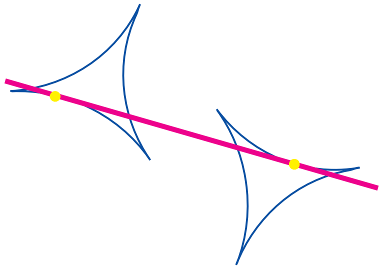
GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE
(Support de Cours)
(Computational Geometry)

Michel Pocchiola (Ens-Paris)
Michel.Pocchiola@ens.fr
http://www.di.ens.fr/ pocchiol/



Introduction

–
– Qu'est ce que la géométrie algorithmique?
– Diagramme de Voronoi
– Recherche multidimensionnelle
– Convexification d'un polygone simple
–

Notes

Notes

Qu'est-ce-que la Géométrie Algorithmique?

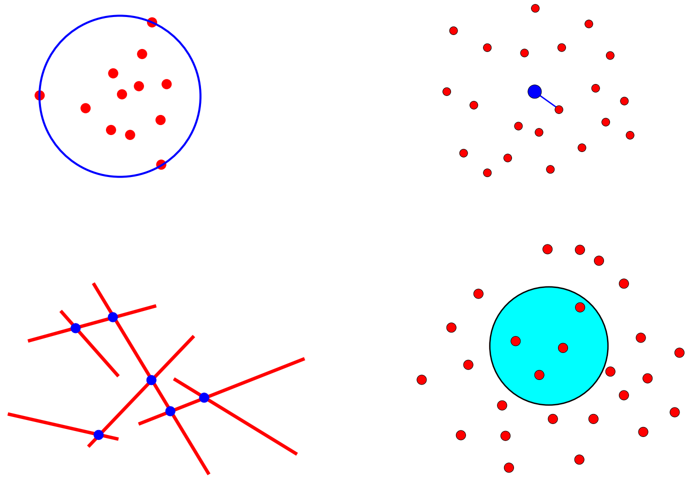
1. L'objet de la GA est la conception, l'analyse et l'optimisation de méthodes de traitement de données géométriques (multidimensionnelles).
2. Date de naissance : Dissertation de Shamos (1978).

   DIAGRAMMES DE VORONOI

3. Domaines d'applications: Computer graphics and Imaging, Shape Reconstruction, Computer Vision, Geographical Information Systems, Mesh generation, Robotics, Manufacturing and Product Design, Robustness, Molecular Biology, Astrophysics, etc.
4. Buts : Créer un corpus de connaissances — Fournir du code.
5. J. E. Goodman and J. O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* CRC Press, 1997.
6. CGAL (Computational Geometry Algorithms Library) , http://www.cgal.org.

DIMACS 2002-2005 Special Focus on Computational Geometry and Applications:

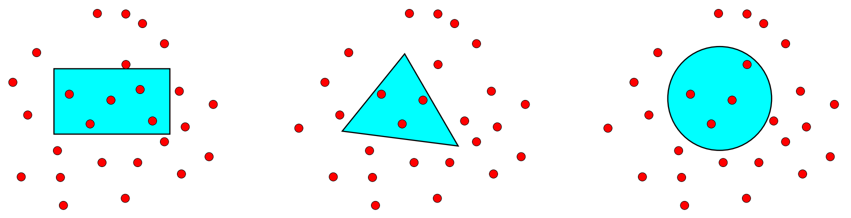
1. Voronoi Diagram - Properties, Algorithms and Applications
2. Geometric Graph Theory
3. Algorithmic Issues in Modeling Motion
4. Implementation of Geometric Algorithms
5. Medical Applications in Computational Geometry
6. Surface Reconstruction
7. Data depth : Robust Multivariate Analysis, Computational Geometry and Applications
8. Geometric Optimization
9. Computer-Aided Design and Manufacturing
10. Geographical Information Systems: Representation Algorithms for Terrain
11. Fundamental Geometric Algorithms



Asymptotic Complexity

Running Time	Maximum Problem Size (n) 1 operation per μs			256 times faster
	1 second	1 minute	1 hour	
$400n$	2 500	150 000	9 000 000	$\times 256$
$20n \log_2 n$	4 096	166 666	7 826 087	$\approx \times 256$
$2n^2$	707	5 477	42 426	$\times 16$
n^4	31	88	244	$\times 4$
2^n	19	25	31	$+8$

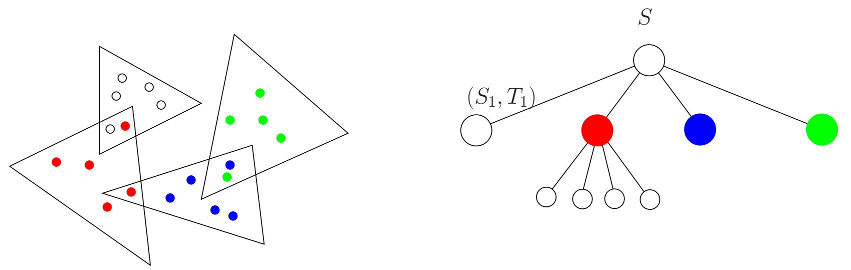
Geometric Range Searching



1. $S \subset \mathbb{R}^d$ (n points) et $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (*domaines*– ranges).
2. Problème :

Compter (reporter) les points de S
situés dans le domaine R.

Partition Simpliciale – Arbre de Partition



1. $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ est une partition de S et T_i est un simplexe contenant S_i
2. module = le nombre maximal de simplexes sécants à une droite
3. taille = r
4. ratio = $\max_i |S_i|$

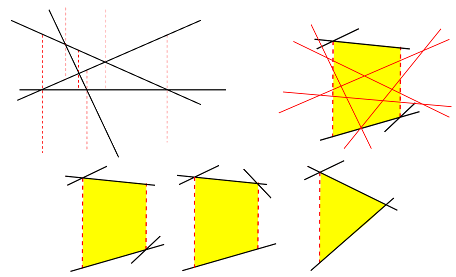
$$T_{\text{ime}}(n) = O(\text{taille}) + O(\text{module})T(\text{ratio})$$

Existence & Construction

- Pour tout ensemble de n points du plan, et tout paramètre $1 \leq r \leq n$, il existe une partition simpliciale de taille r, de ratio $2n/r$ et de module $\sqrt{r}$. De plus une telle partition est constructible en temps $O(n \log r)$.
- Chazelle, Matousek, Welzl, etc
- S. Har-Peled. Constructing planar cuttings in theory and practice. In *SIAM J. Comput.*, 29: 2016–203, 2000.

$$\begin{aligned} T_{\text{ime}}(n) &= O(r) + O(\sqrt{r})T(\frac{2n}{r}) \qquad r = \sqrt{n} \\ &= O\left(\sqrt{n}\, 2^{O(\log\log n)}\right) \\ &= O\left(\sqrt{n}\,\text{polylog}\, n\right) \end{aligned}$$

Clarkson-Shor technique

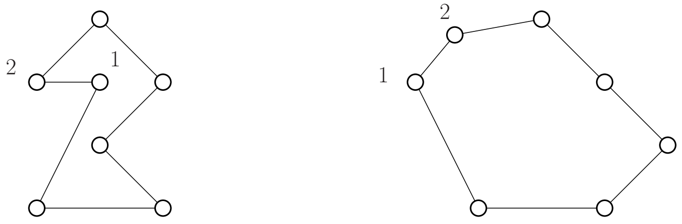


❑ — Soit X un ensemble fini de n droites en position générique et soit R un échantillon aléatoire de X de taille r tiré selon une loi uniforme.

❑ — $A^{\|}(R)$

❑ — Le nombre de droites de X sécantes à un trapèze de $A^{\|}(R)$ est uniformément borné par $n/r \log r$ avec probabilité supérieure à $1/2$.

Convexification d'un Polygone Simple



L'ensemble des polygones SIMPLES $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 \in \mathbb{R}^{14}$ tels que

$$\begin{aligned} p_1p_2 = p_6p_7/2 &= 1 \\ p_2p_3 = p_3p_4 = p_4p_5 = p_5p_6 &= \sqrt{2} \\ p_7p_1 &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

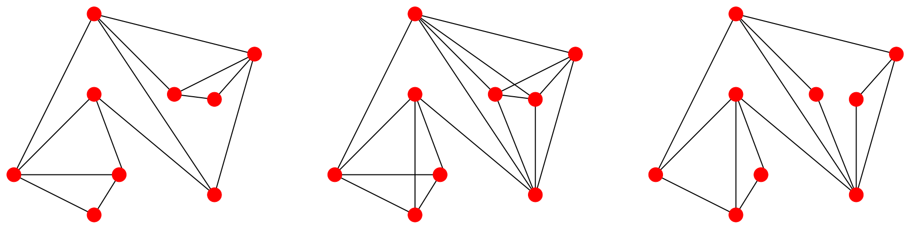
est-il connexe?

OUI, via le cône des dilatations infinitésimales, i.e., l'ensemble des $(v_1v_2 \cdots v_7) \in \mathbb{R}^{14}$ tels que

$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq 0 \qquad (\forall ij)$$

avec égalité pour $j = i + 1$. [CDR00],[Streinu00]

Le Cône des Pseudo-Triangulations



1. The cone of expansive motions
$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq 0 \qquad (\forall\, ij \in E)$$
2. The extreme rays of the expansion cone correspond to collapsed pte-mechanisms.
3. Every simple polygon in the plane can be unfolded into convex position.
4. The flip graph is polytopal
$$\langle p_i - p_j, v_i - v_j \rangle \geq f_{ij} \qquad (\forall\, ij \in E)$$
where, e.g., $f_{ij} = [\det(p_i, p_j)]^2$

Bibliographie

References

[1] Günter Rote, Francisco Santos, and Ileana Streinu. Expansive motions and the polytope of pointed pseudo-triangulations. In B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and M. Sharir, editors, *Discrete and Computational Geometry – The Goodman-Pollack Festschrift*, volume 25 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 699–736. Springer-Verlag, June 2003.

[2] R. Connelly, E. D. Demaine, and G. Rote. Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles. *Discrete Comput. Geom.*, 30:205–239, 2003.

Notes

```
setenv LEDAROOT /usr/local/leda
/usr/local/leda/demo/xlman/xlman
```

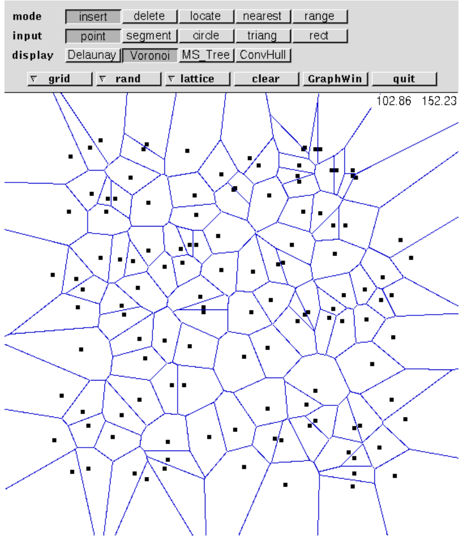
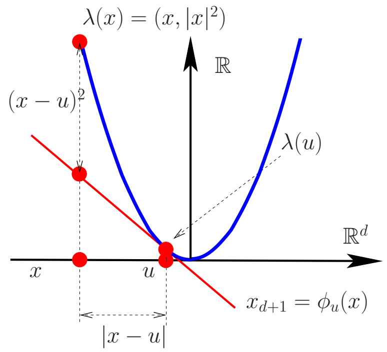


Diagramme de Voronoi

1. Le Monde de Mrs Descartes, ou le Traité de la Lumière (1644)
2. Dirichlet (1850) et Voronoi (1906)
   – Etude des formes quadratiques
3. Une structure universelle
   – Astronomie, Archéologie, Météorologie, Urbanisme, Physique (comportement de l'argon) , Physiologie (capillarité des tissus musculaires), etc
4. A. Okabe, B. Boots et K. Sugihara. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, 1992.
5. D. Stoyan and W.S. Kendall and J. Mecke. *Stochastic Geometry and Its Applications*. Probability and Mathematical Statistics, Wiley-Interscience, 1995.

Diagr. de Voronoi & Polyèdres



– Le diagramme de Voronoi de S est la projection du treillis des faces propres du polyèdre intersection des demi-espaces supérieurs bornés par les hyperplans tangents au paraboloide d'équation $x_{d+1} = x_1^2 + \cdots + x_d^2$ aux points $\lambda(S)$.

Polytope/Polyèdre

Le treillis des faces du polytope (polyèdre) enveloppe convexe d'une collection de n points (intersection d'une famille de n demi-espaces) de $\mathbb{R}^d$ avec $d = O(1)$ est constructible en temps $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.