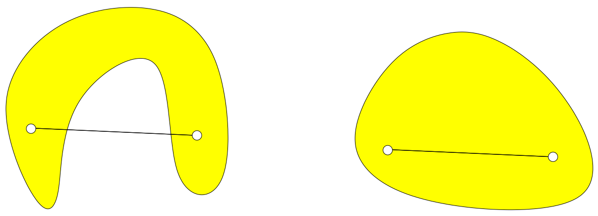
2D Convex Hulls and Lower Envelopes

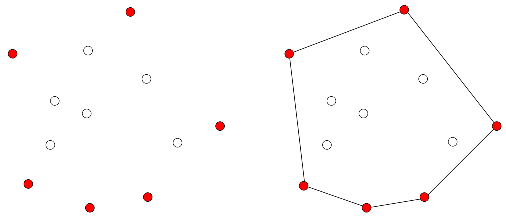


Un sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit convexe s'il contient les combinaisons convexes de ses parties finies, i.e. pour tout $x, y \in K$ le segment $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est inclus dans K. L'ensemble vide est un convexe et une intersection de convexes est un convexe. Les points, les disques, les droites et les demi-plans sont des convexes. L'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(K)$ de K est par définition le plus petit (pour l'inclusion) convexe contenant K. C'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes des parties finies de K :

$$\mathrm{conv}(K) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in K, \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1\}.$$

Theorem 1 (Hahn-Banach). *Soit A un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit x un point n'appartenant pas à A. Alors il existe une droite passant par x qui ne rencontre pas A.* □

Polygones



Un convexe est dit finiment engendré s'il coincide avec l'enveloppe convexe d'une famille finie de points.

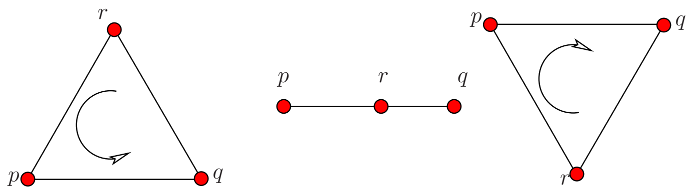
Theorem 2. *La famille des convexes finiment engendrés coincide avec la famille des intersections finies et bornées de demi-plans fermés (les polygones).* □

Pour K fini les sommets de $\mathrm{conv}(K)$ sont ses points extremaux (i.e. les points x de K tels qu'il existe une droite passant par x telle que $K \setminus \{x\}$ soit inclus dans l'un des deux demi-plans ouverts définis par la droite), et ses arêtes sont les segments extremaux joignants deux points de K (i.e. les segments $[x, y]$, $x, y \in K$, tels que $K \setminus [x, y]$ soit inclus dans l'un des deux demi-plans ouverts définis par la droite xy).

Table des matières

- Orientation d'un triplet de points, chirotopes, CC systèmes
- Graham's Scan, Jarvis's March, Chan's output sensitive algorithm
- Incremental randomized and deterministic algorithms
- Lower envelopes, Davenport-Schinzel sequences.

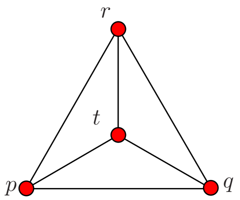
Orientation d'un triplet de points



$$\boxed{\chi : (p, q, r) \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mapsto \mathrm{sign}\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \{+, 0, -\}}$$

1. $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = deux fois l'aire algébrique du triangle pqr
2. $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & r & p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} p & r & q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Orientation d'un triplet de points



Lemma 1. *Soient $tpqr$ un quadruplet de points tels que les trois triplets tpq, tqr et trp aient des orientations positives. Alors il en est de même du triplet pqr.* □

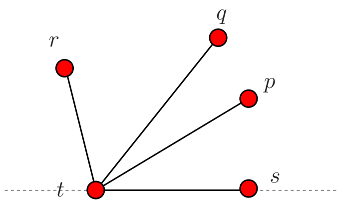
Se déduit de la relation

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} p & q & r & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & r & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} p & r & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} p & q & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.}$$

Dans ce cas nous notons que le point t est <u>combinaison convexe</u> des points p, q et r (régle de Cramer):

$$\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} t = \det\begin{pmatrix} t & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} p + \det\begin{pmatrix} p & t & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} q + \det\begin{pmatrix} p & q & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} r.$$

Orientation d'un triplet de points



Lemma 2. *Si les triplets tsp, tsq, tsr, tpq et tqr ont des orientations positives alors il en est de même du triplet tpr. (En d'autres termes la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des points x tels que le triplet tsx soit d'orientation positive par "$p\mathcal{R}q$ si le triplet tpq est d'orientation positive" est une relation transitive.)* □

Raisonnons par l'absurde. Si l'orientation du triplet tpr est négative alors t est combinaison convexe de p, q et r (cf. Lemma 1), et par suite $0 = \det\begin{pmatrix} t & s & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison convexe des termes positifs $\det\begin{pmatrix} t & s & p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & s & q \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det\begin{pmatrix} t & s & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, contradiction.

Chirotope

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$
- $\chi_P : (p,q,r) \in P^3 \mapsto \chi(p,q,r) =$ orientation du triplet (p,q,r)
- Les propriétés des chirotopes sur au plus 5 points en position générale (i.e., $\chi(p,q,r) \neq 0$) sont captées par les 5 propriétés suivantes du prédicat $(p,q,r) \mapsto pqr \in \{V,F\}$ défini par $pqr \iff \chi(p,q,r) = 1$:

P1:	symétrie circulaire	$pqr \implies qrp$
P2:	antisymétrie	$pqr \implies \neg prq$
P3:	non dégénérescence	$pqr \vee prq$
P4:	intériorité	$tqr \wedge ptr \wedge pqt \implies pqr$
P5:	transitivité	$tsp \wedge tsq \wedge tsr \wedge tpq \wedge tqr \implies tpr$
P6:	transitivité duale	$stp \wedge stq \wedge str \wedge tpq \wedge tqr \implies tpr$

- L'espace de réalisation du chirotope χ_P est l'ensemble des $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{2\times n}$ tels que pour tout (i,j,k) on ait $\chi(q_i,q_j,q_k) = \chi(p_i,p_j,p_k)$. ✐ — Universality Theorem

CC systems

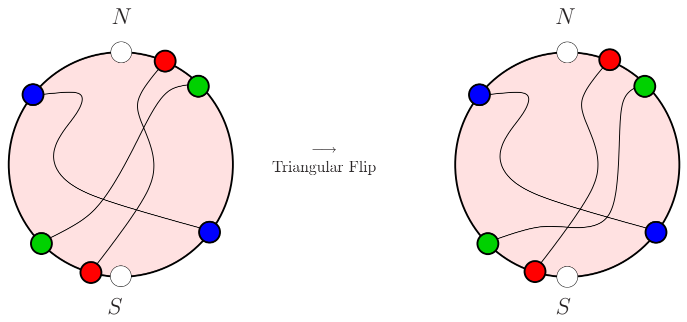
- Un CC système est un prédicat défini sur l'ensemble des triplets d'entiers distincts deux-à-deux, compris entre 1 et n, et vérifiant les propriétés P1, P2, P3, P4, P5 et P6
- CC système réalisable (ou étirable)
- #CC systèmes $= 2^{\Theta(n^2)}$ #CC systèmes réalisables $= 2^{\Theta(n \log n)}$ NP-hard
- Énumération pour $n \leq 10$ (à permutation près des entiers de 1 à n) (SCG'01)

n	4	5	6	7	8	9	10	11
Réalisables	2	3	16	135	3315	158817	14309547	2334512907
Non Réalisables						13	10635	?

Des réalisations (des réalisables) sont disponibles sur la page de O. Aichholzer
`http://www.cis.tugraz.at/igi/oaich/`

- CC systèmes = matroides orientés de rang 3 uniformes et acycliques

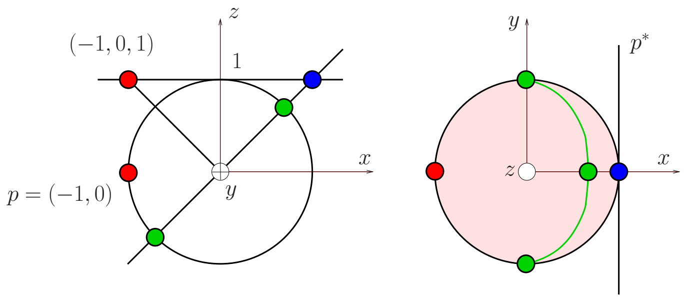
Topological models for CC systems



– Arrangements de pseudodroites dans le plan affine ou projectif

– Topological Representation Theorem of Folkman and Lawrence (1978).

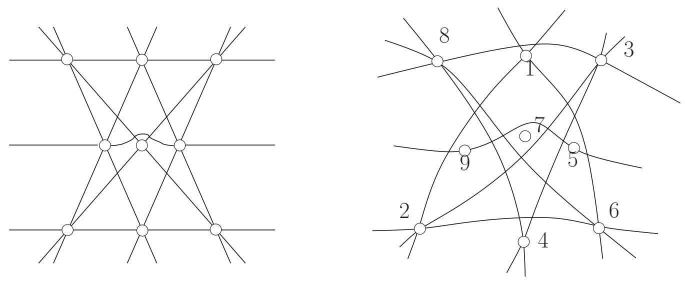
Topological models for CC systems



Au point $p(a,b)$ est associé la trace du plan orthogonal à la droite $\mathbb{R}(a,b,1)$ sur la demi-sphère unité $\mathbb{S}^1_+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$ incluse dans le demi-espace des $z \geq 0$.

$$p(a,b) \leftrightarrow \begin{cases} ax+by+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} ax+by \leq 0 \\ (1+a^2)x^2+(1+b^2)y^2+2abxy=1 \end{cases} \leftrightarrow ax+by+1=0$$

Arrangements non étirables - Syzygy



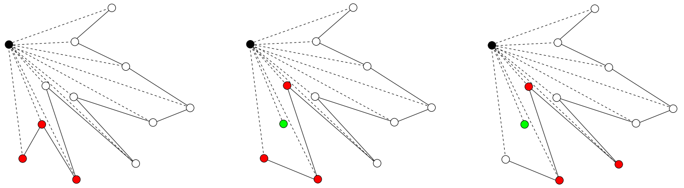
– Pappus-Pascal configuration and a non-stretchable simple arrangement of 9 pseudolines.

–

$$\begin{aligned}
[246][184][175][437][197] &+ [129][184][175][437][467]+ \\
[138][194][247][175][467] &+ [156][184][247][437][197]+ \\
[345][184][247][176][197] &+ [489][247][175][176][143]+ \\
[597][247][184][176][143] &+ [678][247][175][194][143]+ \\
[237][194][184][175][467] &= 0
\end{aligned}$$

Notes

Graham's scan in textbooks

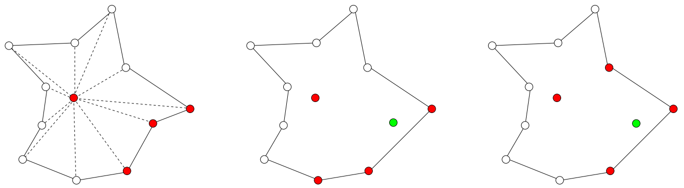


Algorithm GrahamHull2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

1. Choose an extreme point p_1 of P, sort the points of P ccw around p_1, and store the points in a linear list $L = p_1 p_2 \ldots p_n p_1$
2. $(p, q, r) \leftarrow p_1 p_2 p_3$
3. **Repeat**
4. **if** pqr **then** $(p, q, r) \leftarrow (q, r, \mathrm{succ}(r))$
5. **else** delete q from L and $(p, q, r) \leftarrow (\mathrm{succ}^{-1}(p), p, r)$
6. **until** $r = p_1$
7. **return** the list L

✎ — Correction & Analyse de complexité? ✎ — *Demo : foo -random 100*

Graham's scan by Graham

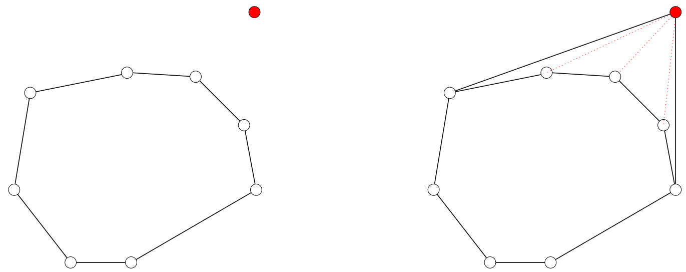


Algorithm GrahamHull2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

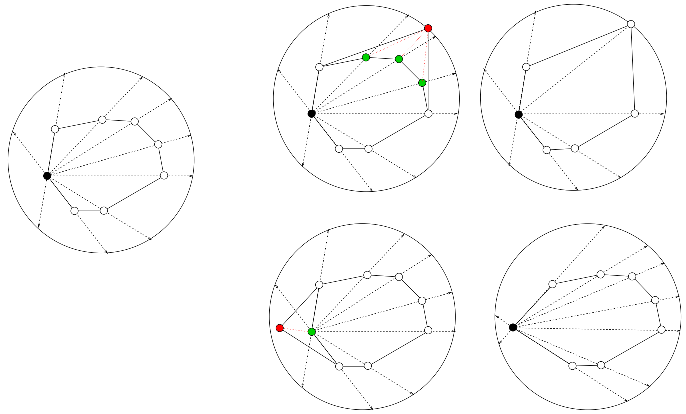
1. Choose a point p inside the convex hull of P, sort circularly the points of P ccw around p, and store the points in a circular list $L = \ldots \mathrm{succ}^{-1}(p) p \, \mathrm{succ}(p) \ldots$
2. $(p, q, r) \leftarrow$ three consecutive points of L
3. **Repeat**
4. **if** pqr **then** $(p, q, r) \leftarrow (q, r, \mathrm{succ}(r))$
5. **else** delete q from L and $(p, q, r) \leftarrow (\mathrm{succ}^{-1}(p), p, r)$
6. **until** To be filled
7. **return** the list L

✎ — Correction & Analyse de complexité? ✎ — *Demo : foo -random 100*

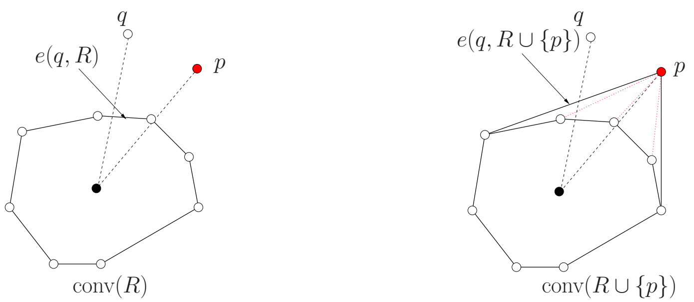
Algorithme incrémentaux



Knuth incremental algorithm



Randomized incremental algorithm



1. Choisir une permutation <u>aléatoire</u> $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ des n points de P et poser $R_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$
2. $\text{conv}(R_3) \to \text{conv}(R_4) \to \cdots \to \text{conv}(R_n)$
3. Maintenir une arête <u>visible</u> de chaque point
4. Coût de l'insertion de p est le cardinal de l'ensemble des $q \in P$ tels que $e(q, R) \neq e(q, R \cup \{p\})$
5. Le coût moyen de l'algorithme est donc $\sum_{q \in P} \sum_{k=1}^{k=n} \text{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)]$

Rand. Incr. Alg. : Backward Analysis

Pour évaluer $\text{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)]$ nous observons que

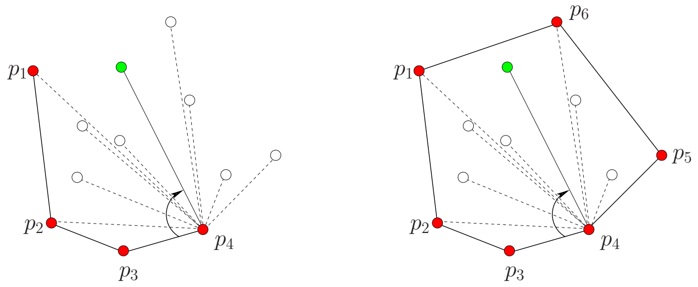
$$\text{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k) \mid R_k = R] \leq \frac{2}{k}.$$

Il suit que

$$\text{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)] \leq \frac{2}{k}.$$

Il suit que le nombre moyen de changement de $e(q, R)$ est $\sum_{k=1}^{n} 2/k = O(\log n)$, et la complexité moyenne de l'algorithme est un $O(n \log n)$.

Marche de Jarvis (Jarvis's March)

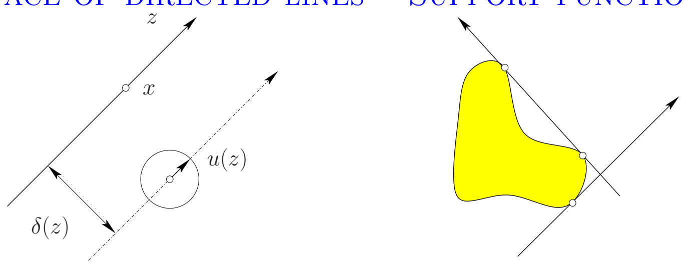


Algorithm JarvisHull2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

$p_0 \leftarrow (0, +\infty)$
$p_1 \leftarrow$ the leftmost point of P
for $k = 1, 2, \dots$ **do**
  $p_{k+1} \leftarrow$ the point q from P that maximizes $\angle p_{k-1} p_k q$
  if $p_{k+1} = p_1$ **then return** the list $p_1, \dots p_k$

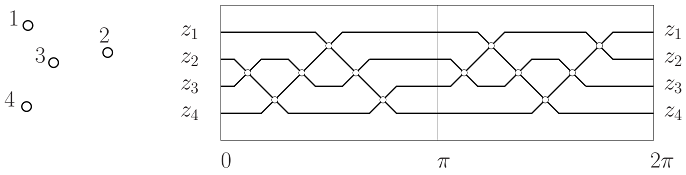
Notes

SPACE OF DIRECTED LINES – SUPPORT FUNCTIONS



1. A directed line z is a line with a direction $u(z) \in \mathbb{S}^1$ assigned to it and indicated in the figures by an arrow. The direction-coordinate of z is its direction $u(z)$ and its distance-coordinate is the real $\delta(z)$ defined as the common value of the scalar products $\langle x, \imath u\rangle$ where x ranges over the undirected version of the line. The space of directed line is denoted $\mathbb{D}$ and is homeomorphic to $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ via $z \mapsto (u(z), \delta(z))$
2. The support function of $X \subseteq \mathbb{R}^2$ is the map $\lambda_X : u \in \mathbb{S}^1 \to \inf_{x \in X}\langle x, \imath u\rangle \in \mathbb{R}$ and the directed lines $(u, \lambda_X(u))$ are called the supporting lines of X
3. The support function of X coincides with the support function of its convex hull $\mathrm{conv}(X)$.
4. $z_X(\theta) = \lambda_X \circ \exp(\imath\theta) = \lambda_X((\cos\theta, \sin\theta))$ $\qquad z_X(\theta + \pi) = -z_X(\theta)$

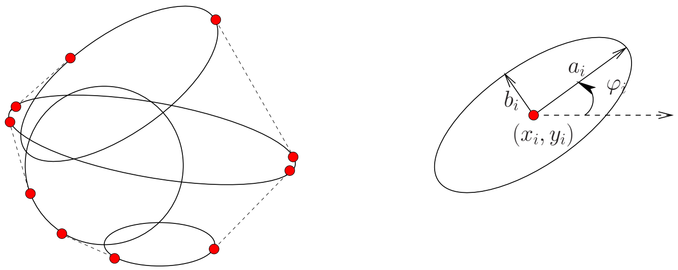
CONVEX HULLS AND LOWER ENVELOPES



La fonction support $z_i(\theta)$ du point (x_i, y_i) est donnée par l'expression

$$z_i(\theta) = -x_i \sin\theta + y_i \cos\theta$$

CONVEX HULLS AND LOWER ENVELOPES



- La fonction support $z_i(\theta)$ de l'ellipse de centre (x_i, y_i), de demi-axes a_i et b_i, et d'inclinaison φ_i est donnée par
$$z_i(\theta) = -x_i \sin\theta + y_i \cos\theta - R_i(\theta - \varphi_i)$$
où $R_i(\theta) = [a_i^2 \sin^2\theta + b_i^2 \cos^2\theta]^{1/2}$.
- Quelle est la complexité de l'enveloppe convexe d'une famille d'ellipses?

SUITES DE DAVENPORT-SCHINZEL

$$ABRACADABRABRICABRA \in \Lambda_8([6])$$

Tout mot sur un alphabet à n lettres ne contenant aucun facteur de type aa et aucun sous-mot alterné de type $abab\ldots$ de longueur $\geq s+2$ est appelé une suite de Davenport-Schinzel de paramètre s sur un alphabet à n lettres. L'ensemble des mots de Davenport-Schinzel de paramètre s sur un alphabet à n lettres est noté $\Lambda_s(n)$ et la longueur maximale d'un tel mot est noté $\lambda_s(n)$.
✎ — $\lambda_1(n) = n,\ \lambda_2(n) = 2n-1,\ \lambda_s(n) \leq 1 + (s+1)\binom{n}{2}$ ET $\lambda_3(n) = O(n \log n)$.

$$\boxed{\frac{1}{2}n\alpha(n) - 2n \leq \lambda_3(n) \leq 2n\alpha(n) + O(\sqrt{n\alpha(n)})}$$

où $\alpha(n) = \min\{k \geq 1 \mid A(k) \geq n\}$ est l'inverse de la fonction d'Ackermann $A(n) = A_n(n)$ définie par

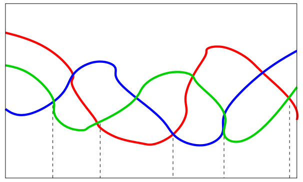
$$\begin{cases} A_1(n) &= 2n \\ A_{k+1}(n) &= \overbrace{A_k \circ \cdots \circ A_k}^{n}(1). \end{cases}$$

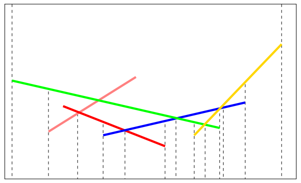
Notons que $A_2(n) = 2^n$, $A_3(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot}}}$ est la tour de 2 de hauteur n (l'inverse de $A_3(n)$ est noté $\log^*$). $A_4(3) = 2^{16}$ et $A_4(4) = A_3(A_4(3))$ est une tour de 2 de hauteur $A_4(3) = 2^{16} = 65536$; pour dire que $\alpha(n) \leq 4$ pour tout entier "machine".

Bornes

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\ ;\ }lcl} \lambda_1(n) & = & n & \lambda_2(n) & = & 2n-1 \\ \lambda_3(n) & = & \Theta(n\alpha(n)) & \lambda_4(n) & = & \Theta(n2^{\alpha(n)}) \\ \lambda_{2s+2} & = & O(n2^{\alpha(n)^{s(1+o(1))}}) & \lambda_{2s+3} & = & O(n2^{\alpha(n)^{s(1+o(1))}\cdot\log(\alpha(n))}) \end{array}}$$

2D Lower Envelopes





Soit $\mathcal{F} = \{f_i : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ une famille de n fonctions numériques continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ dont les graphes sont sécants (transversalement) deux-à-deux en au plus s points, et soit $f = \min \mathcal{F}$ son enveloppe inférieure. Soit $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ la suite minimale de réels telle que pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on ait $f(x) = f_{j_i}(x)$. Posons $U(\mathcal{F}) = j_0 j_1 \dots j_m$.

Theorem 3. *L'application $\mathcal{F} \mapsto U(\mathcal{F})$ est à valeurs dans $\Lambda_s(n)$ et est surjective.* □

A divide and conquer algorithm

Function Hull($f_1, f_2, \dots, f_n$);
  $H_1 :=$ Hull($f_1, \dots, f_{\lfloor n/2 \rfloor}$);
  $H_2 :=$ Hull($f_{\lfloor n/2 \rfloor+1}, \dots, f_n$);
  return Merge(H_1, H_2);
End

Theorem 4. *L'enveloppe inférieure d'une famille $f_i : I_i \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de n fonctions numériques continues définies sur des intervalles I_i de $\mathbb{R}$ et dont les graphes sont sécants deux-à-deux en au plus s points est calculable en temps*

1. *$O(\lambda_s(n) \log n)$ si $I_1 = I_2 = \cdots = I_n$;*
2. *$O(\lambda_{s+1}(n) \log n)$ si les I_i ont une extrémité commune;*
3. *$O(\lambda_{s+2}(n) \log n)$ sinon.* □

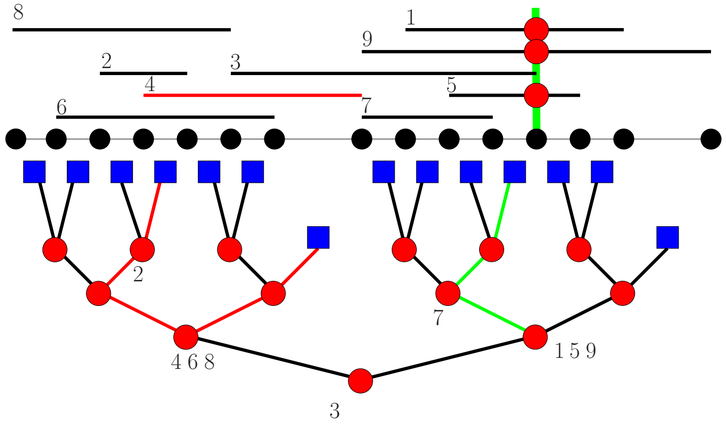
$$\boxed{T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(\lambda_s(n))}$$

Doing better

Theorem 5. *L'enveloppe inférieure d'une famille $f_i : I_i \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de n fonctions numériques continues définies sur des intervalles I_i de $\mathbb{R}$ et dont les graphes sont sécants deux-à-deux en au plus s points est calculable en temps $O(\lambda_{s+1}(n) \log n)$. En particulier l'enveloppe inférieure d'une famille de n segments est calculable en temps "optimal" $O(n \log n)$.* □

1. Soit $\mathcal{T}$ un "arbre d'intervalles" pour la famille des intervalles I_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Soit Γ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) l'ensemble des fonctions f_j dont l'intervalle I_j est stocké au niveau i de l'arbre $\mathcal{T}$ et soit n_i le cardinal de Γ_i. Alors le nombre de points de transition de l'enveloppe inférieure E_i de Γ_i est un $O(\lambda_{s+1}(n_i))$.
2. Calculer E_i en temps $O(\lambda_{s+1}(n_i) \log n_i)$ (cf. Théorème **??**).
3. Fusionner récursivement les E_i ($i = 1, \dots, k$) par dichotomie.
4. ✐ — Analyse de complexité?

Arbre d'intervalles



$\Gamma_1 = \{3\}, \Gamma_2 = \{4, 6, 8, 1, 5, 9\}, \Gamma_3 = \{7\}, \Gamma_4 = \{2\}.$

Bibliographie

[1] Donald E. Knuth. Axioms and Hulls, volume 606 of Lecture Notes Comput. Sci. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1992.

[2] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, and Hannes Krasser. Enumerating order types for small point sets with applications. In Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., pages 11–18, 2001.

[3] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. M. Ziegler. Oriented Matroid. Cambridge University Press, 1992. Chapters 1 and 6.

[4] Timothy M. Chan. Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions. Discrete Comput. Geom., 16:361–368, 1996.

[5] Micha Sharir and P. K. Agarwal. Davenport-Schinzel Sequences and Their Geometric Applications. Cambridge University Press, New York, 1995.

Notes

Notes