coincide avec l'enveloppe positive d'une famille finie de vecteurs. Un cône C est dit polyèdrique s'il coincide avec l'intersection d'une famille finie de demi-espaces vectoriels. Le cône polyèdrique intersection des m demi-espaces $\langle a_i, x\rangle \le 0$, $i = 1, \dots, m$, est noté $P(A, 0)$ où $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}^d)^m$.

Théorème 8 (Minkowski-Weyl). *La collection des cônes polyèdriques coincide avec la collection des cônes finiment engendrés.* □

Pour du code (cdd et lrs) voir la page de Komei Fukuda : `http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/`

CONVEXES FINIMENT ENGENDRÉS, CONVEXES POLYÈDRIQUES

Un convexe est dit finiment engendré s'il coincide avec l'enveloppe convexe d'une famille finie de points. Un convexe P est dit polyèdrique s'il coincide avec une intersection finie de demi-espaces. Le convexe polyèdrique ou encore polyèdre intersection des m demi-espaces $\langle a_i, x\rangle \le b_i$, $i = 1, \dots, m$, est noté $P(A, b)$ où $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}^d)^m$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. On peut aussi penser A comme la matrice $[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times d}$ (m lignes et d colonnes), b comme le vecteur colonne $[b_1, b_2, \dots, b_m]^T \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ et x comme le vecteur colonne $[x_1, x_2, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^{d\times 1}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & \dots & a_{2d} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{md} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \le b\}$.

Théorème 9 (Minkowski-Weyl Theorem). *$C \subseteq \mathbb{R}^d$ est un polyèdre ssi C est la somme d'un cône finiment engendré et d'un convexe finiment engendré.* □

Un polytope est un polyèdre borné (i.e. ne contenant pas de demi-droite).

PREUVE DU THÉORÈME 8 : DOUBLE DESCRIPTION METHOD

– $C' = \mathrm{Cone}(R) \cap P(\{a\}, 0)$

– R^0, R^-, R^+ les ensembles des $r \in R$ tels que $\langle a, r\rangle = 0$, $\langle a, r\rangle < 0$, $\langle a, r\rangle > 0$, respectivement.

– Je dis que C' est le cône engendré par les vecteurs de R^0, R^- et $\phi_a(R^+, R^-)$ où $\phi_a(r, r') = \langle r, a\rangle r' - \langle r', a\rangle r$.

– ✎ — SOIT $x = \sum_{r\in R} \lambda_r r \in C'$, C'EST-À-DIRE, $\lambda_r \ge 0$ ET $\langle a, x\rangle \le 0$. POSONS

$$\Lambda = -\sum_{r'\in R^-} \lambda_{r'}\langle r', a\rangle = -\langle x, a\rangle + \sum_{r\in R^+} \lambda_r\langle r, a\rangle \ge 0.$$

– ✎ — SI $\Lambda = 0$ ALORS $x = \sum_{r\in R^0} \lambda_r r$; SINON ON PEUT ÉCRIRE

$$\begin{aligned} x - \sum_{r\in R^0} \lambda_r r &= \sum_{r\in R^+} \lambda_r r + \sum_{r'\in R^-} \lambda_{r'} r' = \sum_{r\in R^+} \frac{\lambda_r}{\Lambda}\Lambda r + \sum_{r'\in R^-} \frac{\lambda_{r'}}{\Lambda}\Lambda r' \\ &= \sum_{r\in R^+} \frac{\lambda_r}{\Lambda}\left(-\sum_{r'\in R^-} \lambda_{r'}\langle r', a\rangle\right) r + \sum_{r'\in R^-} \frac{\lambda_{r'}}{\Lambda}\left(-\langle x, a\rangle + \sum_{r\in R^+} \lambda_r\langle r, a\rangle\right) r' \\ &= \sum_{r'\in R^-} \frac{-\langle x, a\rangle\lambda_{r'}}{\Lambda} r' + \sum_{r\in R^+, r'\in R^-} \frac{\lambda_r\lambda_{r'}}{\Lambda} \underbrace{(\langle r, a\rangle r' - \langle r', a\rangle r)}_{\phi_a(r,r')} \end{aligned}$$

PREUVE (SUITE)

– $C = P(A, 0)$, $r \in \mathbb{R}^d$ $\qquad C' = \mathrm{Cone}(C, r)$

– $x \in C'$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x - \lambda r \in C$, i.e. $\langle a, x\rangle \le \lambda\langle a, r\rangle$ pour tout $a \in A$.

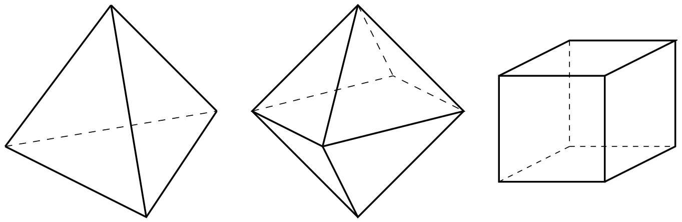
– Scindons l'ensemble A en trois classes A^+, A^-, A^0 selon que le produit scalaire $\langle a, r\rangle$ est positif, négatif ou nul.

– Je dis que $C' = P(B, 0)$ où $B = A^0 \cup A^- \cup \phi_r(A^+, A^-)$ où $\phi_r(a, a') = \langle a, r\rangle a' - \langle a', r\rangle a$.

– ✎ — EN COMBINANT DEUX-À-DEUX LES INÉGALITÉS ASSOCIÉES À A^+ ET A^- NOUS ÉLIMINONS LA VARIABLE POSITIVE λ DE NOTRE SYSTÈME POUR OBTENIR UNE DESCRIPTION DE C' SOUS LA FORME D'UN SYSTÈME D'INÉQUATIONS LINÉAIRES

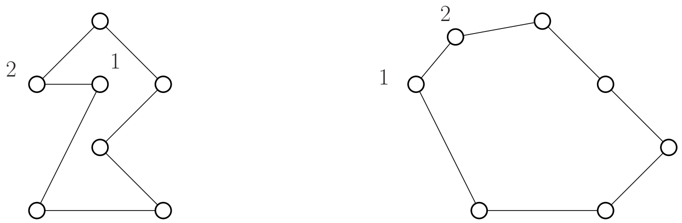
$$\begin{cases} \langle \underbrace{\langle a, r\rangle a' - \langle a', r\rangle a}_{\phi_r(a,a')}, x\rangle \le 0 & (a, a') \in A^+ \times A^- \\ \\ \langle a, x\rangle \le 0 & a \in A^0 \cup A^- \end{cases}$$

SIMPLEXE, CUBE ET COCUBE STANDARDS



- $S_d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_1^{d+1} x_i = 1, x_i \geq 0\} = \mathrm{Conv}\{e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}\}$
- $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq +1\} = \mathrm{Conv}\{\{+1,-1\}^d\} = [-1,+1]^d$
- $C_d^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i |x_i| \leq 1\} = \mathrm{Conv}\{e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d\}$
- C_d et C_d^* sont polaires l'un de l'autre.

LE POLYTOPE DES PSEUDO-TRIANGULATIONS MINIMALES



L'ensemble des polygones SIMPLES $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 \in \mathbb{R}^{14}$ tels que

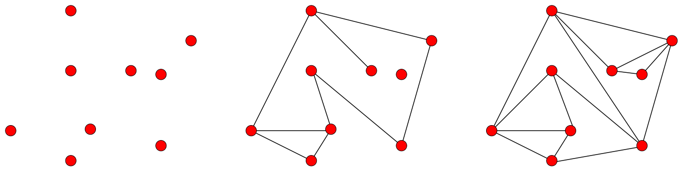
$$\begin{aligned} p_1p_2 = p_6p_7/2 &= 1 \\ p_2p_3 = p_3p_4 = p_4p_5 = p_5p_6 &= \sqrt{2} \\ p_7p_1 &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

est-il connexe?

OUI, via l'étude du cône des dilatations infinitésimales $C(p_1, p_2, \ldots, p_7)$ défini comme l'ensemble des $(v_1v_2\cdots v_7) \in \mathbb{R}^{14}$ tels que

$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq 0 \qquad (\forall ij)$$

LE POLYTOPE DES PSEUDO-TRIANGULATIONS MINIMALES

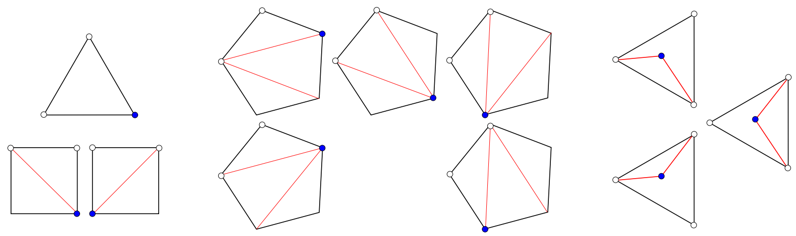


Définition 2. *Soit P un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^2$ en position générale et soit E l'ensemble des segments joignants deux points de P. Une pseudo-triangulation minimale T de P est un ensemble maximal d'éléments de E d'intérieurs disjoints deux-à-deux tel que par tout point x de P passe une droite ne séparant pas les éléments de T d'extrémité x.*

Théorème 10. *Les pseudo-triangulations minimales d'une collection de points p_i sont en bijection avec les sommets du polyèdre obtenu à partir du cône des dilatations infénitésimales associé aux p_i par une perturbation ad hoc, par exemple*

$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq [\det(p_i, p_j)]^2 \qquad (\forall\, ij).$$

EXAMPLE



[1] G. Rote, F. Santos, and I. Streinu. Expansive motions and the polytope of pointed pseudo-triangulations. In B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and M. Sharir, editors, *Discrete and Computational Geometry – The Goodman-Pollack Festschrift*, volume 25 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 699–736. Springer-Verlag, June 2003.

COMBINATOIRE POLYÈDRALE (POLYHEDRAL COMBINATORICS)

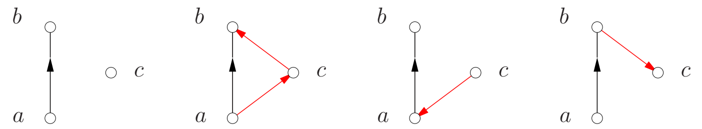
- Birkhoff polytope, perfect matching polytope of $K_{n,n}$, transportation polytope, polytope of doubly stochastic matrices, etc.
- Traveling salesman polytope
-
- Order polytope

Théorème 11. *Soit $(X, \preceq)$ un ensemble fini partiellement ordonné mais non totalement ordonné. Alors il existe deux eléments $a, b \in X$ tels que le rapport entre le nombre d'extensions lineaires de l'ordre $\preceq$ augmenté de la paire (a, b) et le nombre d'extensions linéaires de l'ordre $\preceq$ est compris entre δ et $1-\delta$ où δ est une constante (par exemple $\delta = 1/2e \approx 0.184$).* □

On identifie X avec $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on introduit le polytope

$$P(\preceq) = \{x \in [0,1]^n \mid x_v \leq x_w, \forall (v,w) \in X^2, v \prec w\}.$$

SORTING PARTIALLY ORDERED SETS



Let $(X, \preceq)$ be a finite partially ordered set (poset) and let $e(\preceq)$ be its number of linear extensions.

Théorème 12. *Assume that $\preceq$ is not a linear (or total) order. Then there exist $a, b \in X$ such that*

$$\delta \leq \frac{e(\preceq + (a,b))}{e(\preceq)} \leq 1 - \delta$$

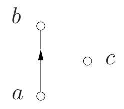
where δ is a constant. □

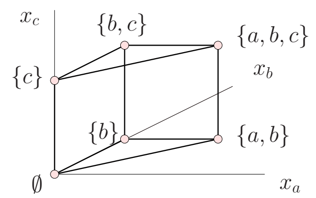
$\delta = 3/11$ in [1], $1/2e$ in [2], and conjectured $1/3$.

[1] J. Kahn and M. Saks. Balancing poset extensions. *Order*, 1:113–126, 1984.

[2] J. Kahn and N. Linial. Balancing extensions via Brunn-Minkowski. *Combinatorica*, 4:363–368, 1991.

ORDER POLYTOPE





Définition 3. *Let $(X, \preceq)$ be a poset with n elements. The order polytope $P(\preceq)$ of $\preceq$ is the set of $x \in [0,1]^X \approx [0,1]^n$ such that $x_a \leq x_b$ for every $a, b \in X$ with $a \preceq b$. In others terms it is the polytope whose set of vertices is the set of characteristic vectors of the filters of $(X, \prec)$.*

NOTES

ARRANGEMENT D'HYPERPLANS

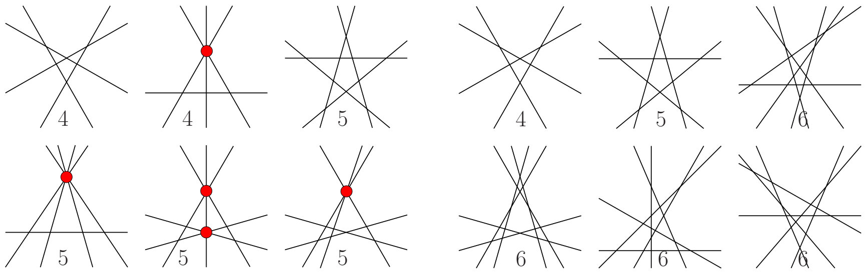
Un arrangement d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$ est un ensemble fini d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$. Un arrangement d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$ est dit simple si l'intersection k à k ($k \geq 1$) de ses hyperplans est un sous-espace affine de codimension k si $1 \leq k \leq d$, vide sinon.
Soit $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ un arrangement de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$. Une cellule de $\mathcal{A}$ est une classe d'équivalence de la relation définie sur $\mathbb{R}^d$ par x est équivalent à y si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $\epsilon \in \{+, -\}$ on a $x \in H_i^\epsilon \iff y \in H_i^\epsilon$, où H_i^+ et H_i^- sont les deux demi-espaces fermés de frontière H_i. Notons qu'une cellule est l'intérieur relatif d'un polyèdre convexe.

Théorème 13. *Le nombre de d-cellules d'un arrangement simple de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$ est*

$$\Phi(d, n) = \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}.$$

— PREUVE PAR INDUCTION SUR d ET n

ISOMORPHISME TYPES



- arrangements dans le plan projectif
- $c(3) = 1$; $c(4) = 2$; $c(5) = 4$; $c(6) = 17$
- $c^S(3) = c^S(4) = c^S(5) = 1$; $c^S(6) = 4$; $c^S(7) = 11$

[1] B. Grünbaum. *Arrangements and Spreads*. Regional Conf. Ser. Math. American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.

LEMMES DE FARKAS

Théorème 14 (Lemme de Farkas I). *Soit une matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times d}$ et un vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^m$. Le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ est vide si et seulement si le polyèdre $\{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, y^T A = 0, y^T b < 0\}$ est non vide.* □

Proof. Nous présentons deux preuves

- via un théorème de séparation;
- via la procédure d'élimination de Fourier-Motzkin;

□

Lemme 14.1 (Lemme de Farkas IIbis). *Soit il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ tel que $Ax \leq b$ ou il existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, tel que $y^T A \geq 0$ et $y^T b < 0$.* □

Proof. Nous présentons deux preuves

- via un théorème de séparation;
- via a variant of Bland's pivot rule to solve systems of inequalities.

□

LE POLYÈDRE $P(A, b)$ EST-IL VIDE?

Théorème 15 (Procèdure de Fourier-Motzkin). *Soit P un polyèdre $P(A, b)$ de $\mathbb{R}^d$ où $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^d$. Alors la somme vectorielle $Q = P + L$ est un polyèdre $P(FA, Fb)$ où F est une matrice positive et où L est parallèle aux hyperplans frontières des demi-espaces définissant le polyèdre Q donnés par la matrice FA, i.e. $\langle FA, L \rangle = 0$.* □

Proof. Posons $L = \mathbb{R}a_0$. Le vecteur $x \in Q$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le point $\lambda a_0 + x \in P$, i.e.

$$\lambda \langle a_0, a \rangle + \langle x, a \rangle \leq b_a \quad (a \in A).$$

Scindons l'ensemble A en trois classes A^+, A^-, A^0 selon que le produit scalaire $\langle a_0, a \rangle$ est positif, négatif ou nul. En combinant deux-à-deux les inégalités de A^+ et A^- nous éliminons la variable λ de notre système pour obtenir une description de Q sous la forme d'un système d'inéquations linéaires

$$\begin{cases} \langle -\langle a_0, a' \rangle a + \langle a_0, a \rangle a', x \rangle \leq -\langle a_0, a' \rangle b_a + \langle a_0, a \rangle b_{a'} & (a, a') \in A^+ \times A^- \\ \langle a, x \rangle \leq b_a & a \in A^0. \end{cases}$$

□

Corolaire 15.1 (Lemme de Farkas I). *Il existe un $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $Ax \leq b$ ou (exclusif) il existe un $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, tel que $y^T A = 0$ et $y^T b < 0$.* □

LE POLYÈDRE $P(A,b) \cap P(-I,0)$ EST-IL VIDE? EXAMPLE I

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & +1 \\ +1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & +2 & -1 \\ -1 & +3 & +1 \\ +1 & +2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & +1 & +1 \\ +5 & +0 & -1 \\ +0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ +1 \\ +0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & +2 & +1 \\ +0 & +1 & +1 \\ +5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$x_1 = +2, x_2 = 0, x_3 = 0$ est solution.

EXAMPLE II

$$\begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +17/2 \\ -14 \\ +70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3/2 & +1/2 & +1 \\ -2 & -2 & -1 \\ +10 & +26 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}x_4 + \mathbf{1}x_5 + \mathbf{0}x_6 = -14 - \{2x_1 + 0x_2 + 2x_3\}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 & +0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix} = -14 < 0 \qquad \begin{bmatrix} +1 & +1 & +0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 & +0 & +2 \end{bmatrix} \geq 0$$

A VARIANT OF BLAND'S PIVOT RULE

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice à m lignes et n colonnes, soit b un vecteur colonne de $\mathbb{R}^m$ et soit $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ la matrice définie par

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \leq n; \\ 1 & \text{si } j = n+i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Posons
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \geq 0, Cx = b\}$ et
- $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, A^T y \geq 0, b^T y < 0\}$.

Lemme 15.1. *P est non vide et seulement si S est non vide.* □

Pour $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_{|K|}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n+m\}$ avec $k_1 < k_2 < \cdots < k_{|K|}$ on note $C_K = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times |K|}$ la matrice définie par $\alpha_{ij} = c_{ik_j}$. De même pour $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ on pose $x_K = [x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{|K|}}]^T$. Une base B est une partie à m éléments de $\{1, 2, \ldots, n+m\}$ telle que la matrice C_B soit inversible.

Lemme 15.2. $B_0 = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ *est une base.*

A VARIANT OF BLAND'S PIVOT RULE

Lemme 15.3. *Soit B une base. Le système d'équations linéaires $Cx = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ est équivalent au système*

$$x_B = C_B^{-1} b - C_B^{-1} C_{\overline{B}} x_{\overline{B}}, \tag{2}$$

où $\overline{B} = \{1, 2, \ldots, n+m\} \setminus B$; ce système est appelé le dictionnaire de la base B.

En particulier le dictionnaire associé à la base B_0 est $x_{B_0} = b - Ax_{\overline{B_0}}$.

A VARIANT OF BLAND'S PIVOT RULE

Soit B une base de dictionnaire

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in \overline{B}} a'_{ij} x_j, \qquad (i \in B).$$

Soit I l'ensemble des indices $i \in B$ tels que $b'_i < 0$ et soit $J(i)$ l'ensemble des indices $j \in \overline{B}$ tels que $a'_{ij} < 0$.
Si $I \neq \emptyset$ on note i_* son plus petit élément et si $J(i_*) \neq \emptyset$ on note j_* son plus petit élément.
Finalement si $I \neq \emptyset$ et $J(i_*) \neq \emptyset$ on pose $\varphi(B) = (B \setminus \{i_*\}) \cup \{j_*\}$; sinon on pose $\varphi(B) = B$.

Théorème 16. *La suite $B, \varphi(B), \varphi^2(B), \ldots$ est stationnaire.* □

Théorème 17. *Supposons que $B = \varphi(B)$. Alors (i) P est non vide ou (ii) P est vide et Q est non vide. Dans chaque cas nous pouvons expliciter un élément de P ou de Q en fonction des coefficients du dictionnaire.* □

Cours Géom. Disc. Algo. (MPRI) M. Pocchiola Février 2006

NOTES

Cours Géom. Disc. Algo. (MPRI) M. Pocchiola Février 2006

NOTES

Cours Géom. Disc. Algo. (MPRI) M. Pocchiola Février 2006

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Avis and B. Kaluzny. Solving inequalities and proving Farkas's lemma made easy. *American Mathematical Monthly*, 111:152–157, February 2004.

[2] B. Grünbaum. *Arrangements and Spreads*. Regional Conf. Ser. Math. American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.

[3] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.

[4] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Number 152 in Graduate texts in Mathematics. Springer, 1995.

[5] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.

[6] G. Kalai and G. Ziegler. *Polytopes - Combinatorics and Computation*. Birkhäuser, 2000.

FACETTES ET FACES D'UN POLYÈDRE

Théorème 18. *Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ un d-polyèdre convexe et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des demi-espaces $R \supset P$ dont la frontière intersecte P selon un convexe de codimension 1. Alors*

- (*i*) *$\mathcal{F}$ est fini;*
- (*ii*) *si $R \in \mathcal{F}$ alors $\mathrm{Fr}(R) \cap P$ est un polyèdre convexe d'intérieur non-vide dans $\mathrm{Fr}(P)$, appelé* facette *de P et noté $\mathrm{Face}_R\, P$;*
- (*iii*) *$P = \bigcap_{\mathcal{F}} R$ est l'unique écriture minimale de P;*
- (*iv*) *$\mathrm{Fr}(P) = \bigcup_{\mathcal{F}} \mathrm{Face}_R\, P$.* □

Définition 4. *Soit P un d-polyèdre. Pour $k = -1, 0, 1, \ldots, d$ une k-face de P est une facette de P si $k = d-1$, P si $k = d$, $\emptyset$ si $k = -1$ et une facette d'une $k+1$-face de P sinon. Les k-faces de P sont appelées les faces de P.* □

TREILLIS DES FACES D'UN POLYÈDRE

Théorème 19. *Soit P un polyèdre convexe de dimension d et $\bigcap_{\mathcal{F}} R$ son écriture minimale. Soit f une face de P et soit $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ l'ensemble des demi-espaces de $\mathcal{F}$ dont les frontières sont les hyperplans supports des facettes de P qui contiennent f. Posons $F_1 = \bigcap_{\mathcal{F}_1} \mathrm{Fr}(R)$. Alors*

- (*i*) *$f = F_1 \cap P$ et F_1 est l'espace affine engendré par f;*
- (*ii*) *$\mathring{f} = F_1 \cap \left(\bigcap_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_1} \mathring{R}\right)$, où $\mathring{f}$ désigne l'intérieur relatif de f;*
- (*iii*) *Pour tout point x de P, si l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup f$ et f ont même dimension alors x appartient à f.* □

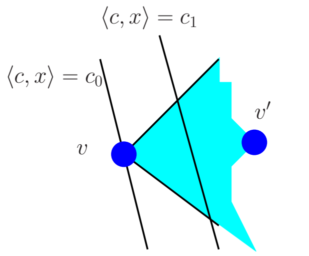
Proposition 1. *Soit P un polyèdre convexe et soient f, g deux faces de P. Alors soit f est une face de g (ou g est une face de f), soit $f \cap g$ est une face de f et de g.* □

Proposition 2. *Soit P un polyèdre convexe et soit R un demi-espace contenant P. Alors $\mathrm{Fr}(R) \cap P$ est une face de P.* □

Proposition 3. *Pour $d \geq 1$ une $(d-2)$-face est incidente à exactement deux $(d-1)$-faces de P.* □

Théorème 20. *Un polyèdre convexe borné est l'enveloppe convexe de ses sommets. Réciproquement l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est un polyèdre convexe borné dont les sommets sont des points de cet ensemble.* □

ÉTOILE D'UN POLYTOPE EN UN SOMMET



- P polytope, $v \in \mathrm{Vert}(P)$
-
- L'étoile de P en v est défini comme le polytope

$$P/v := P \cap \{x \mid \langle c, x\rangle = c_1\}.$$

Théorème 21. *L'application qui à une face F de P contenant v associe l'intersection de F est de l'hyperplan $\langle c, x\rangle = c_1$ réalise une bijection entre l'ensemble des k-faces de P contenant v et l'ensemble des $(k-1)$-faces de P/v. L'inverse est donné par $F' \mapsto P \cap \mathit{aff}(\{v\} \cup F')$.* □

TREILLIS DES FACES

Théorème 22. *Soit P un polytope (convexe) et soit $L(P)$ l'ensemble des faces de P partiellement ordonné par inclusion. Alors*

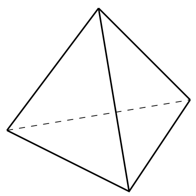
1. *$L(P)$ est un <u>treillis</u> (i.e. toute paire d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant) <u>gradué</u> (i.e. les chaines maximales ont la même longueur) de longueur $\dim(P)+1$ et de fonction rang $rg(F) = \dim(F)+1$. Les sommets et les facettes sont appelés les <u>atomes</u> et les <u>coatomes</u> de $L(P)$.*
2. *Tout intervalle $[G, F]$ de $L(P)$ est le treillis des faces d'un polytope de dimension $rg(F) - rg(G) - 1$. En particulier tout intervalle de longueur 2 admet 4 éléments, i.e. si $G \subset F$ avec $rg(F) - rg(G) = 2$ alors il existe deux faces H telles que $G \subset H \subset F$ (the so-called Diamond property).*
3. *$L(P)$ est atomique (i.e. une face est le plus petit majorant de ses atomes) et coatomique (i.e. une face est le plus grand minorant de ses coatomes). En particulier $L(P)$ est déterminé par sa longueur et par les incidences atome-coatome (sommet-facette).*
4. *Le treillis opposé $L(P)^{op}$ est le treillis des faces d'un polytope (Polarité).* □

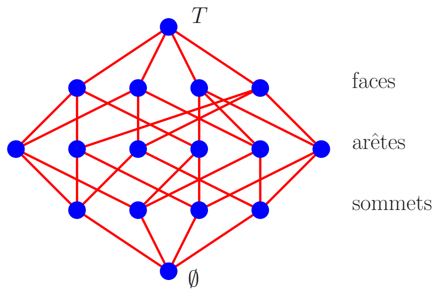
FACES ET POLARITÉ

Soit P un d-polytope contenant l'origine en son intérieur. Pour tout $F \in L(P)$ on note $F^\diamond$ l'ensemble des d-vecteur z tels que $\langle z, x\rangle \leq 1$ pour tout $x \in P$ avec égalité pour $x \in F$.

Théorème 23. *L'application $F \mapsto F^\diamond$ realise une bijection de $L(P)$ sur $L(P^*)$ qui inverse les inclusions. De plus $F^{\diamond\diamond} = F$.* □

SIMPLEXE





- Un d-simplexe est l'enveloppe convexe de $d+1$ points affinement libre.
- Les faces du simplexe S sont exactement les $\mathrm{Conv}(B)$, $B \subseteq \mathrm{Vert}(S)$.
- Le treillis d'un d-simplexe est un treillis booléen, i.e. isomorphe au treillis de l'ensemble des parties d'un ensemble à $d+1$ éléments ordonné par inclusion.

POLYTOPES SIMPLICIAUX/SIMPLES – POLYTOPES CYCLIQUES

Définition 5. *Un polytope est dit simplicial si ses facettes sont des simplexes (c'est le cas de l'enveloppe convexe de points en position générale). Un polytope est dit simple si l'étoile de chaque sommet est un simplexe (c'est le cas de l'intersection de demi-espaces définis par des hyperplans en position générale).*

Le polytope polaire d'un polytope simplicial, contenant l'origine en son intérieur, est simple (et vice versa).

Théorème 24. *L'enveloppe convexe de $n \geq d+1$ points de la courbe des moments $\gamma = \{(t, t^2, \ldots, t^d) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un d-polytope simplicial à n sommets et $\binom{n}{i+1}$ i-faces pour tout $i < \lfloor d/2 \rfloor$. (Ce polytope est appelé "le" d-polytope cyclique à n sommets.)* □

✐ — PREUVE

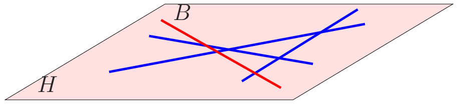
RELATION D'EULER-POINCARÉ

Théorème 25 (Relation d'Euler-Poincaré). *Soit P un d-polytope et soit $f_i(P)$ le nombre de i-faces de P. Alors $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) + \cdots + (-1)^d f_d(P) = 1$.* □

✐ — PREUVE

[1] J. Lawrence. A short proof of Euler's relation for convex polytopes, manuscript.

ZONE D'UN HYPERPLAN

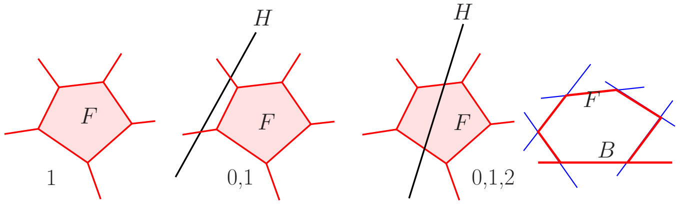


Soit $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ un arrangement de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$. Soit B un $n+1$-ième hyperplan de $\mathbb{R}^d$. On appelle <u>zone</u> de B dans $\mathcal{A}$ et on note $\mathrm{Zone}(B;\mathcal{A})$ l'ensemble des d-cellules de l'arrangement $\mathcal{A}$ intersectées par B, et on note $\mathrm{Zone}_k(B;\mathcal{A})$ l'ensemble des paires (F, C) où C décrit $\mathrm{Zone}(B;\mathcal{A})$ et F décrit l'ensemble des faces de codimension k du polyèdre $\overline{C}$ $(0 \le k \le d)$. Finalement on note $z_k(B;\mathcal{A})$ le nombre d'éléments de $\mathrm{Zone}_k(B;\mathcal{A})$, et on note $z_k(n,d)$ le maximum des $z_k(B;\mathcal{A})$ lorsque B décrit l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arrangements de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 26. $z_k(n,d) = O_d(n^{d-1})$ □

[1] H. Edelsbrunner, R. Seidel, and M. Sharir. On the zone theorem for hyperplane arrangements. *SIAM J. Comput.*, 22(2):418–429, 1993.

PREUVE



Lemme 26.1. *Pour tout $d > 1$, $0 \le k < d$ et $n > k$ on a*

$$(n-k)z_k(n,d) \le n\,\{z_k(n-1,d) + z_k(n-1,d-1)\}\,. \quad \square$$

Proof.

- arrangements simples
- la contribution à $z_k(B;\mathcal{A})$ des cellules de codimension k non incluses dans H est au plus

$$z_k(B;\mathcal{A}\setminus\{H\}) + z_k(B\cap H;\mathcal{A}_{|H}).$$

- une face de codimension k étant incluse dans exactement k hyperplans de $\mathcal{A}$ on déduit que

$$(n-k)z_k(B;\mathcal{A}) \le \sum_{H\in\mathcal{A}} \{z_k(B;\mathcal{A}\setminus\{H\}) + z_k(B\cap H;\mathcal{A}_{|H})\}.$$

□

NOTES

NOTES

UPPER BOUND THEOREM

Théorème 27 (MacMullen 1970). *Soit P un d-polytope à n facettes. Alors le nombre de i-faces de P est borné par le nombre $\gamma_i(d,n)$ de i-faces du dual du d-polytope cyclique à n sommets. De plus*

$$\gamma_i(d,n) = \sum_{0\le j\le d} \binom{j}{i}\binom{n-1-\max\{j,d-j\}}{\min\{j,d-j\}}.$$

En particulier $\gamma_i(d,n) = \Theta(n^{\lfloor d/2\rfloor})$ pour $d = O(1)$. $\square$

[1] P. McMullen. The maximal number of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17:179–184, 1970.

ORIENTATIONS ACYCLIQUES ET h-VECTEUR

Théorème 28. *Soit P un d-polytope simple à n facettes, f_i le nombre de i-faces de P, et h_i le nombre de sommets de degré entrant i d'une <u>bonne</u> orientation acyclique du graphe sommet-arête $G(P)$ de P. Alors pour tout $i = 0,\dots,d$*

1. $$f_i = \sum_{0\le j\le d}\binom{j}{i}h_j, \qquad h_i = \sum_{0\le j\le d}(-1)^{i+j}\binom{j}{i}f_j$$
2. *h_i est independant de l'orientation choisie;*
3. *$h_i = h_{d-i}$* *Relations de Dehn-Sommerville*
4. $$\boxed{h_i \le \binom{n-1-\max\{i,d-i\}}{\min\{i,d-i\}}}$$

POLYTOPES CYCLIQUES

Théorème 29. *Soit P le dual de l'enveloppe convexe de $n \ge d+1$ points de la courbe des moments $\gamma = \{(t,t^2,\dots,t^d) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Alors*

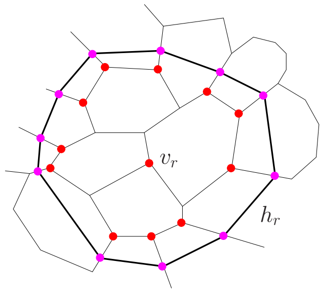
1. *P est un d-polytope simple à n facettes;*
2. *$f_i(P) = \binom{n}{d-i}$ et $h_i(P) = \binom{n-i-1}{d-i}$ pour tout $i > \lfloor d/2\rfloor$;*
3. *$f_i(P) = \gamma_i(d,n)$ pour tout i.* $\square$

Exemple en dimension 4:

$$h_0 = h_4 = \binom{n-5}{0}, h_1 = h_3 = \binom{n-4}{1}, h_2 = \binom{n-3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&1&3&6\\ 0&0&0&1&4\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0\\ h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12 n(n-3)\\ n(n-3)\\ \frac12 n(n-1)\\ n\\ 1\end{pmatrix}$$

CALCUL D'UNE ENVELOPPE CONVEXE



Le treillis des faces du polytope (polyèdre) enveloppe convexe d'une collection de n points (intersection d'une famille de n demi-espaces) de $\mathbb{R}^d$ avec $d = O(1)$ est constructible en temps

1. $O(n^{\lfloor d/2\rfloor} + n\log n)$ (B. Chazelle 1993)
2. $O(n\log f + (nf)^{1-1/(\lfloor d/2\rfloor+1)}\log^{c(d)} n)$ (T. Chan 1996).

GRAPHE D'UN POLYTOPE

Le graphe $G(P)$ du polytope P est son 1-squelette, i.e., l'union de ses sommets et de ses arêtes.

– (Steinitz Theorem) Un graphe est le graphe d'un 3-polytope ssi il est simple, planaire et 3-connexe.

– (Balinski Theorem) Le graphe d'un d-polytope est d-connexe.

– (Blind & Manni et Kalai Theorem) Le graphe d'un polytope simple détermine le treillis de ses faces. ✐ — PREUVE

– Diamètre du graphe d'un polytope. Pour $n > d \geq 2$ soit $\Delta(d, n)$ le plus grand diamètre possible du graphe d'un d-polytope à n facettes. La conjecture de Hirsh affirme que $\Delta(d, n) \leq n - d$.

Théorème 30. *Soit P un polyèdre convexe de dimension d à n facettes et soit cx une forme linéaire générique qui atteint son maximum sur P en le sommet w. Alors de tout sommet v de P il existe un chemin monotone de v à w dont la longueur est bornée par*

$$H_u(d, n) \leq 2n\binom{d + \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}{d - 1} \leq 2n^{\log_2(d)+1} = 2(2d)^{\log_2(n)}.$$

□

– Programmation linéaire en temps $d^2 n + 2^{O(\sqrt{d \log d})}$

PROGRAMMATION LINÉAIRE

– Algorithme du simplex

– Algorithmes polynomiaux

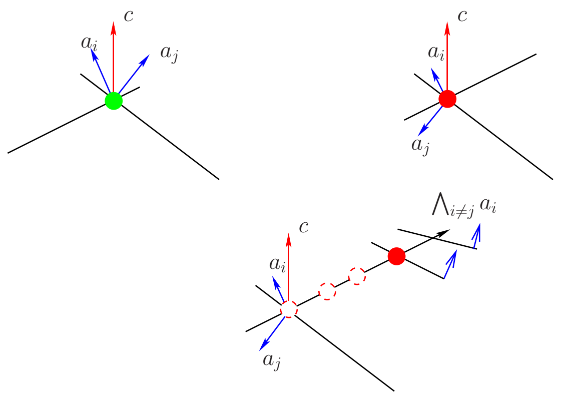
– Fortement Polynomial

– Algorithmes randomisés

– Petites et grandes dimensions

– Calcul du volume d'un corps convexe

LINEAR PROGRAMMING FOR GEOMETERS



ALGORITHME DU SIMPLEXE

$$\max\{cx \mid x \in P\}, \qquad P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b \in \mathbb{R}^m\}$$

INPUT: A_I base admissible, i.e. $d \times d$ sous-matrice inversible de A et $v = A_I^{-1} b_I \in \mathrm{Vert}(P)$

Soit $u = u_I + u_{\overline{I}}$ défini par $u_I A_I = c, u_{\overline{I}} = 0$

1. $u \geq 0$. v est OPTIMAL
2. $u \not\geq 0$. Posons $i_* = \min\{i \mid u_i < 0\}$ et $y = A_I^{-1}(0_I - 1_{i_*})$
   (a) $Ay \leq 0$. LP-PROBLÈME NON BORNÉ
   (b) $Ay \not\leq 0$.
      i. Posons $j_* = \min\{j \mid \lambda_j = \lambda_0\}$ où $\lambda_0 = \min\{\lambda_j \in \mathbb{R} \mid a_j y > 0, a_j(v + \lambda_j y) = b_j\}$
      ii. $I \leftarrow I \setminus \{i_*\} \cup \{j_*\}$

A_I base admissible de sommet associé $v + \lambda_0 y$

SIMPLEX ALGORITHM

Comment déterminer un premier sommet de $P = P(A)$? Considérons le problème de programmation linéaire :

$$\max\{cx \mid x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

(Tout LP-problème se réduit à cette forme.) Nous décomposons $Ax \leq b$ en $A_1x \leq b_1, A_2x \geq b_2$ avec $b_1 \geq 0$ et $b_2 > 0$. Considérons alors le problème

$$\max\{\mathbf{1}(A_2x - x') \mid x, x' \geq 0; A_1x \leq b_1, A_2x - x' \leq b_2\} \tag{3}$$

où x' est un nouveau vecteur de variables et $\mathbf{1}$ est une ligne de 1. Alors $(x, x') = 0$ est un sommet du nouveau polyèdre. Par suite nous pouvons résoudre (3) par la méthode du simplexe. Si la valeur maximale de (3) est $\mathbf{1}b_2$, atteinte disons en le sommet (x_*, x'_*), alors x_* est un sommet du polyèdre P. Si valeur maximale de (3) est inférieure à $\mathbf{1}b_2$ alors $P(A)$ est vide.

Pour passer de $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ à $\max\{cx \mid x \geq 0, Ax = b\}$ on utilise l'équivalence

$$Ax \leq b \iff x', x'', x''' \geq 0, Ax' - Ax'' + x''' = b$$

NOTES

BIBLIOGRAPHIE

[1] David Avis and Bohdan Kaluzny. Solving inequalities and proving Farkas's lemma made easy. *American Mathematical Monthly*, 111:152–157, February 2004.

[2] Timothy M. Chan. Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions. *Discrete Comput. Geom.*, 16:361–368, 1996.

[3] Timothy M. Chan. Output-sensitive results on convex hulls, extreme points, and related problems. *Discrete Comput. Geom.*, 16:369–387, 1996.

[4] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.

[5] J. Richter-Gebert. *Realization Spaces of Polytopes*. Number 1643 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1996.

[6] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Number 152 in Graduate texts in Mathematics. Springer, 1995.

[7] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.

[8] Kalai and Ziegler. *Polytopes - Combinatorics and Computation*. Birkhäuser, 2000.

NOTES