

De la géométrie algorithmique

au calcul géométrique

l'exemple

de la triangulation de Delaunay

Généralisations



# Diagramme de Voronoï

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'espace (pour  $q$ )

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'espace (pour  $q$ )

$\mathbb{R}^2$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'espace (pour  $q$ )

$\mathbb{R}^2$      $\mathbb{R}^3$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

la distance

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

la distance

euclidienne  $L_2$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

la distance

$$L_1, L_\infty, L_p$$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

la distance

hyperbolique

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

la distance

poids additifs, multiplicatifs...

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'univers des objets  $\supset \mathcal{S}$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'univers des objets  $\supset \mathcal{S}$

points de  $\mathbb{R}^2$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

l'univers des objets  $\supset \mathcal{S}$

segments de  $\mathbb{R}^2$

# Diagramme de Voronoï

Quel est le plus proche voisin de  $q$  dans  $\mathcal{S}$

Changer

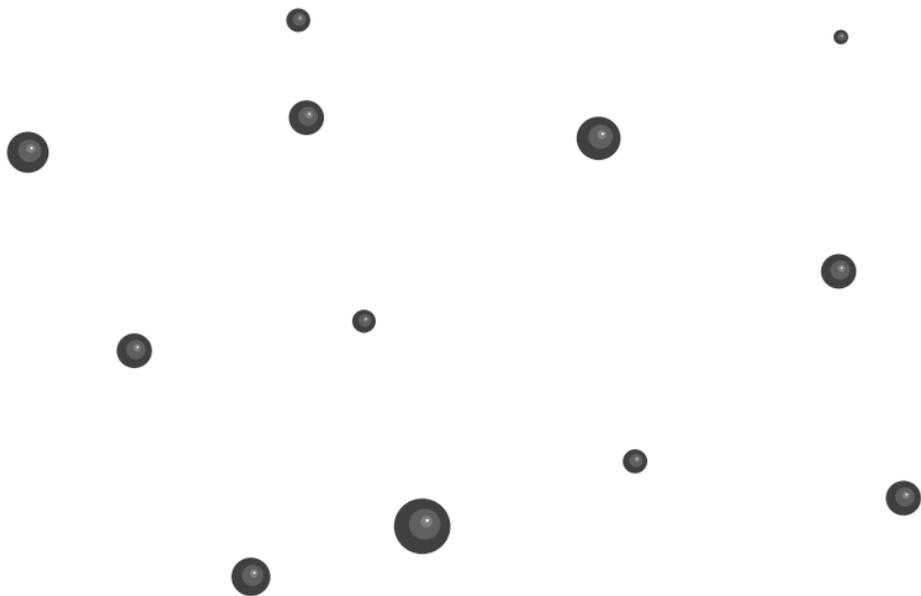
l'univers des objets  $\supset \mathcal{S}$

cercles de  $\mathbb{R}^2$



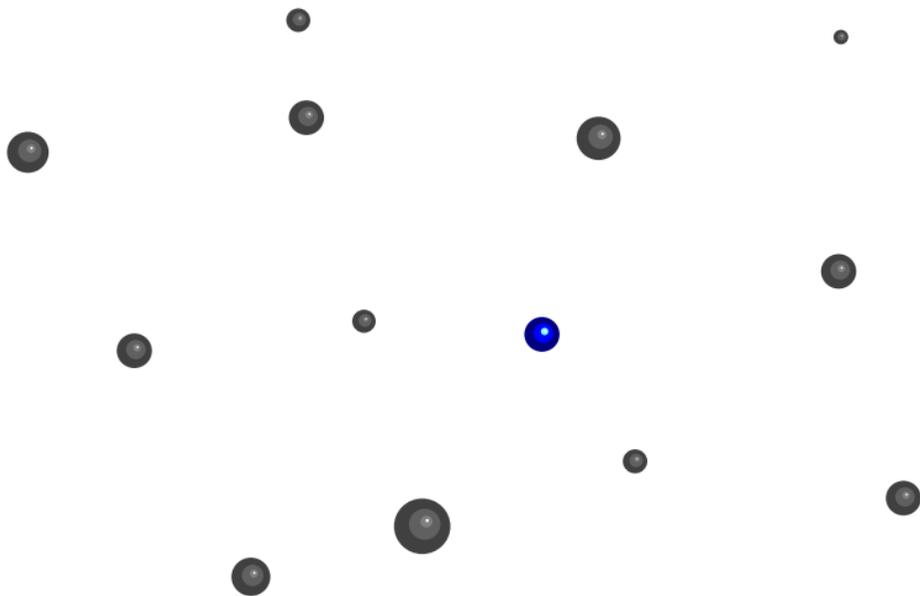
Delaunay de points en 3D

# Points en 3D



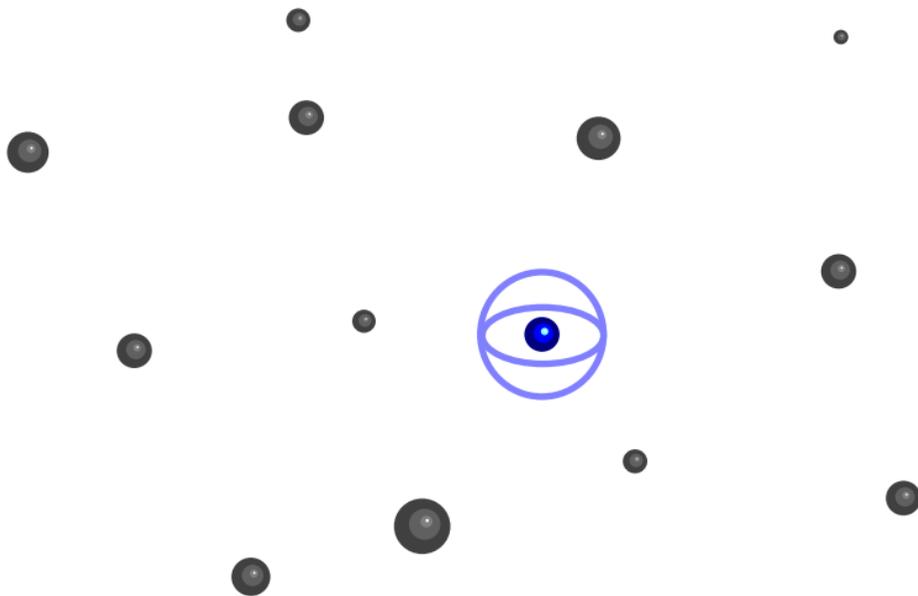
# Points en 3D

## Requête



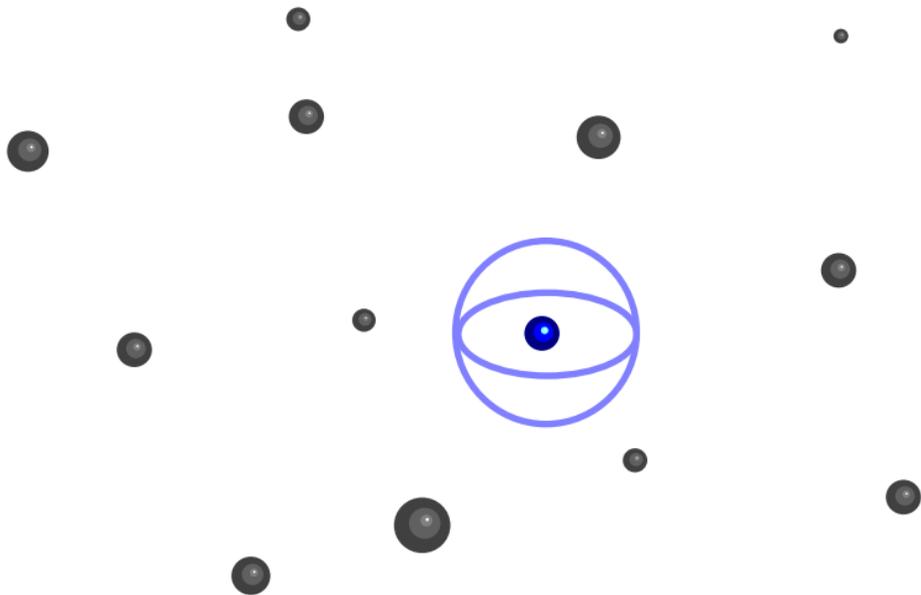
# Points en 3D

## Requête



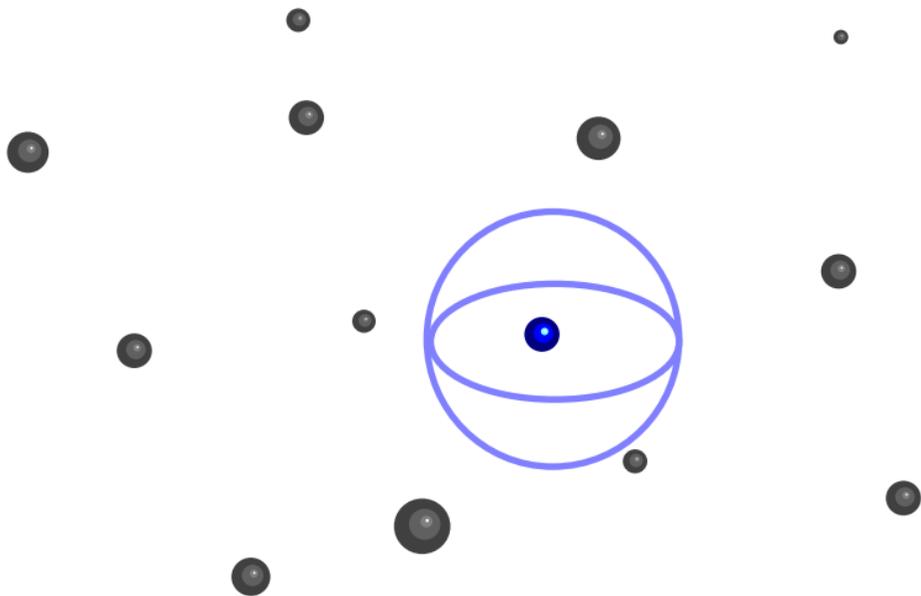
Points en 3D

Requête



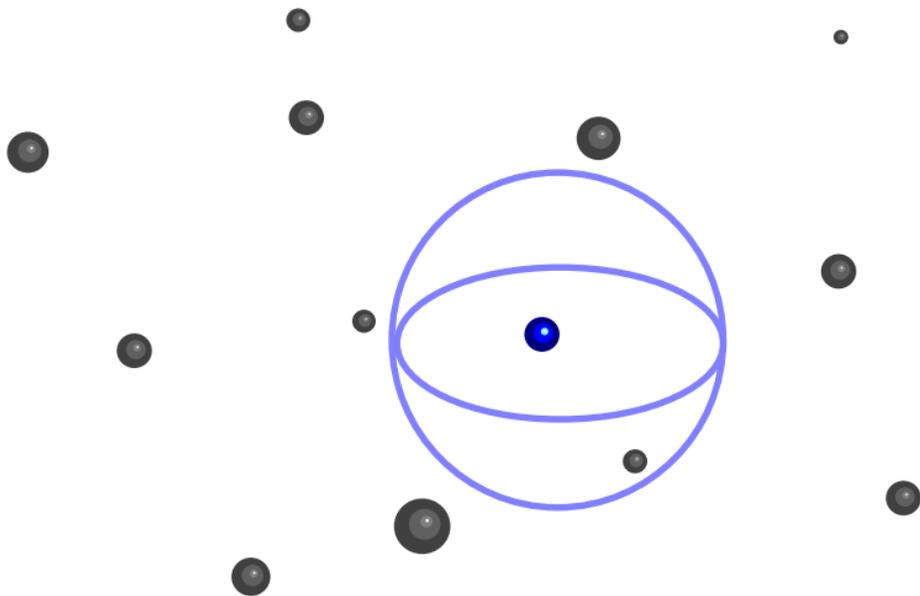
Points en 3D

Requête



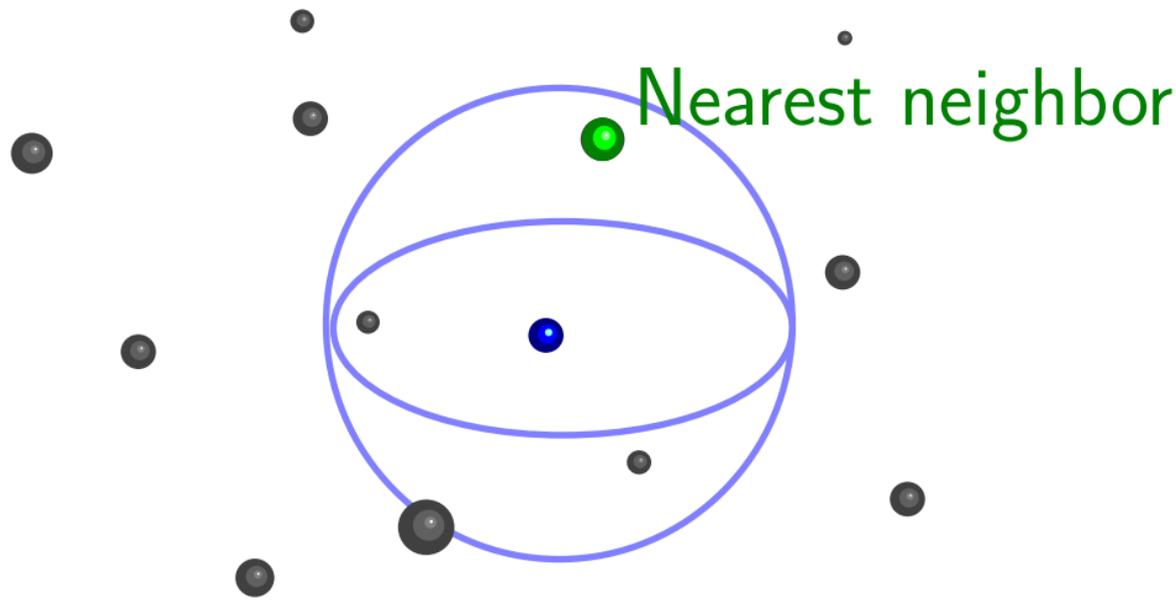
# Points en 3D

## Requête



Points en 3D

Requête



Points en 3D

Requête

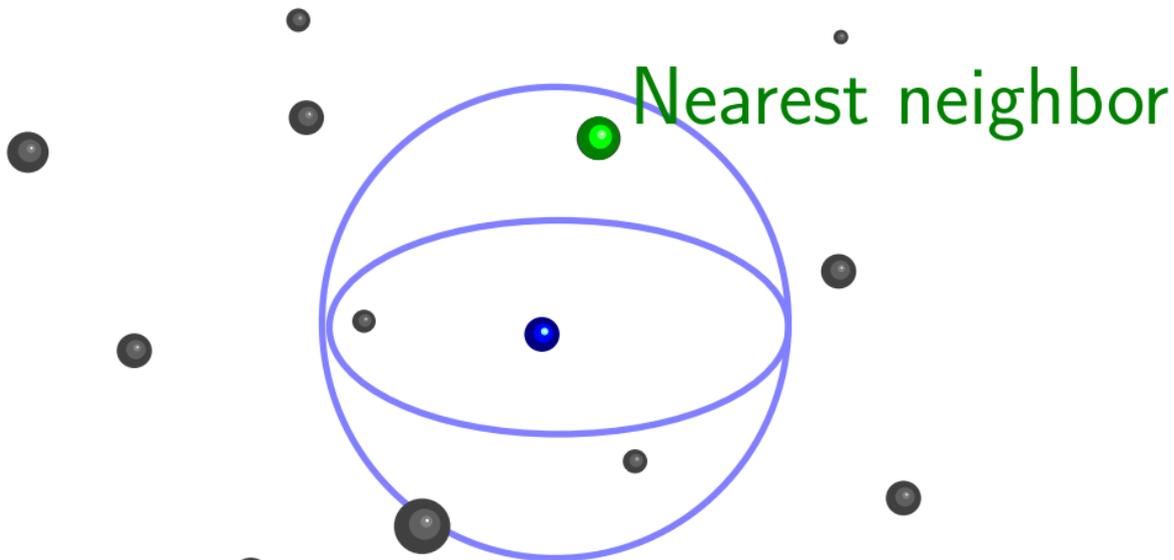


diagramme de Voronoï

Points en 3D

sommet de Voronoï

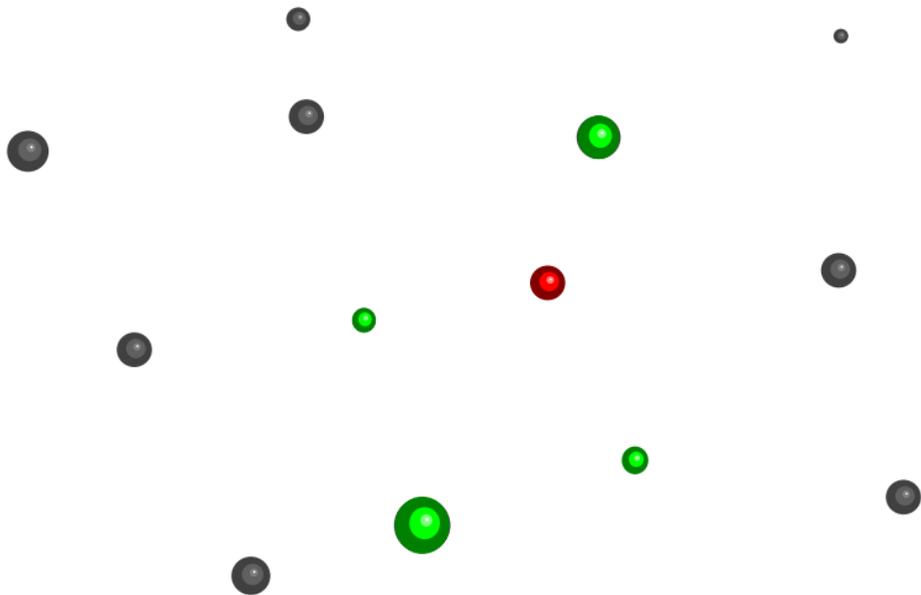


diagramme de Voronoï

Points en 3D

sommet de Voronoï  
sphère vide

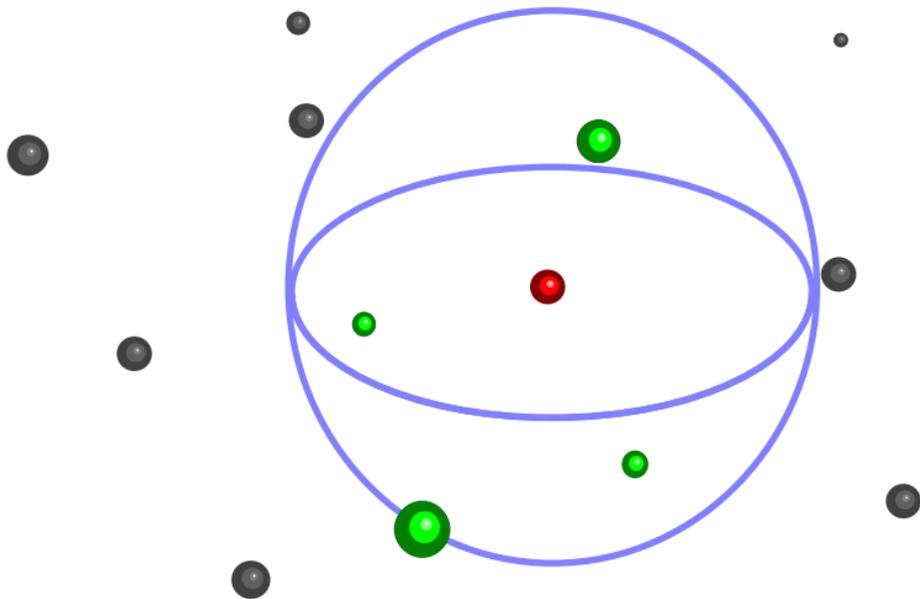


diagramme de Voronoï

# Points en 3D

sommet de Voronoï  
sphère vide

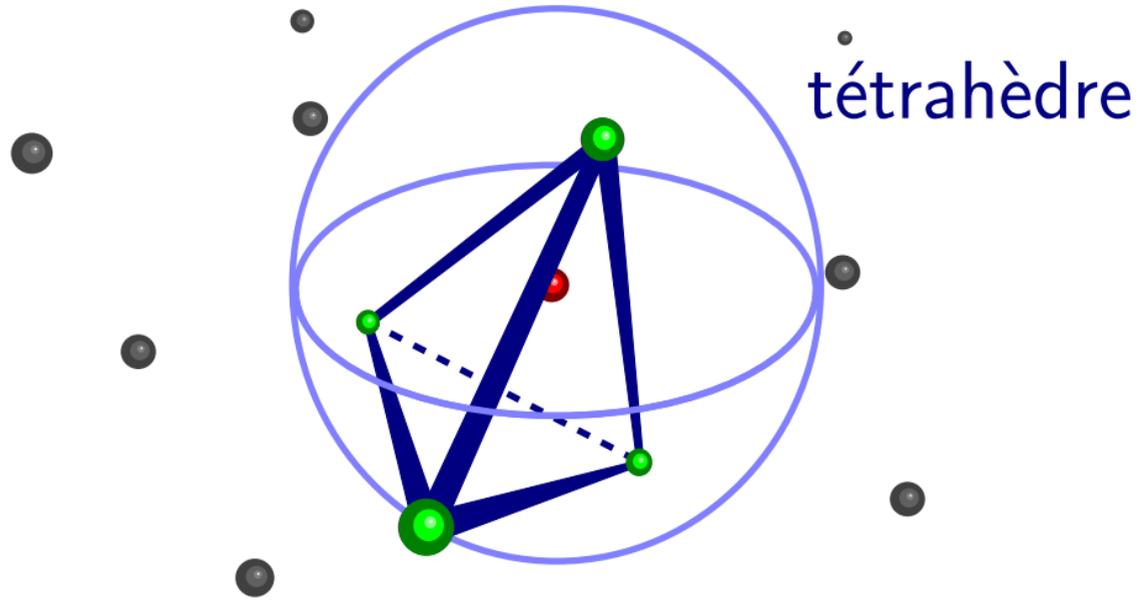


diagramme de Voronoï

# Delaunay 3D

# Delaunay 3D

(presque) comme en 2D

# Delaunay 3D

(presque) comme en 2D

caractérisation par sphère vide

algorithme incrémental

algorithme randomisé

dualité avec env. convexe 4D

# Delaunay 3D

(presque) comme en 2D

différent du 2D

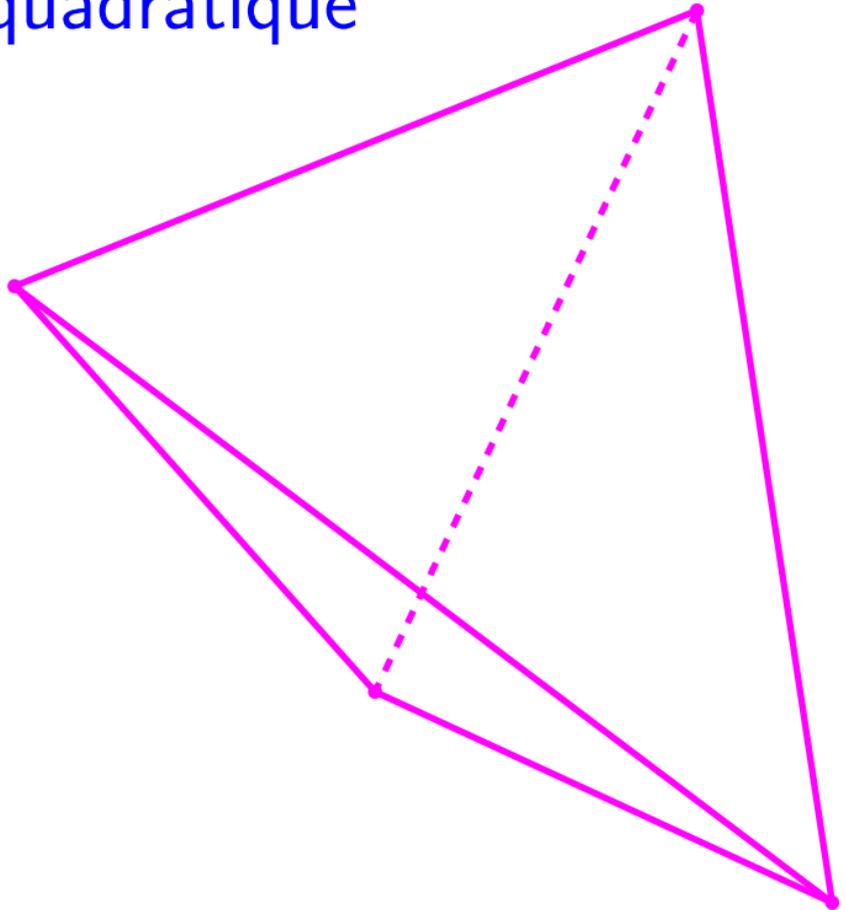
taille variable (linéaire à quadratique)

algorithme “output sensitive”

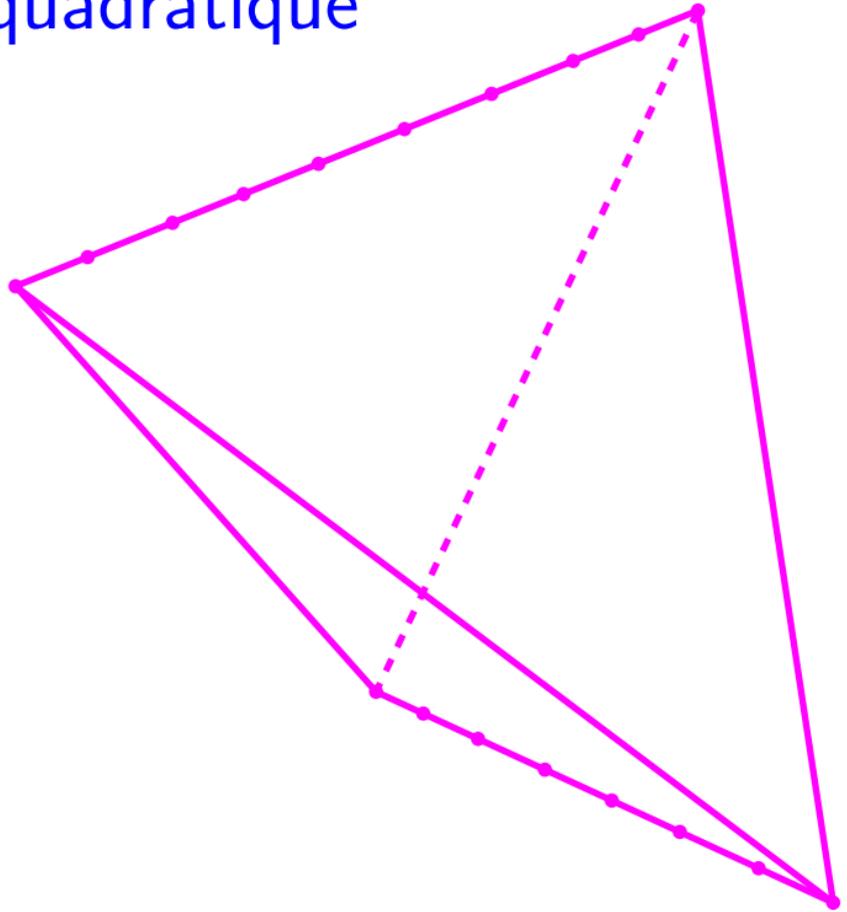
bascule de diagonale

(plus compliqué)

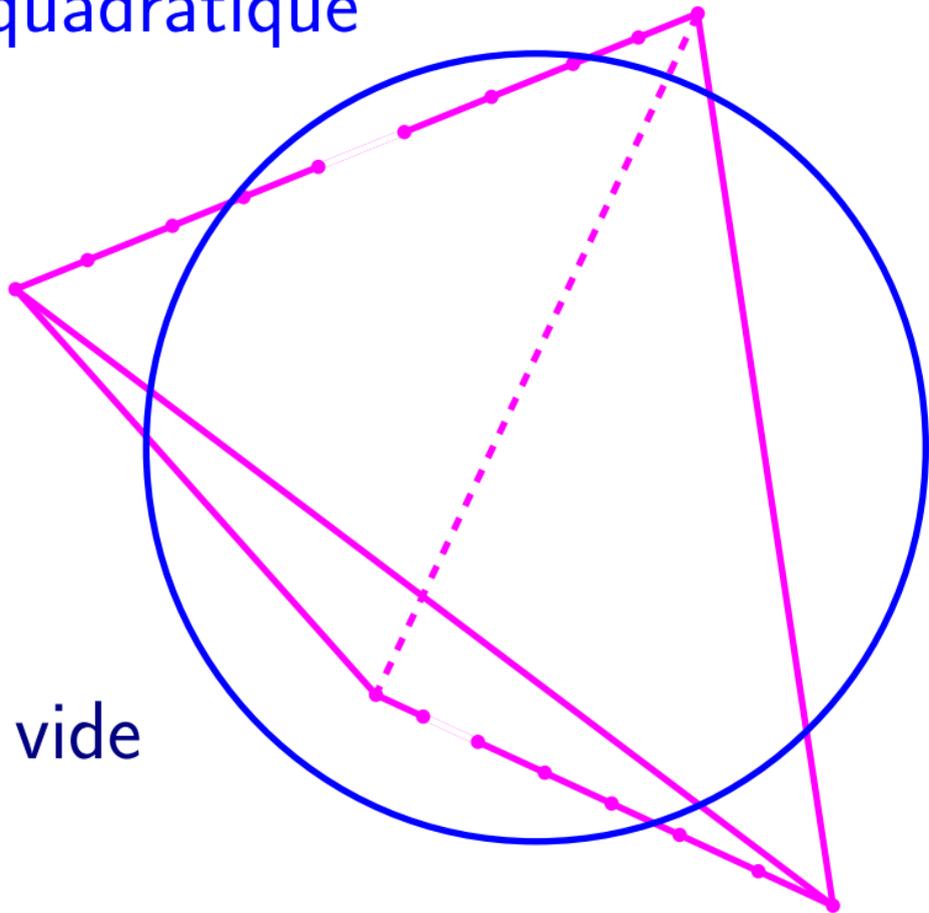
# Un exemple quadratique



# Un exemple quadratique



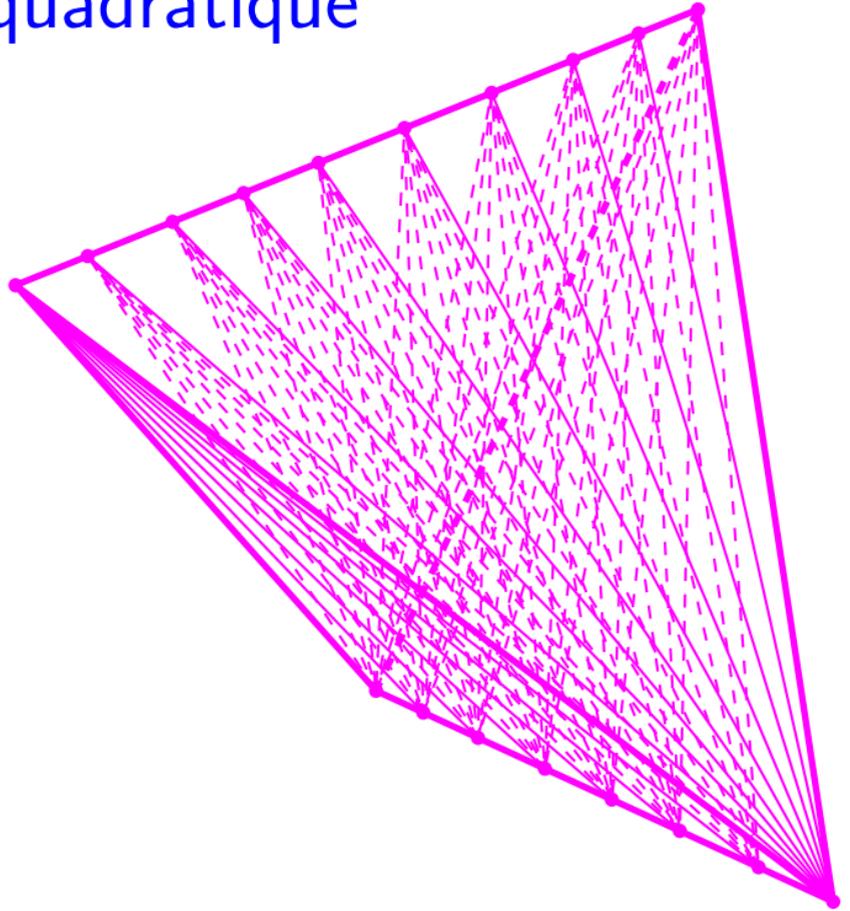
Un exemple quadratique



la sphère est vide

# Un exemple quadratique

$$\Omega(n^2)$$



taille de Delaunay en 3D

# taille de Delaunay en 3D

$\Theta(n^2)$       cas le pire

# taille de Delaunay en 3D

$\Theta(n^2)$  cas le pire

$\Theta(n)$  points uniformément distribués

$$\text{degré moyen} = \frac{96}{35}\pi^2 \simeq 27$$

# taille de Delaunay en 3D

$\Theta(n^2)$  cas le pire

$\Theta(n)$  points uniformément distribués

$$\text{degré moyen} = \frac{96}{35}\pi^2 \simeq 27$$

$O(n \log n)$  surface bien échantillonnée

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$O(f \log n + n^{4/3})$

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$O(f \log n + n^{4/3})$

Incrémental  $\Omega(n^3)$

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$O(f \log n + n^{4/3})$

Incrémental  $\Omega(n^3)$

randomisé  $O(n^2)$

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$$O(f \log n + n^{4/3})$$

Incrémental  $\Omega(n^3)$

randomisé  $O(n^2)$

$$O(n \log n)$$

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$$O(f \log n + n^{4/3})$$

Incrémental  $\Omega(n^3)$

randomisé  $O(n^2)$

$$O(n \log n)$$

si résultat moyen de taille linéaire

# Algorithmes pour Delaunay en 3D

Dualité 4D  $O(f \log n + n^2)$

$O(f \log n + n^{4/3})$

Incrémental  $\Omega(n^3)$

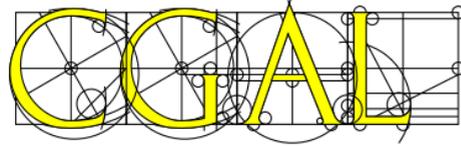
randomisé  $O(n^2)$

$O(n \log n)$

Points aléatoires  $O(n)$

# Hiérarchie de Delaunay

Disponible dans

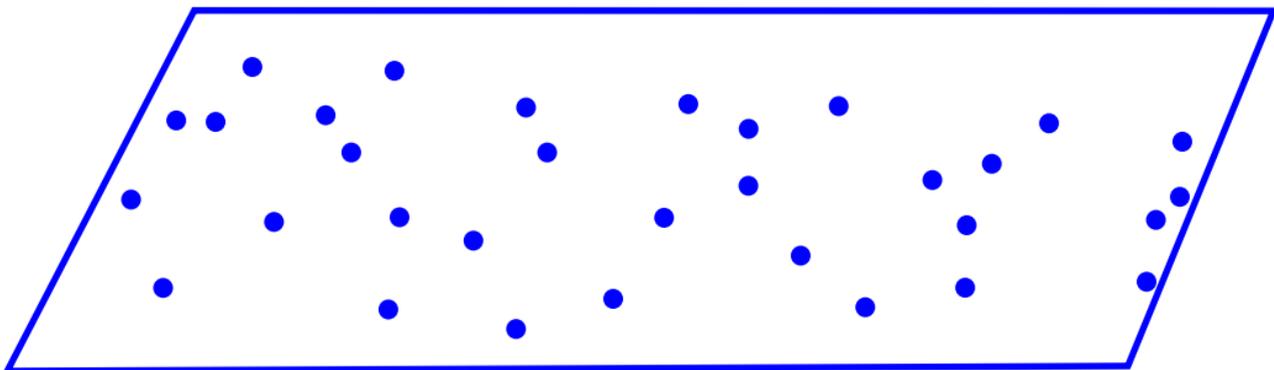
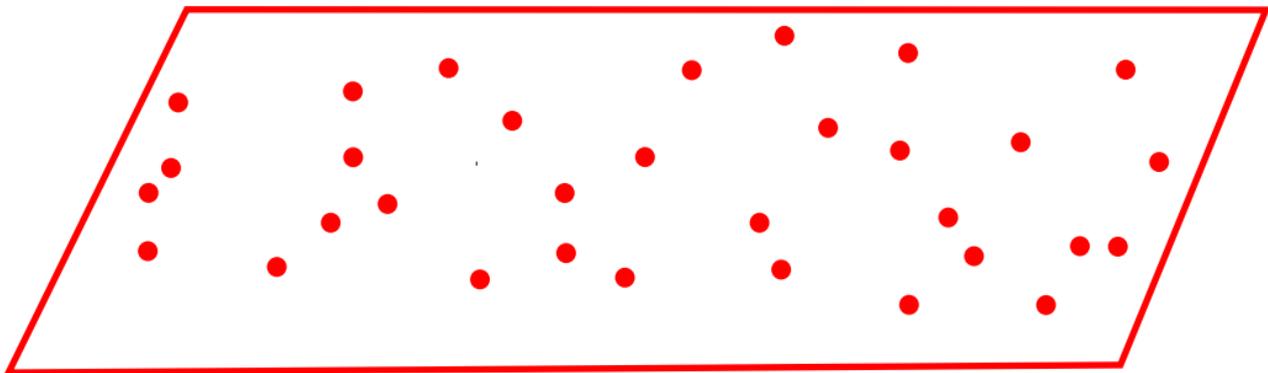


Marche par visibilité

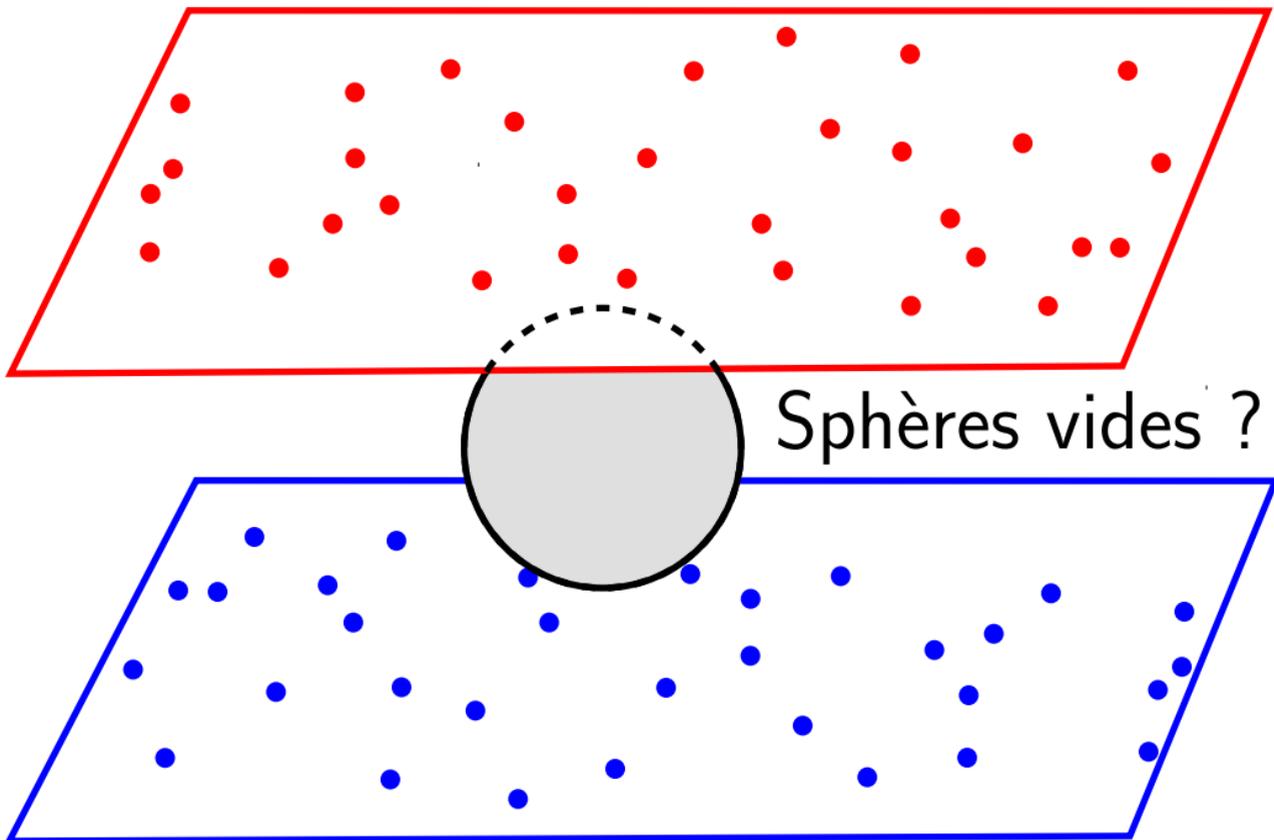
Échantillons aléatoires

Insertion = retriangler la cavité

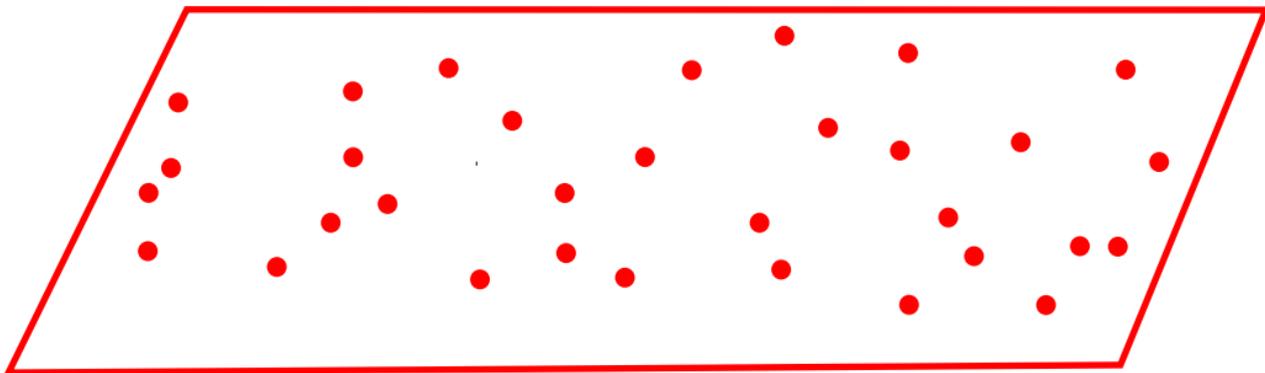
points dans deux plans parallèles



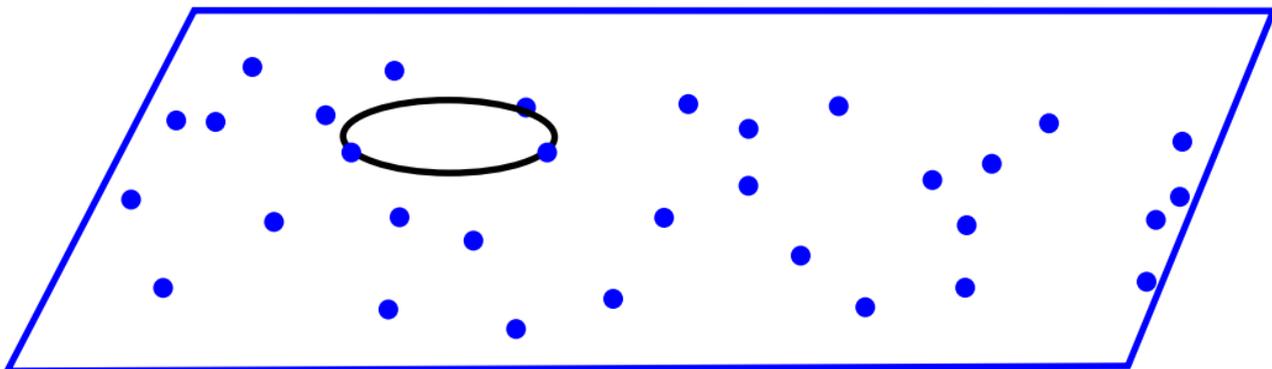
points dans deux plans parallèles



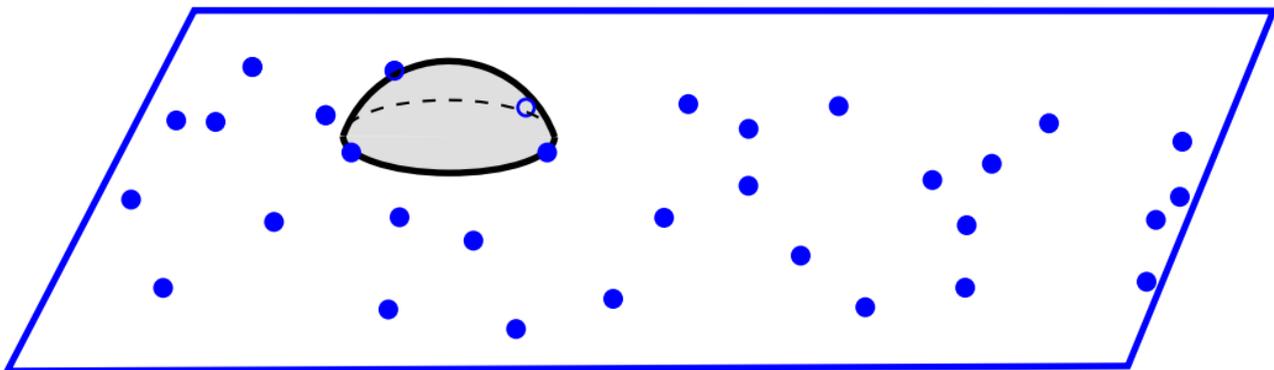
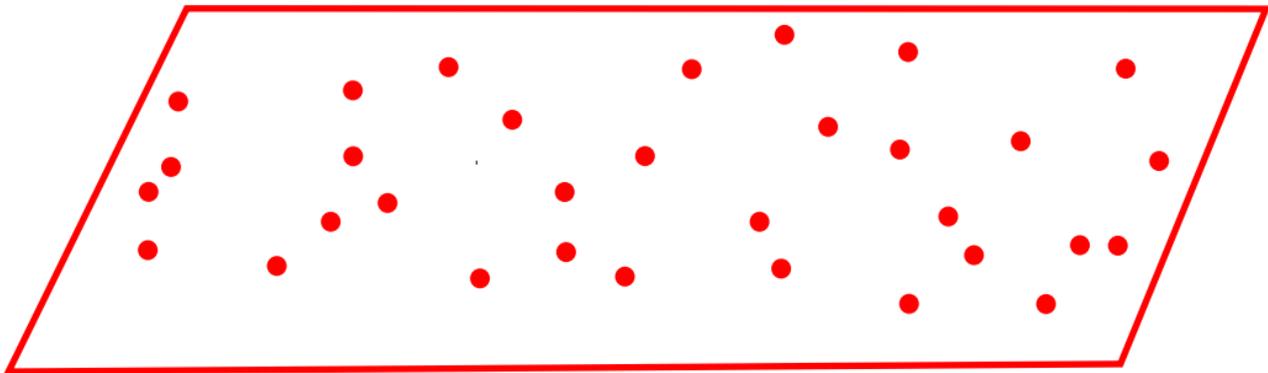
points dans deux plans parallèles



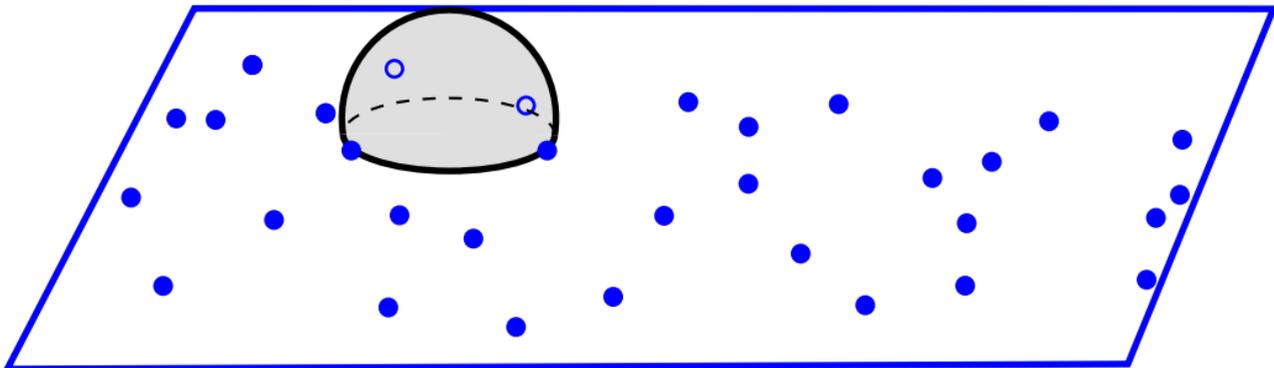
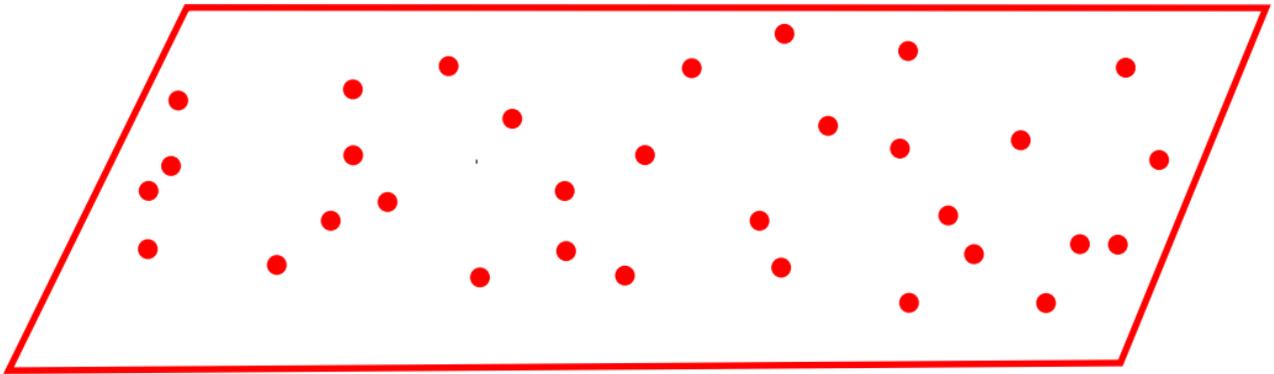
Cercle vide



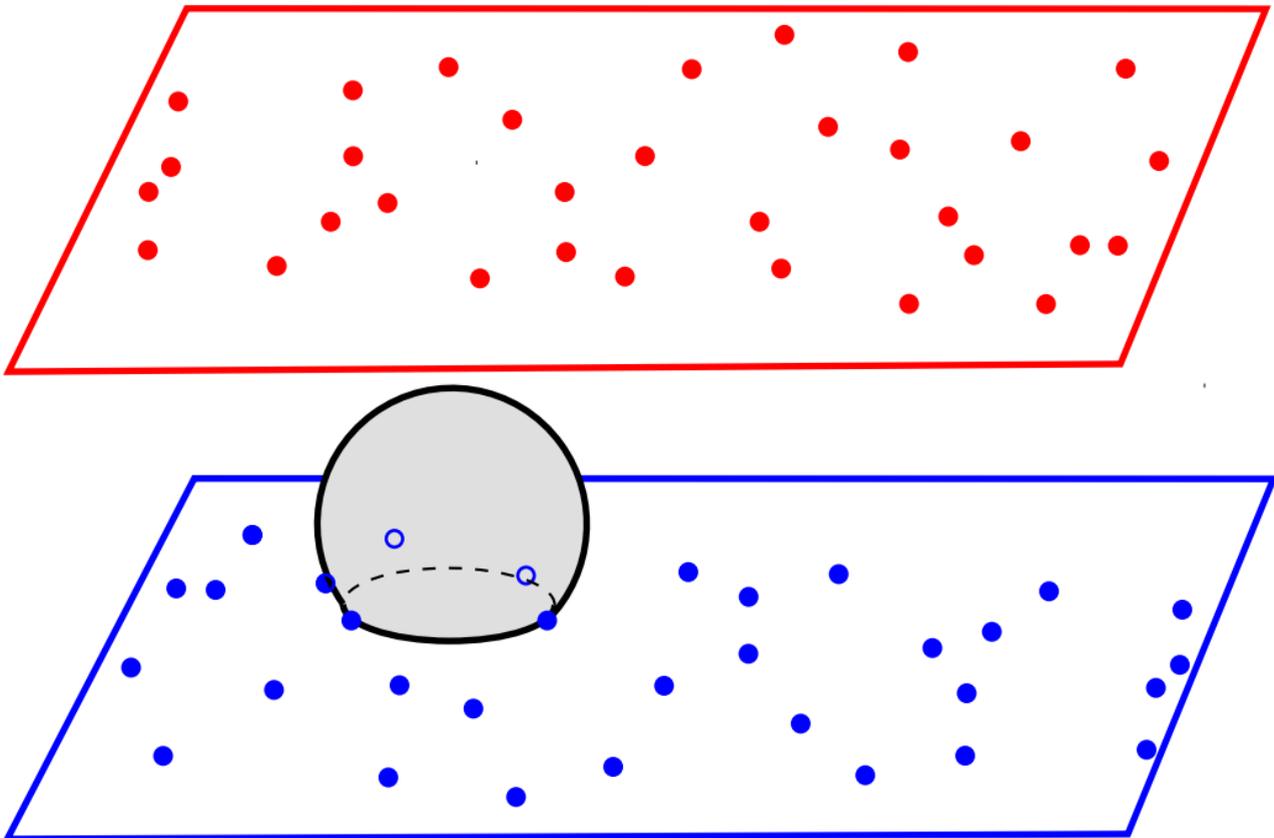
points dans deux plans parallèles



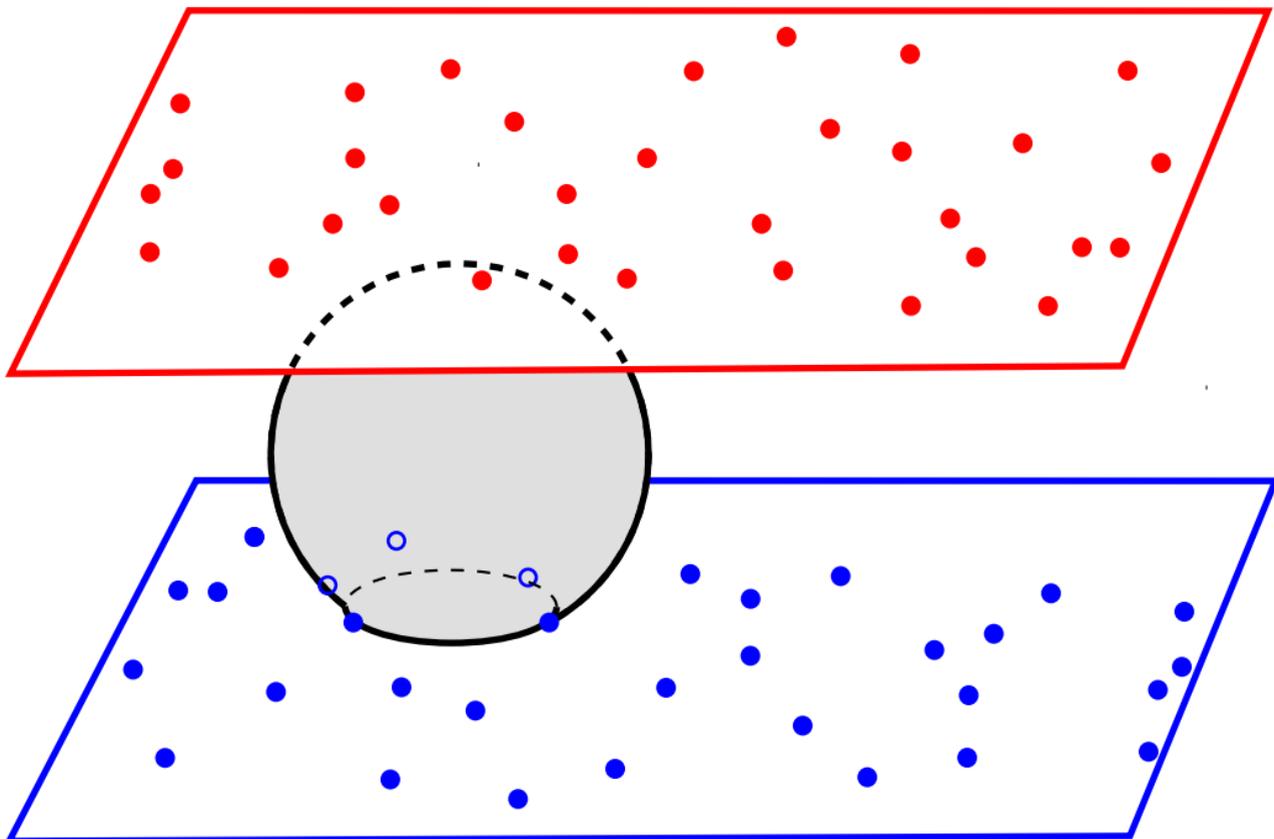
# points dans deux plans parallèles



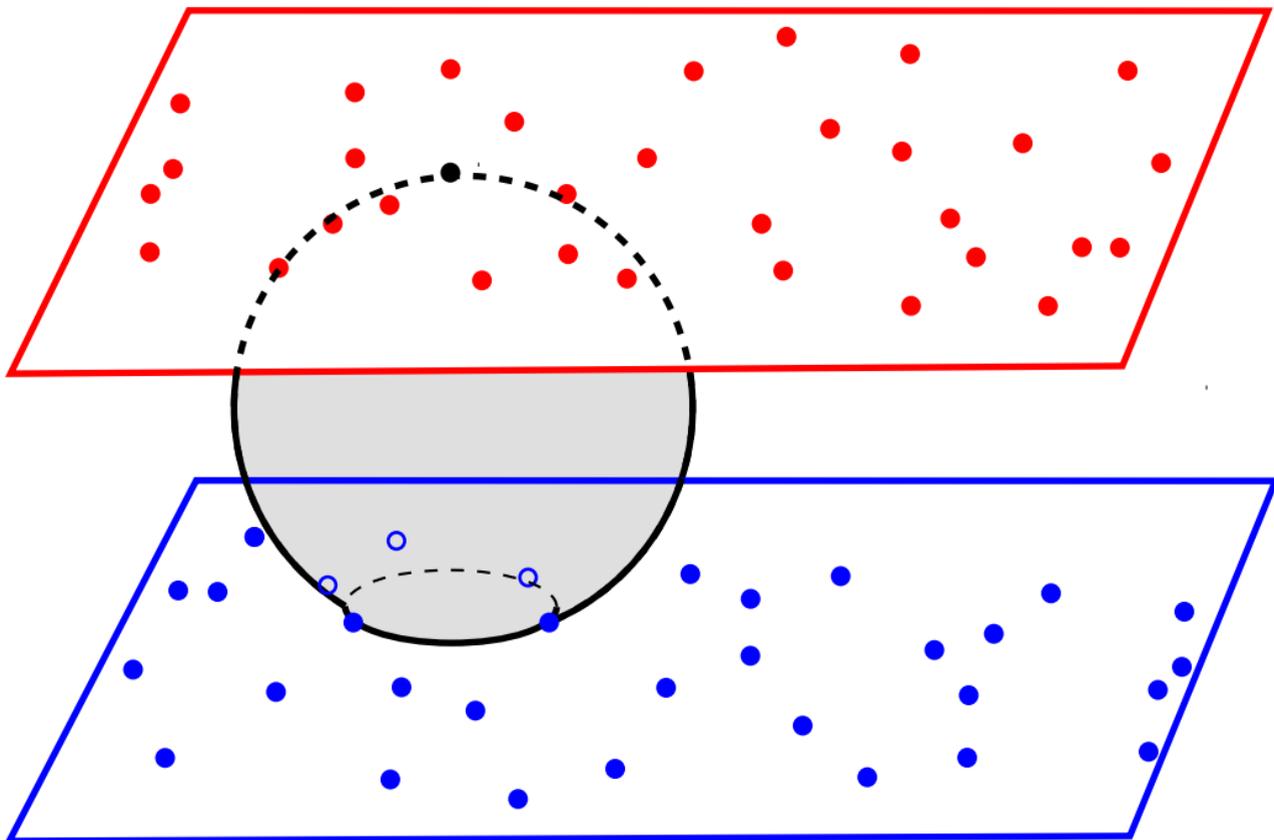
points dans deux plans parallèles



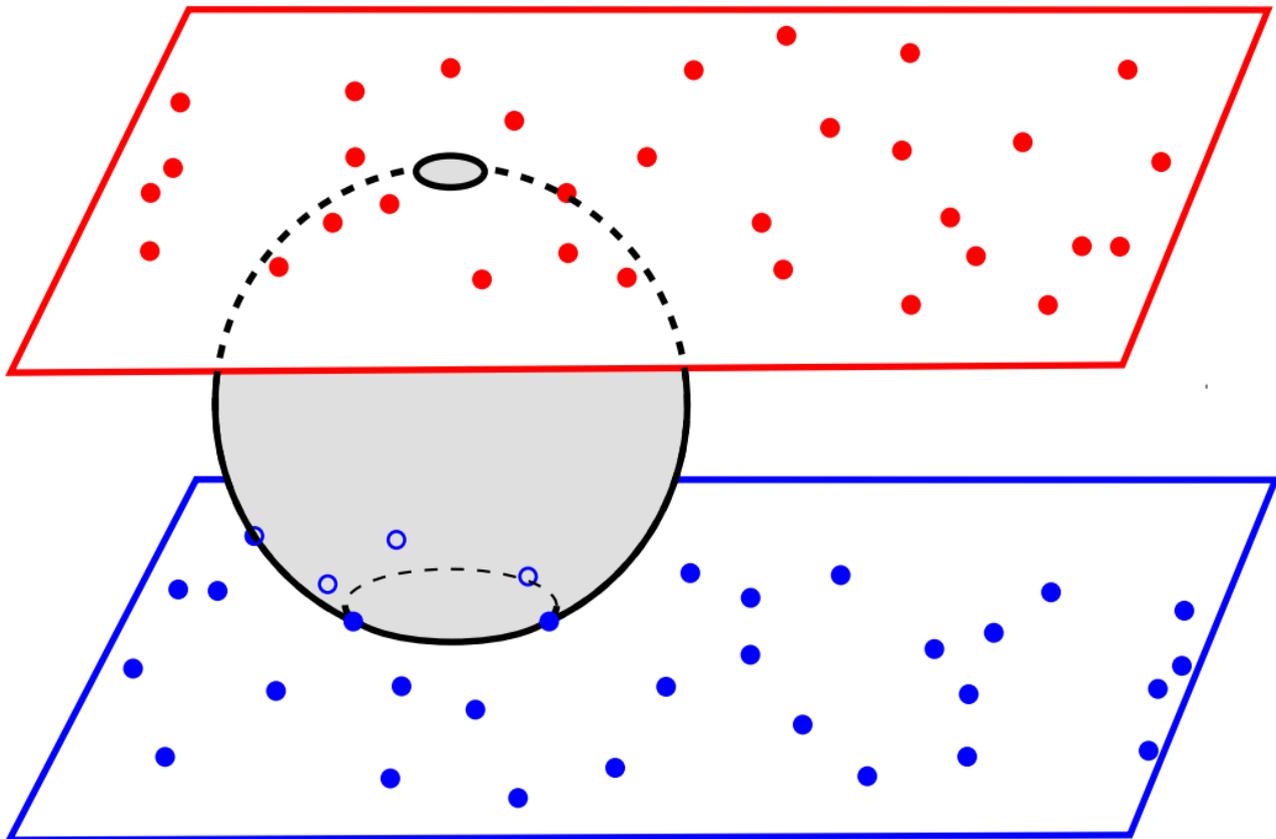
points dans deux plans parallèles



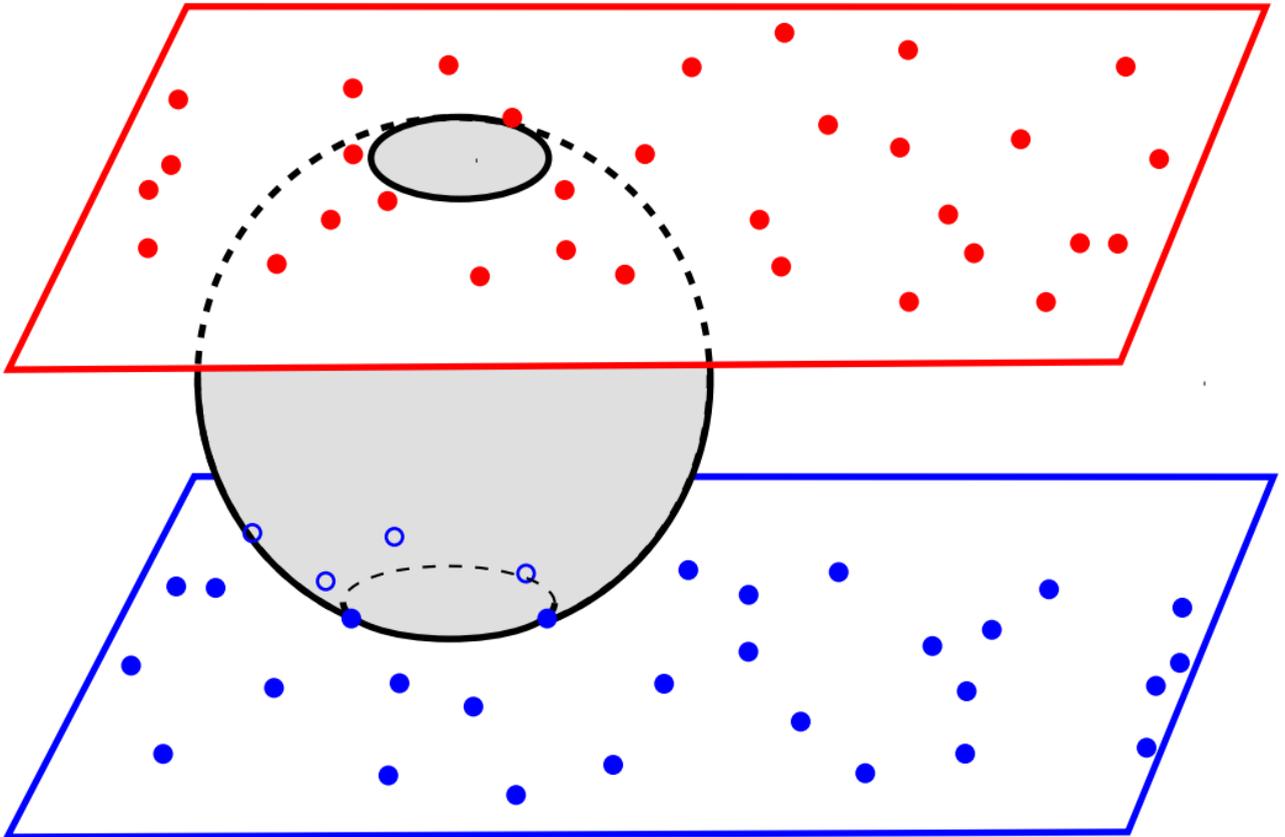
points dans deux plans parallèles



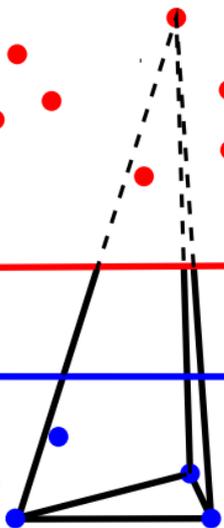
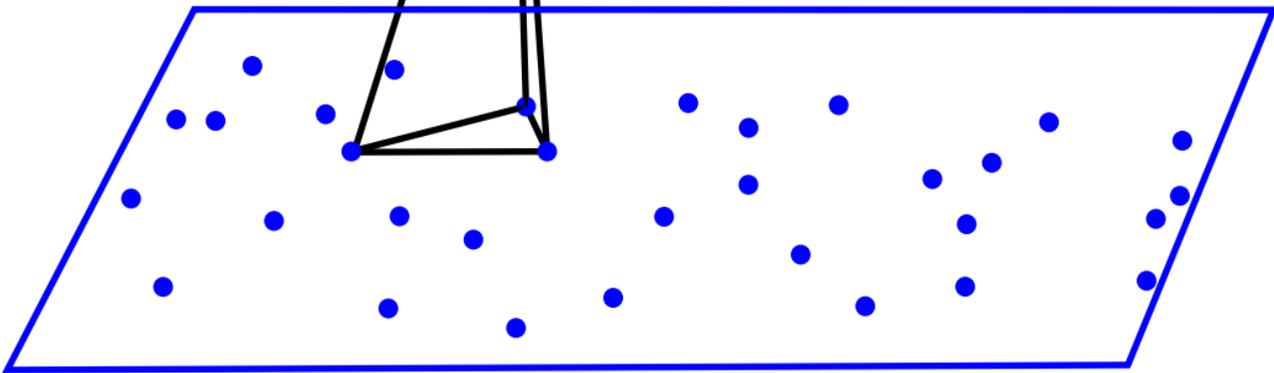
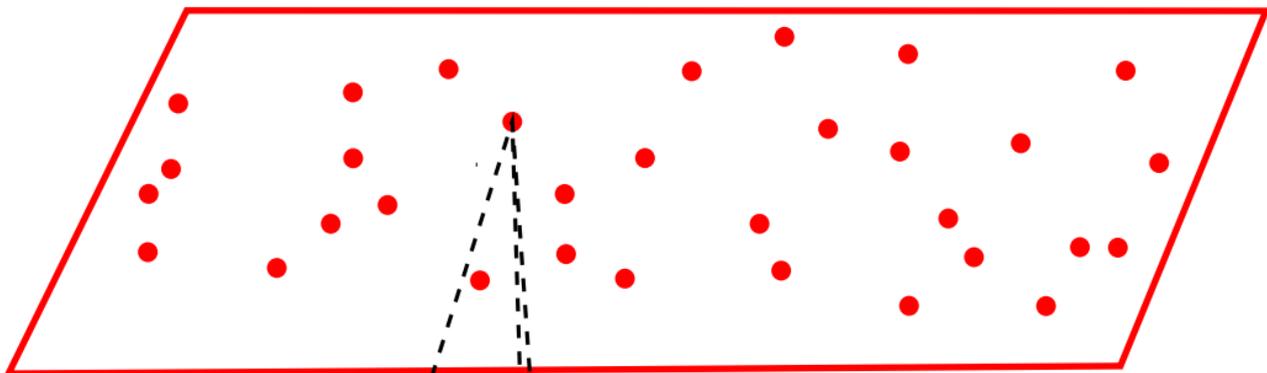
points dans deux plans parallèles



points dans deux plans parallèles

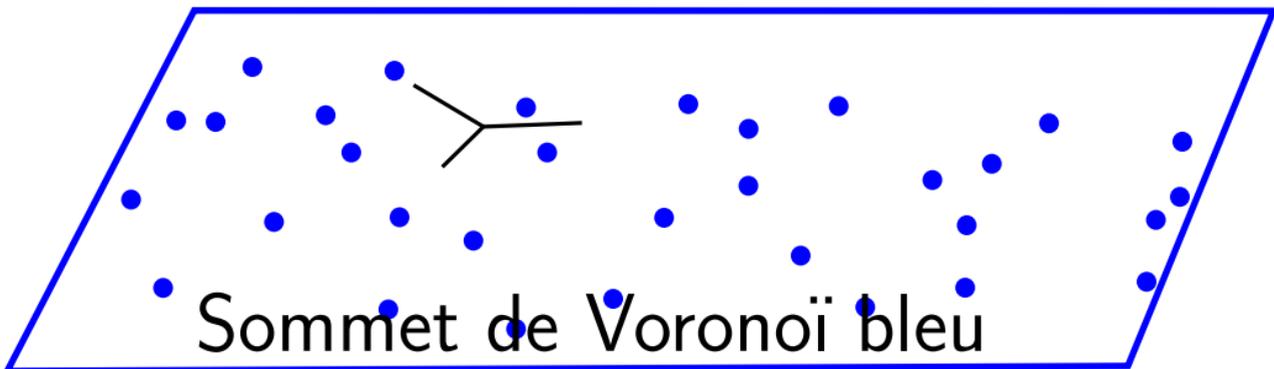
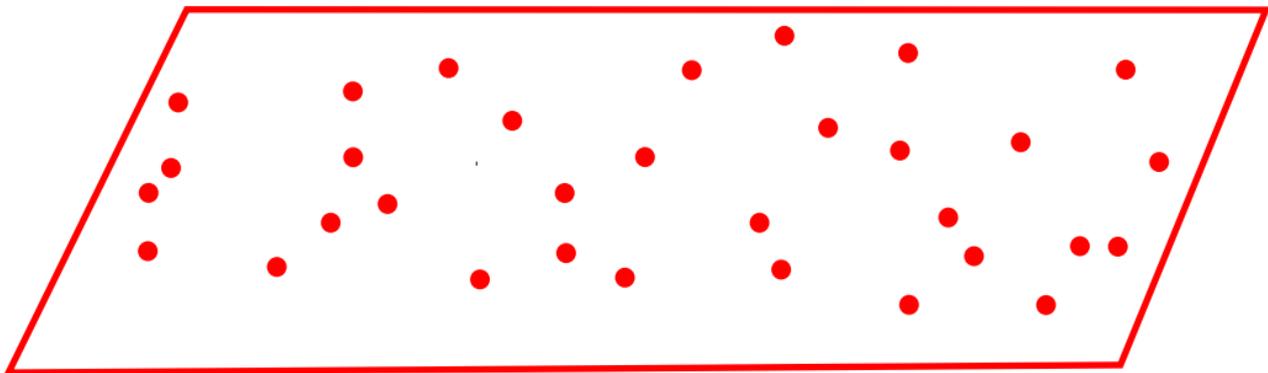


points dans deux plans parallèles

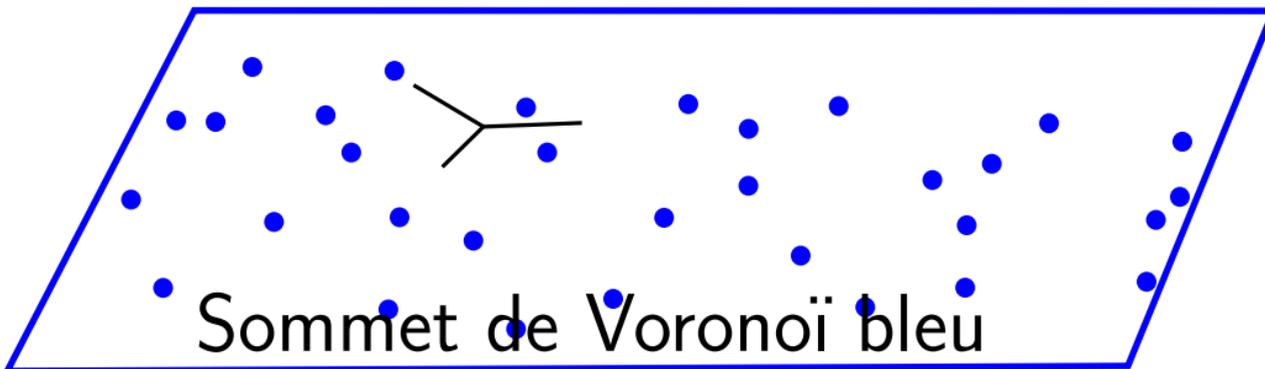
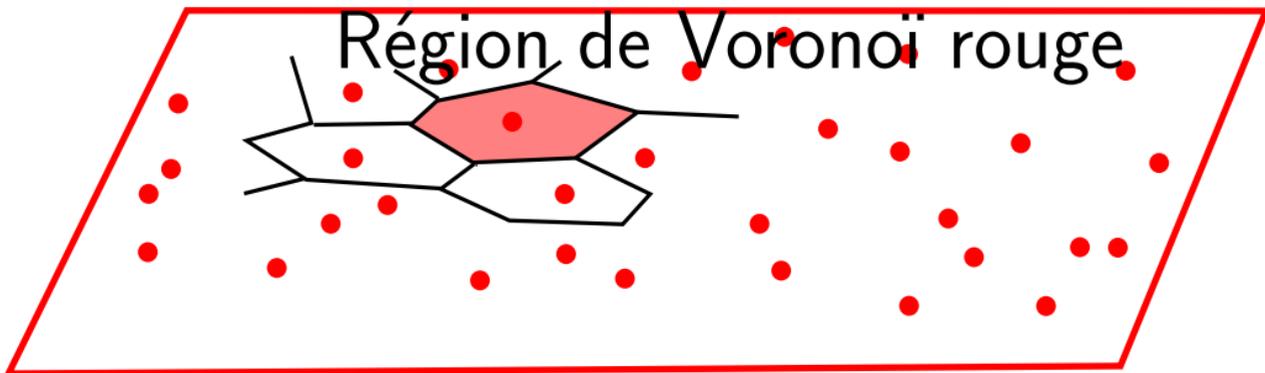


Tétraèdre de Delaunay

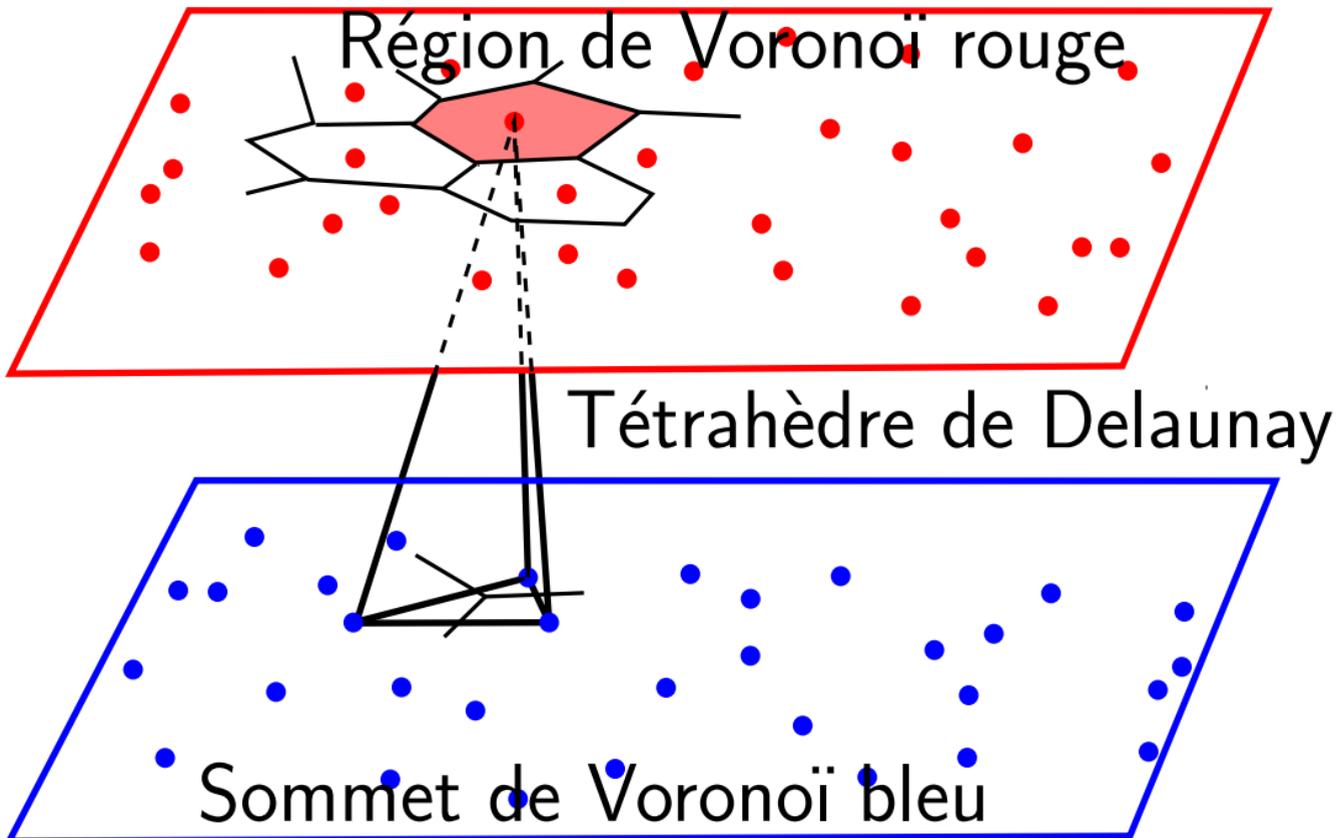
# points dans deux plans parallèles



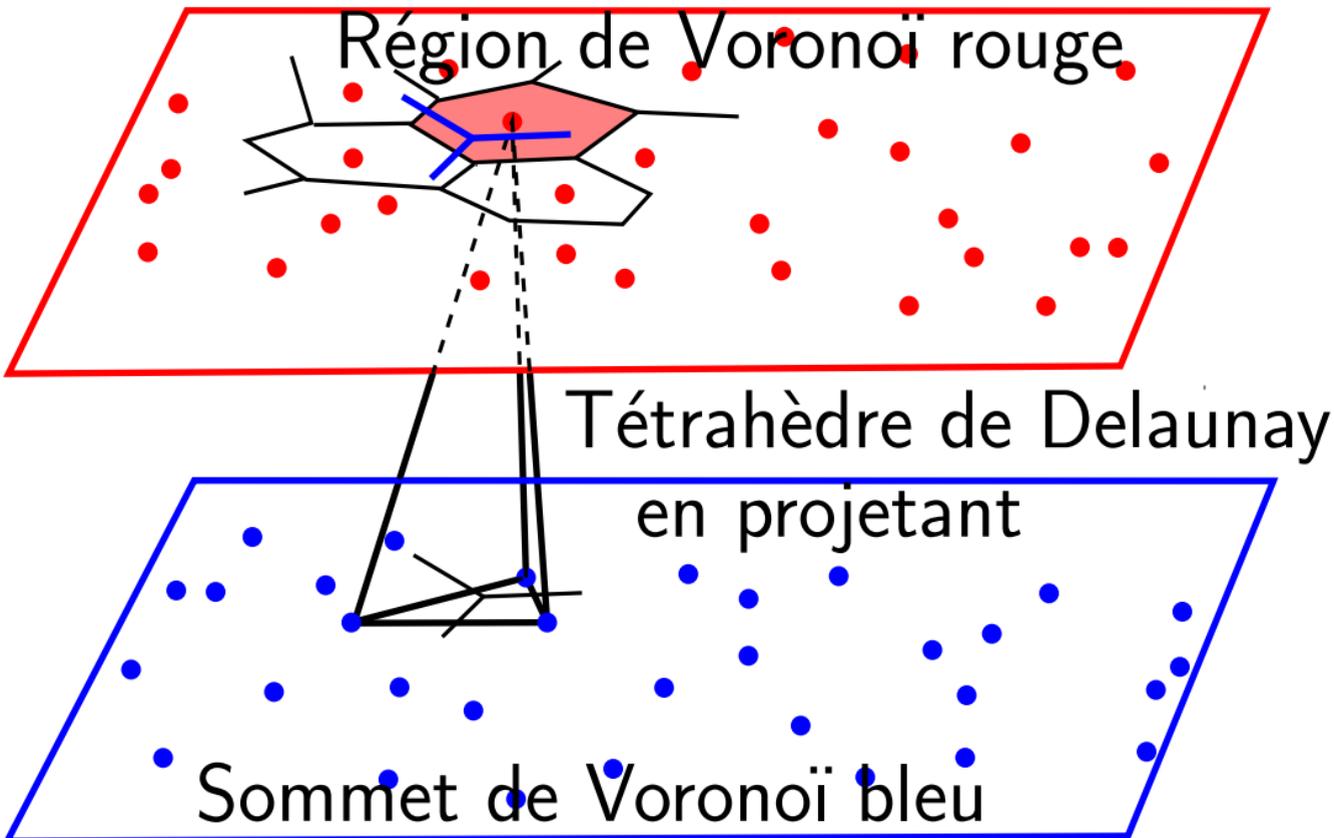
# points dans deux plans parallèles



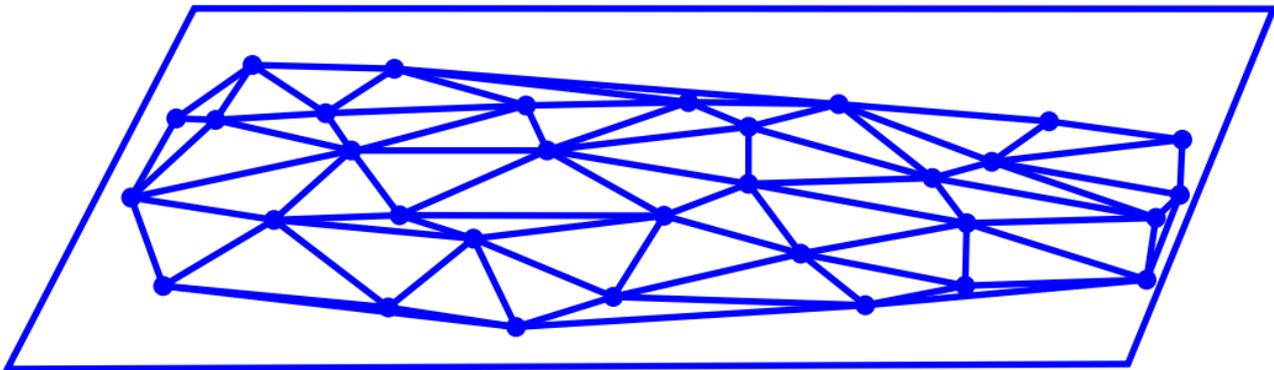
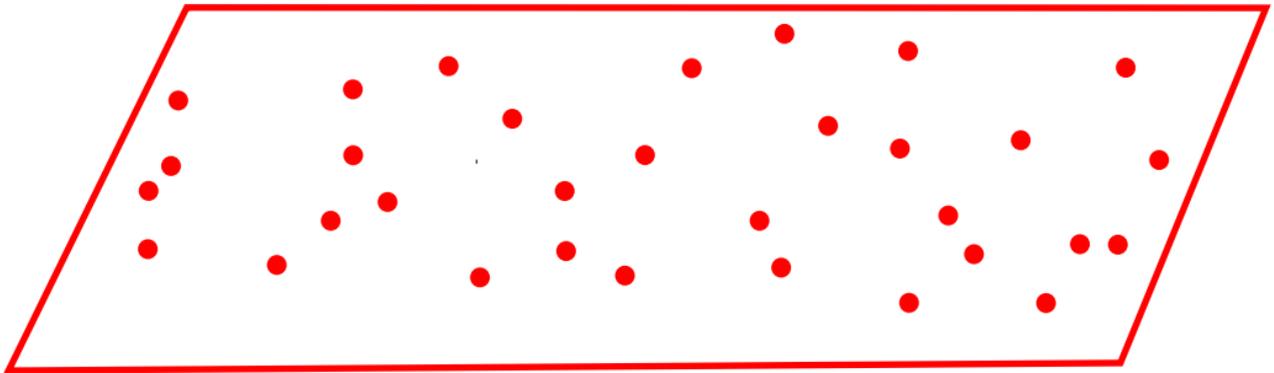
# points dans deux plans parallèles



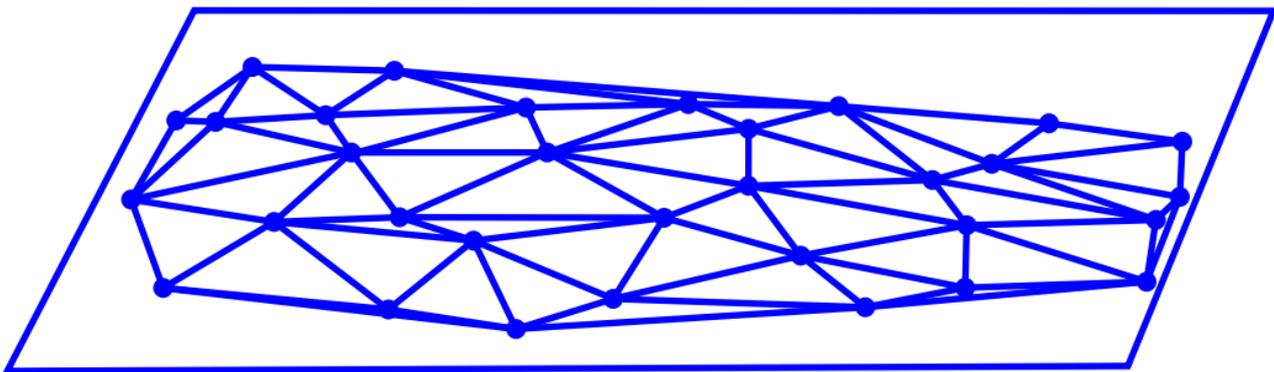
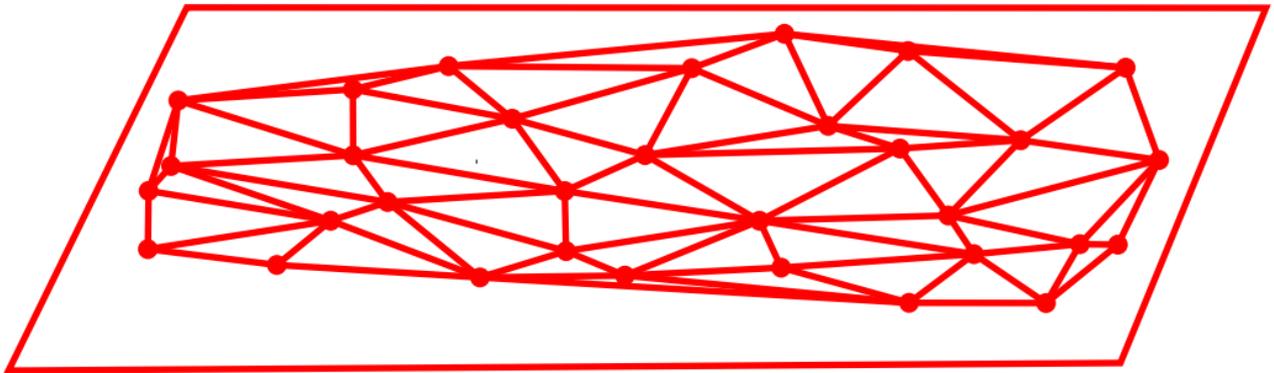
# points dans deux plans parallèles



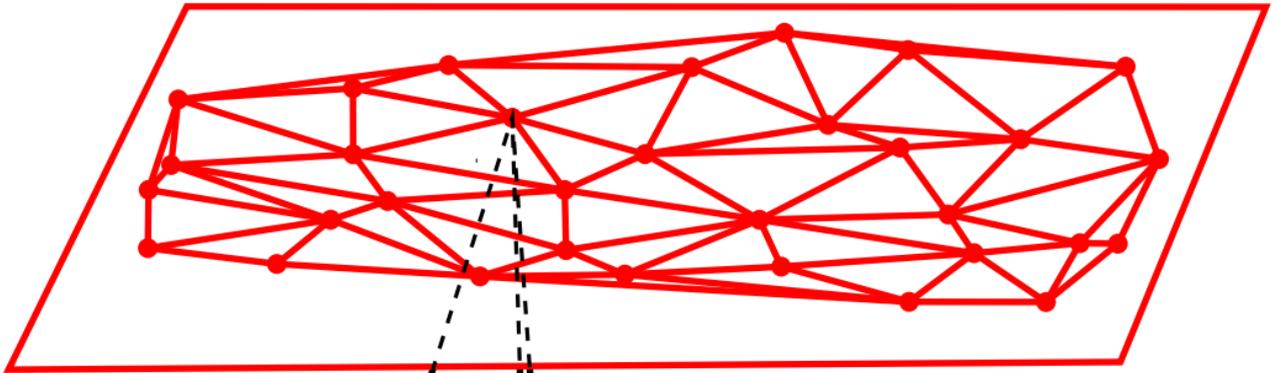
points dans deux plans parallèles



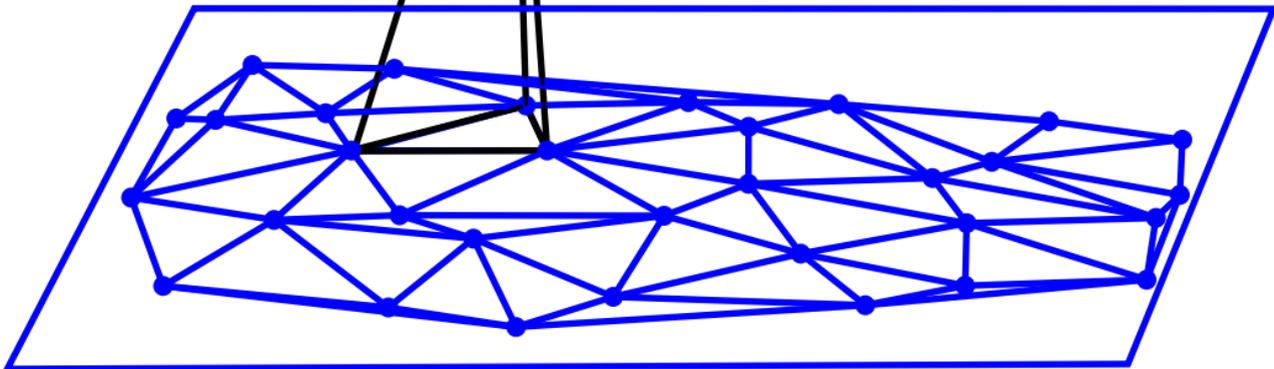
points dans deux plans parallèles



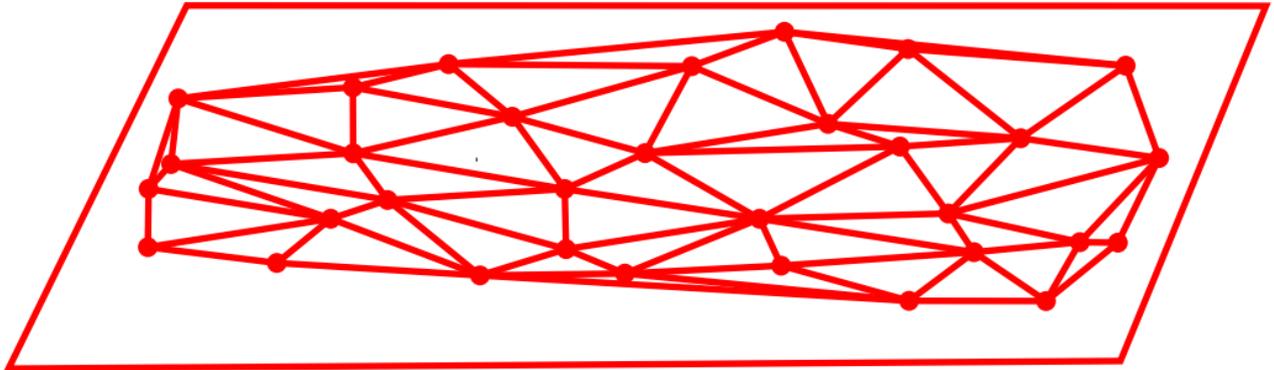
points dans deux plans parallèles



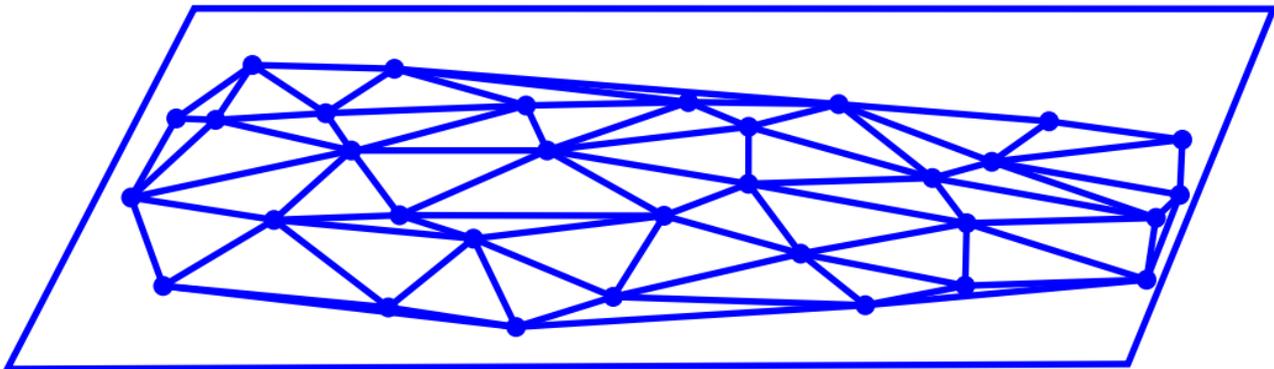
Tétraèdre de Delaunay



# points dans deux plans parallèles



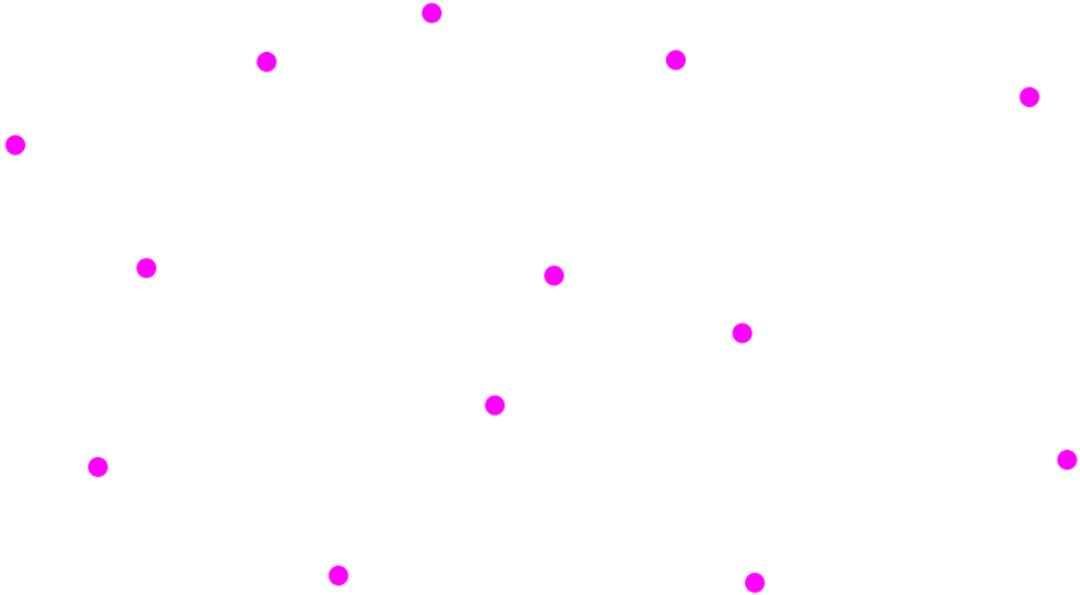
Complexité :  $O(n \log n + t)$





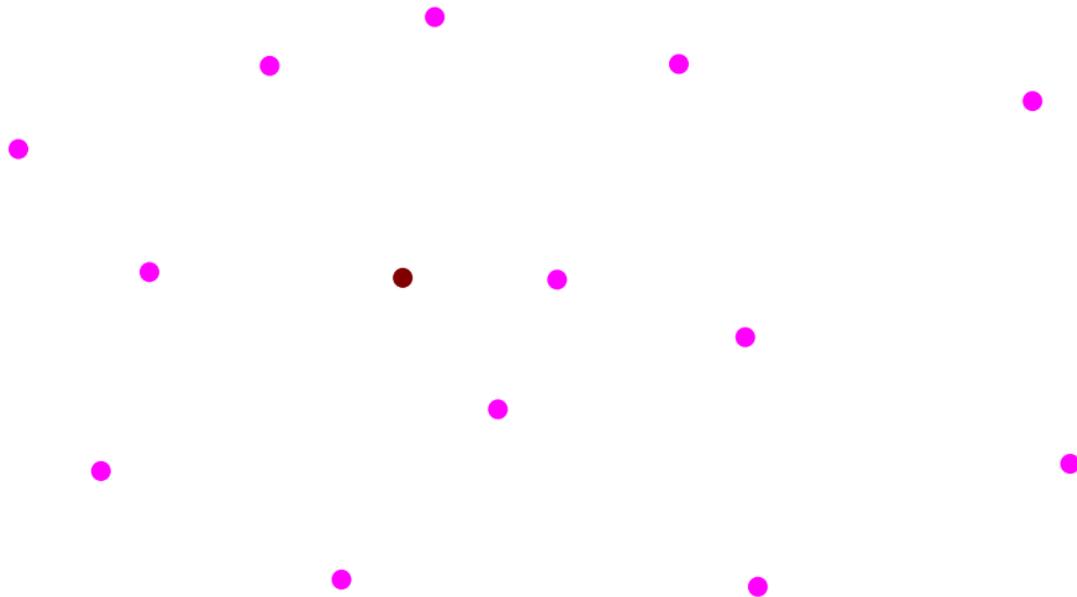
métriques exotiques !

Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



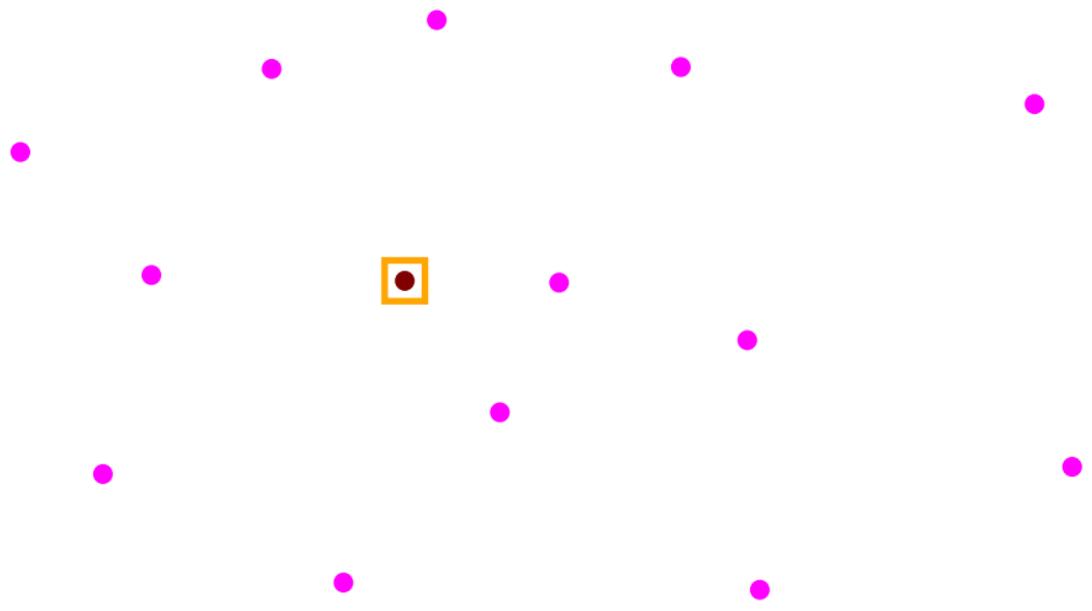
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



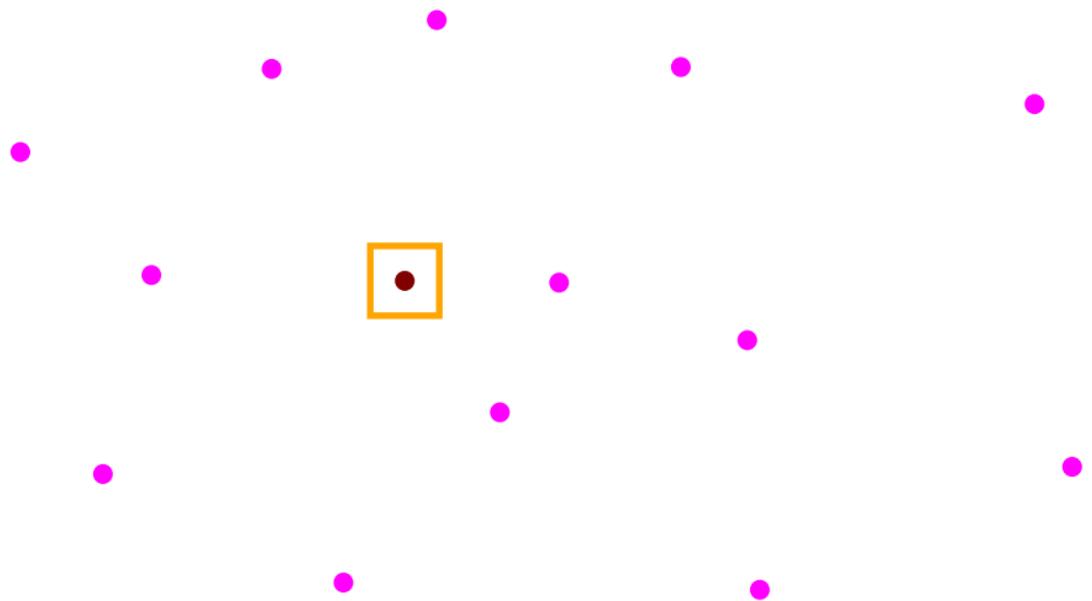
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



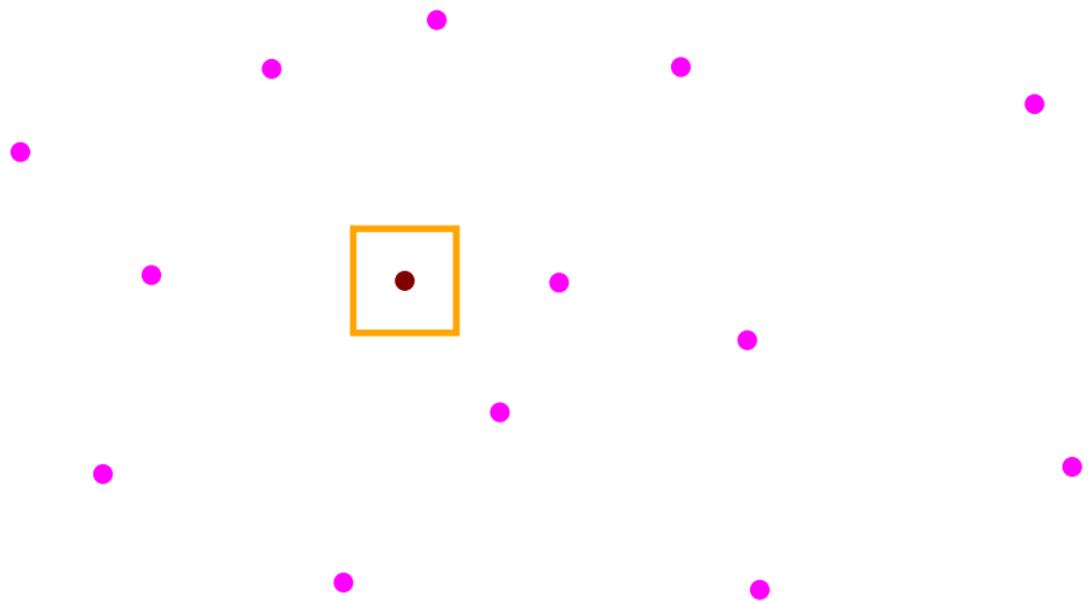
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



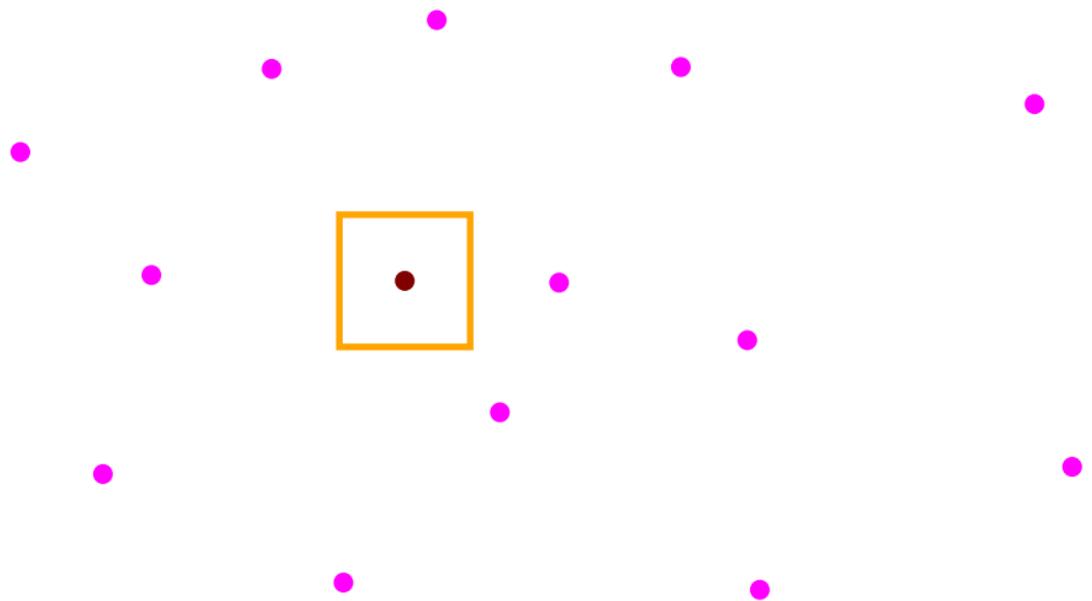
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



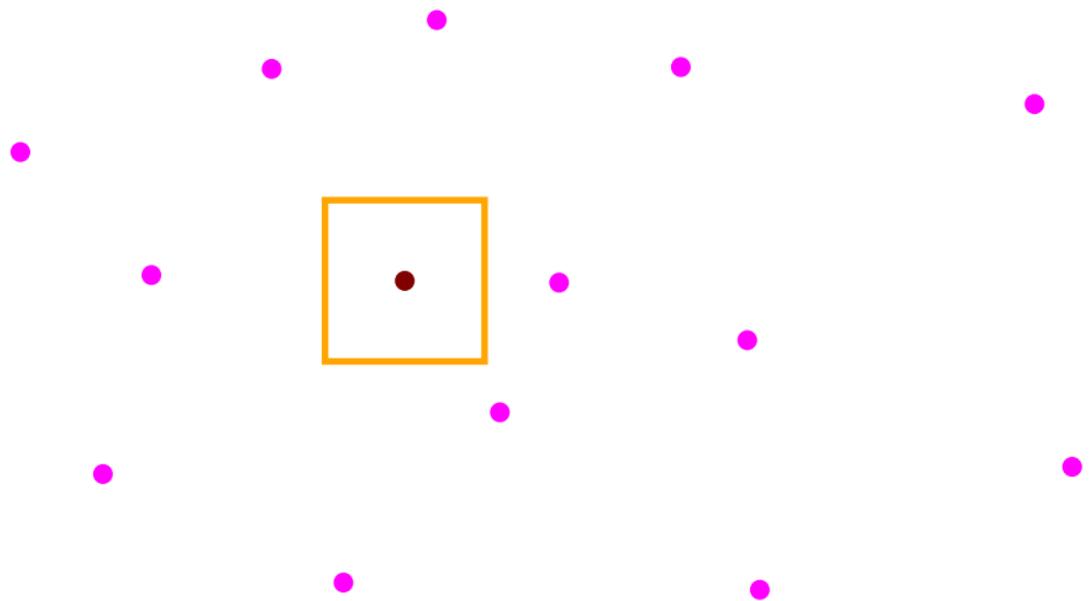
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



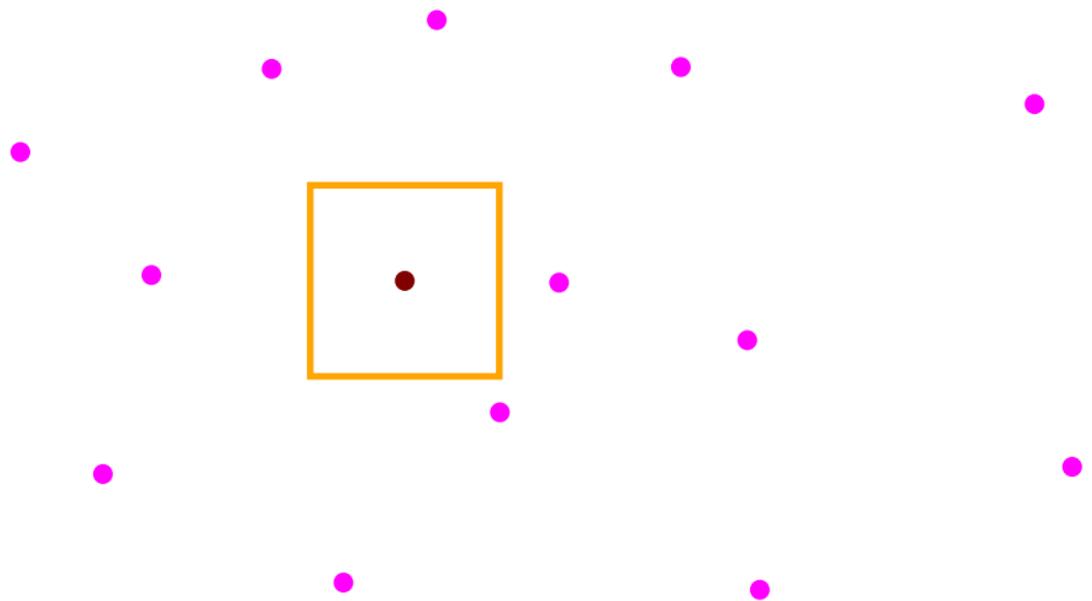
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

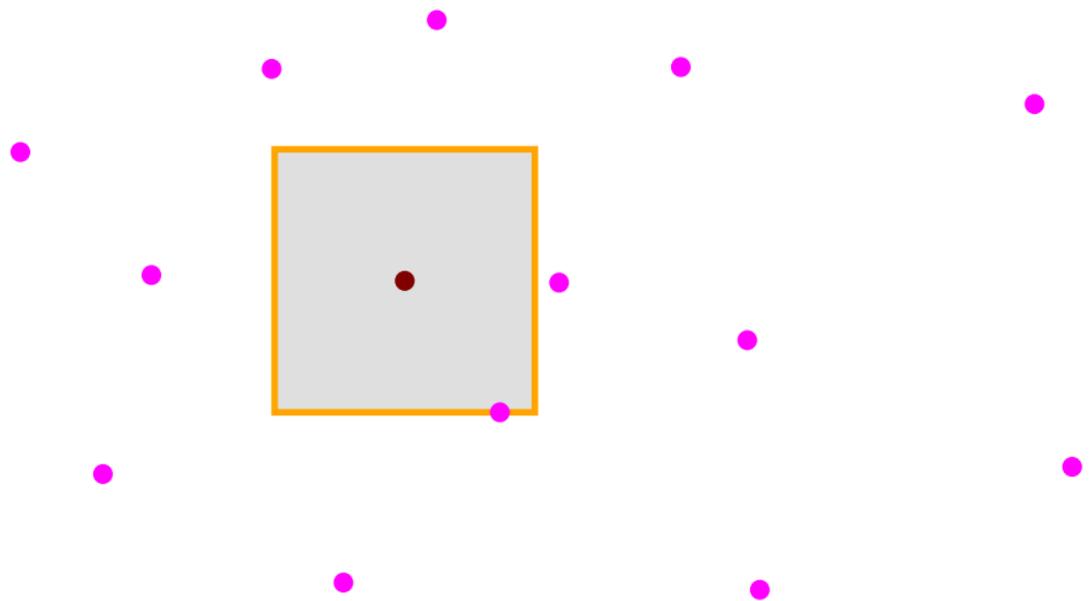
requête





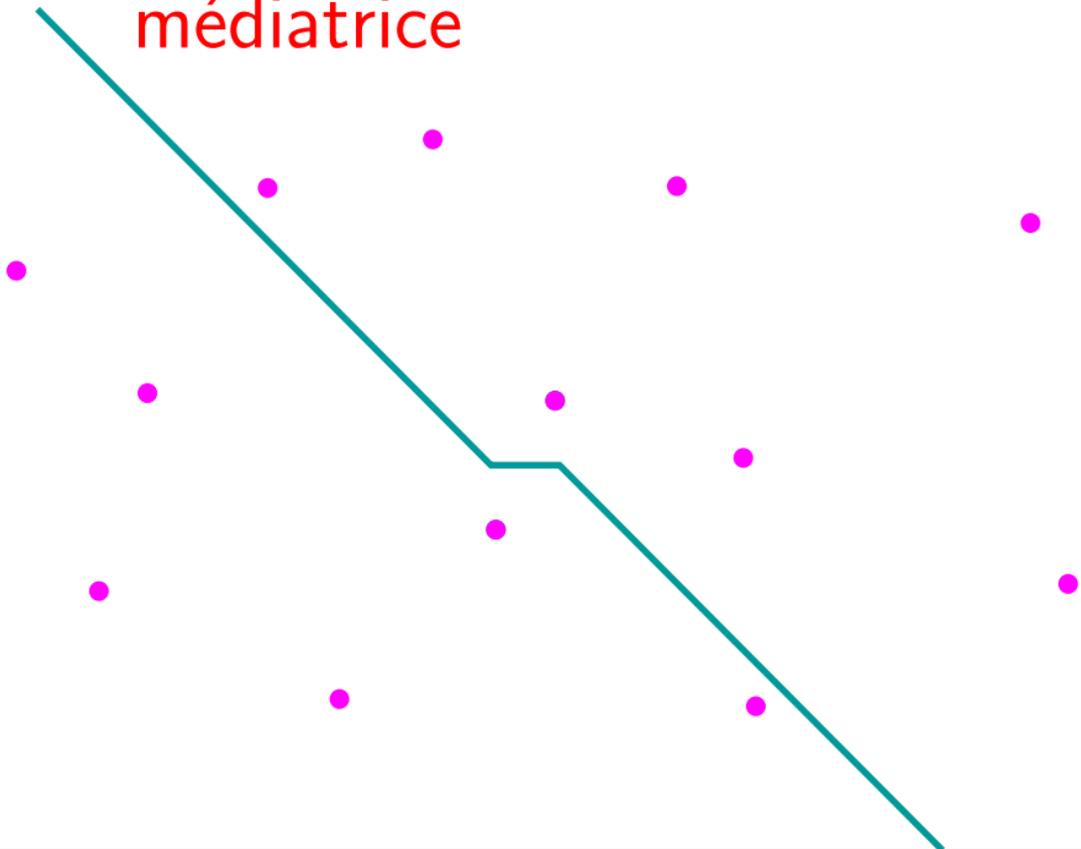
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

requête



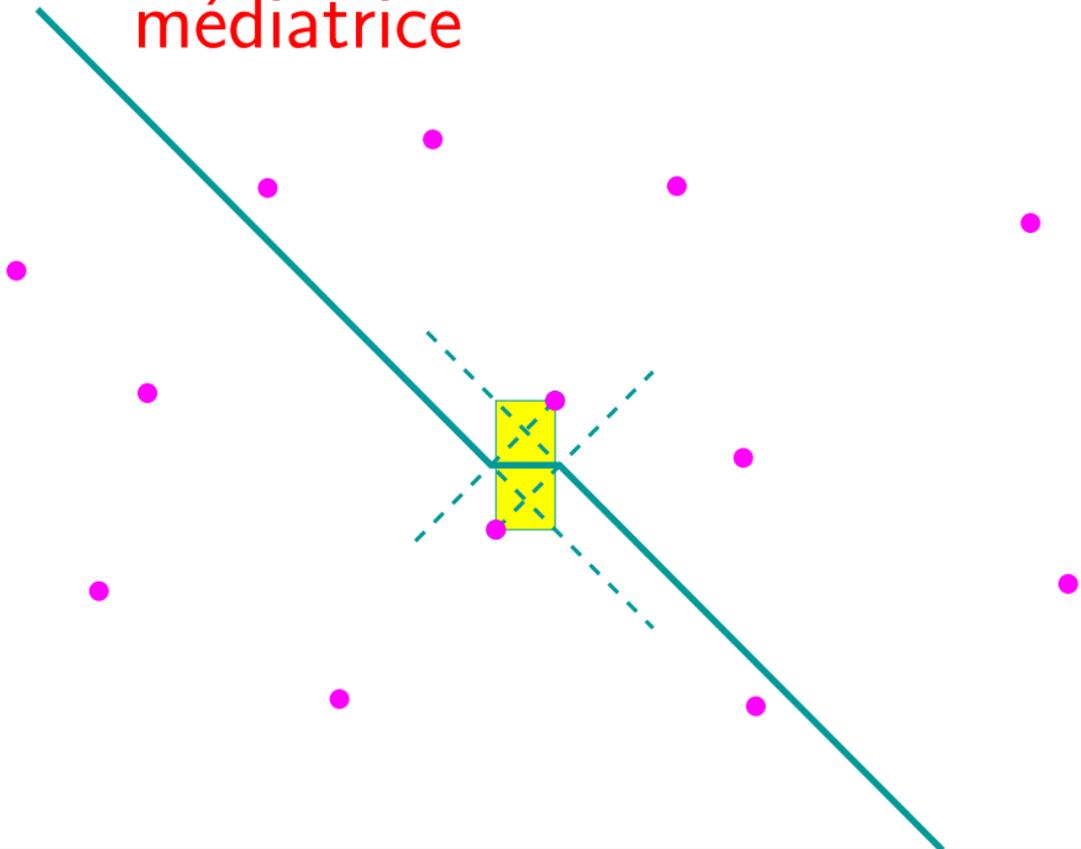
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

médiane

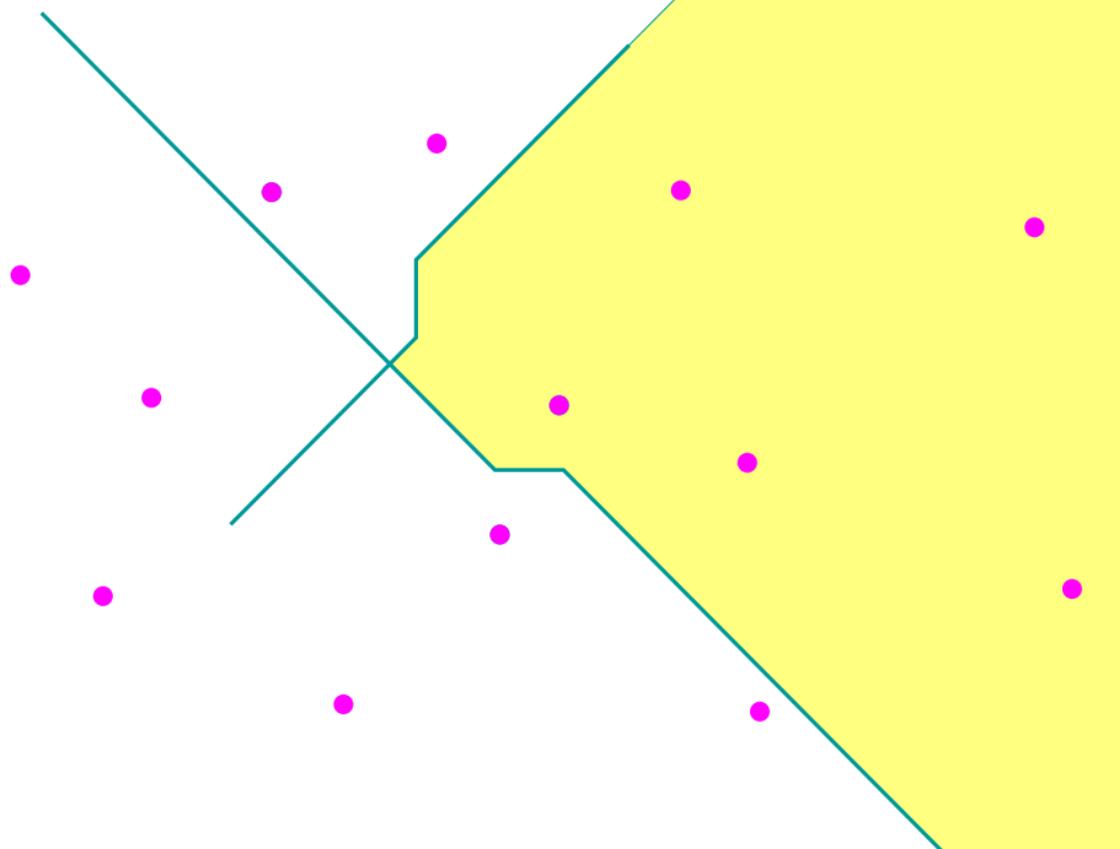


Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

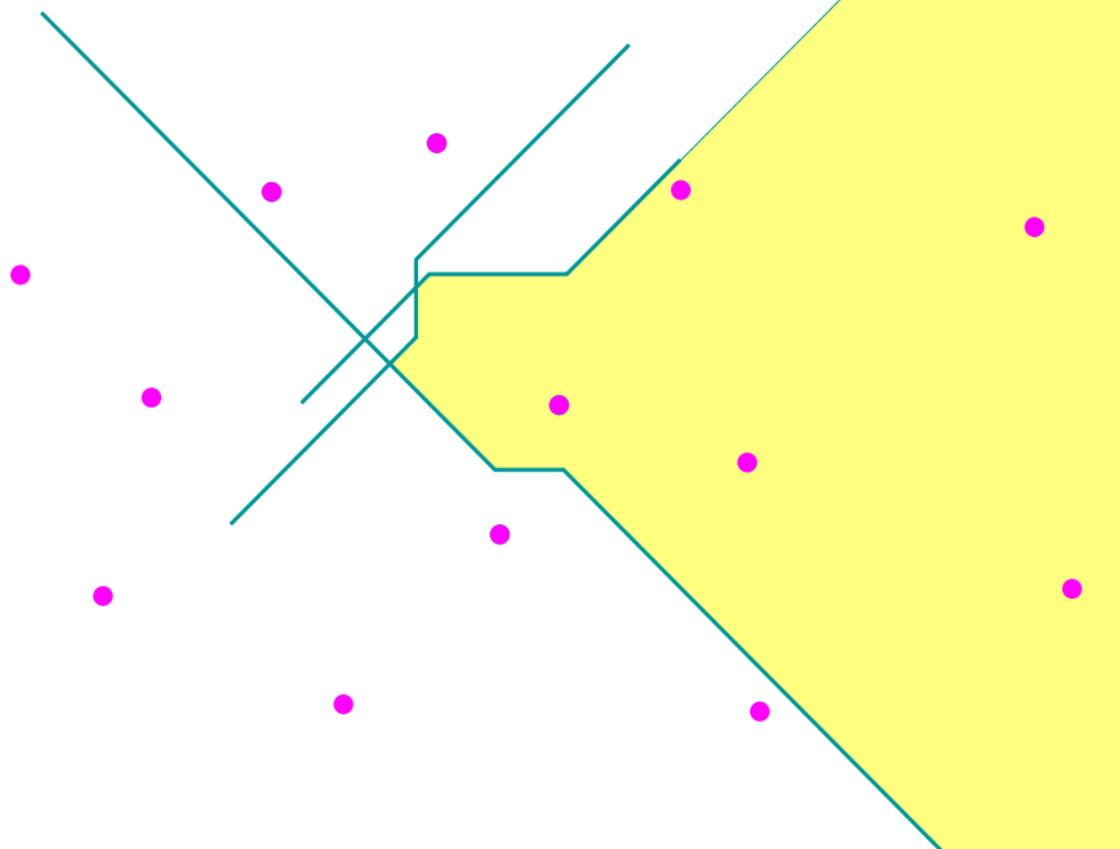
médiatrice



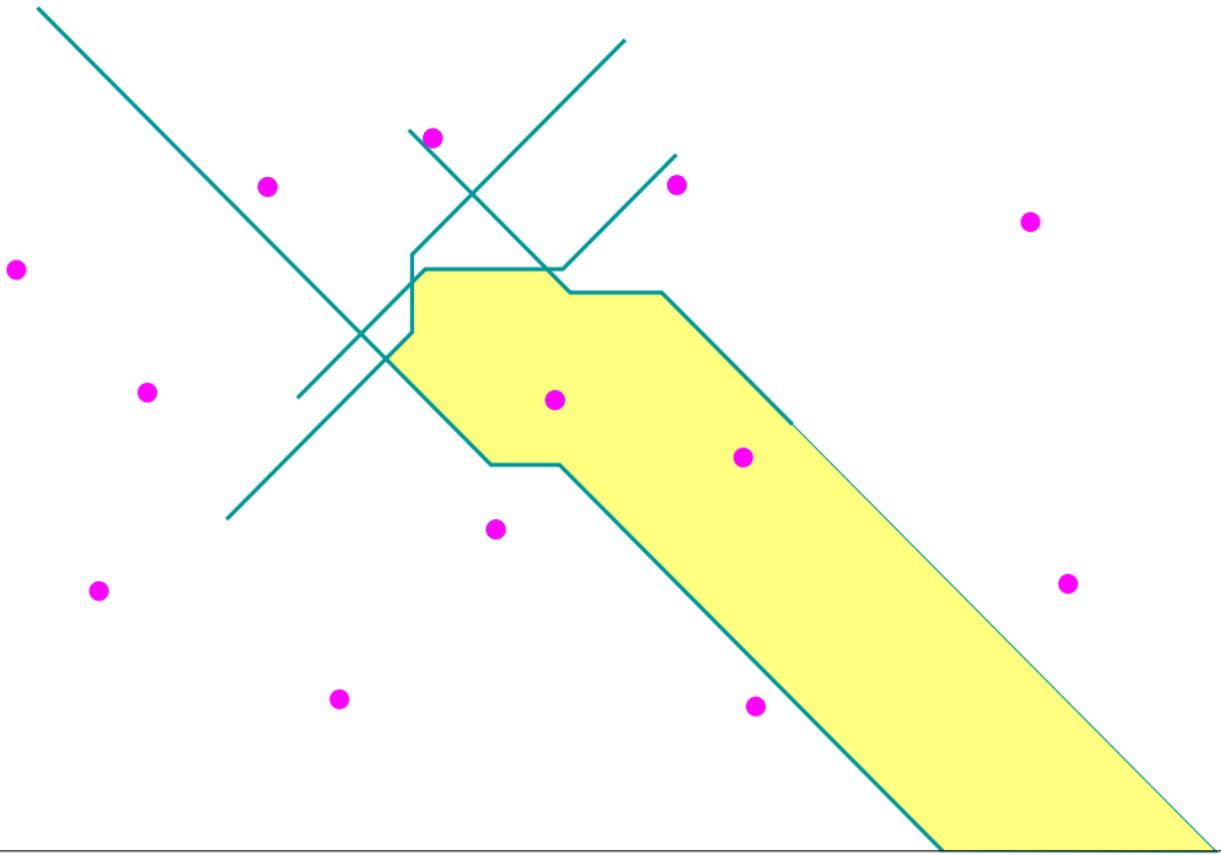
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



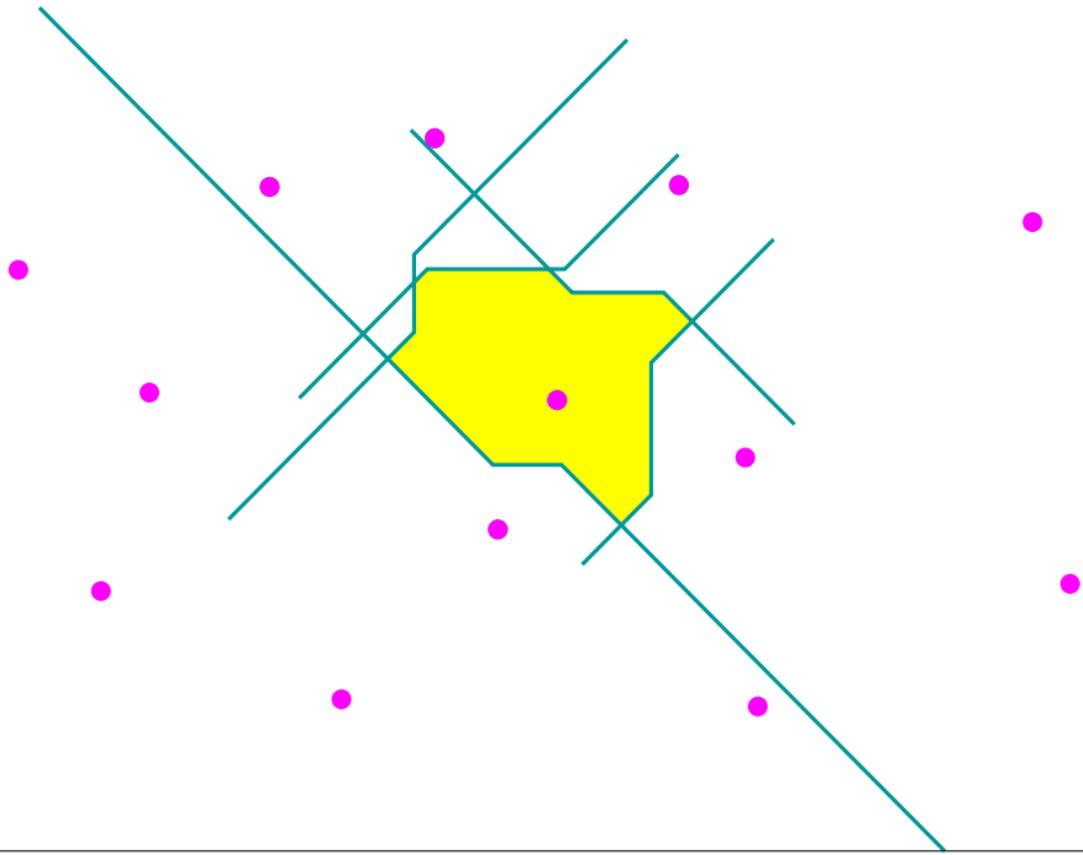
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



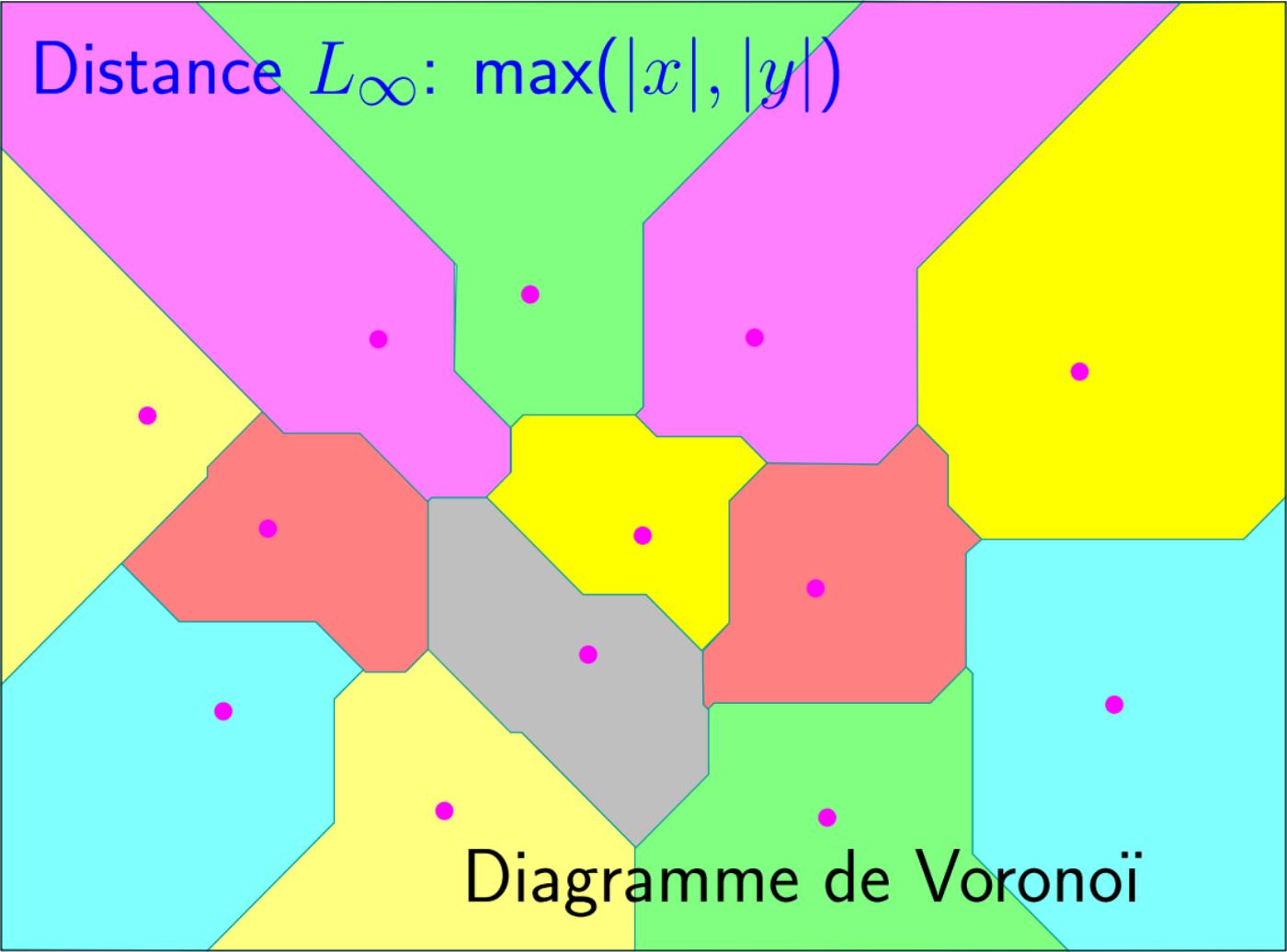
Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$



Distance  $L_\infty$ :  $\max(|x|, |y|)$

Delaunay

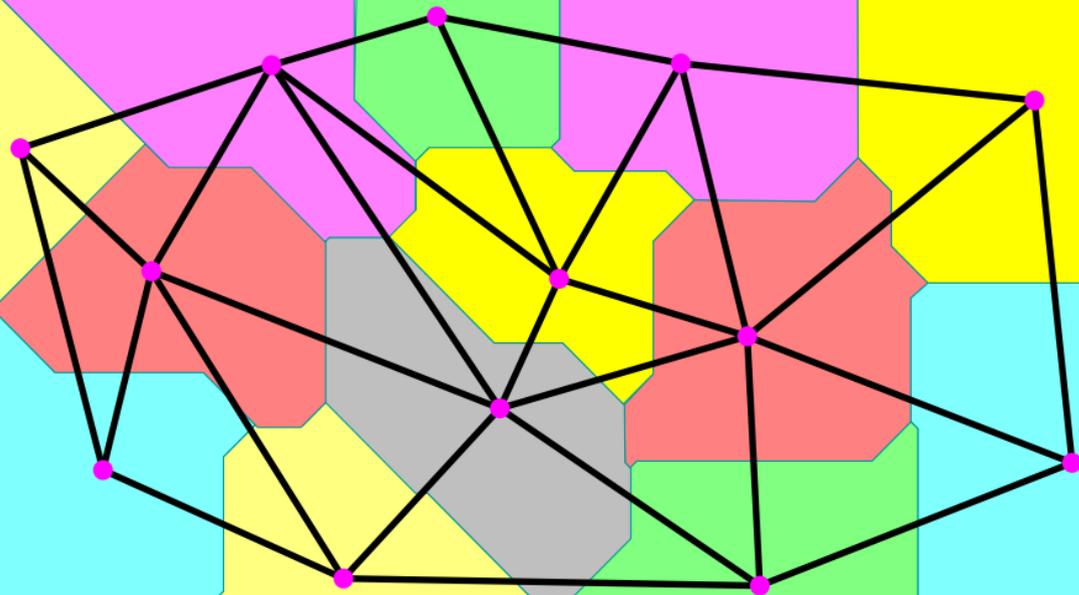
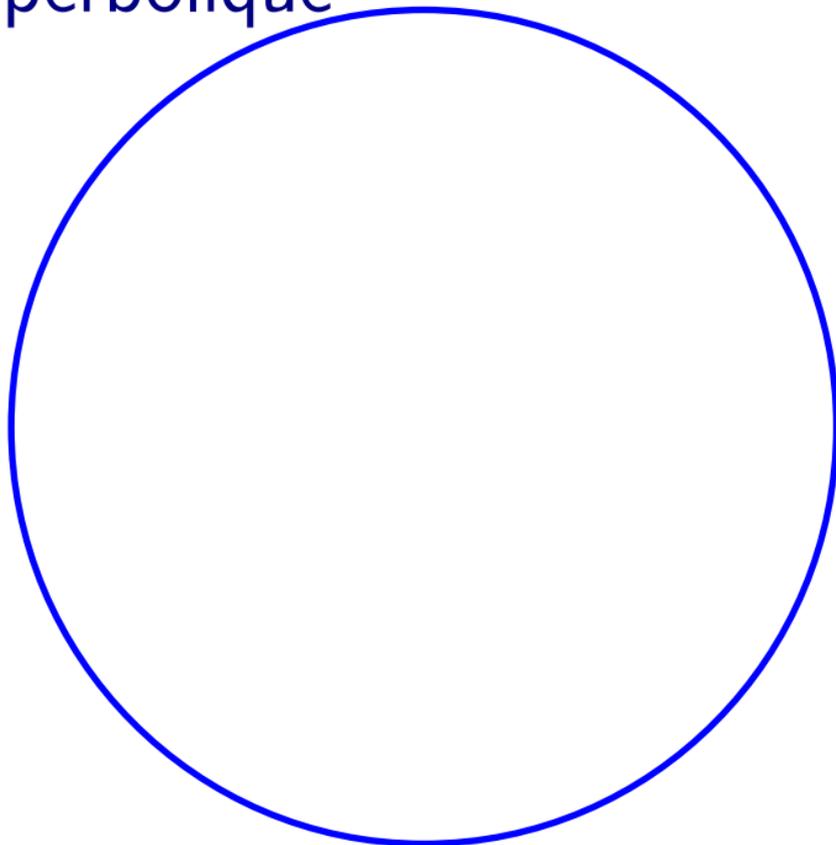


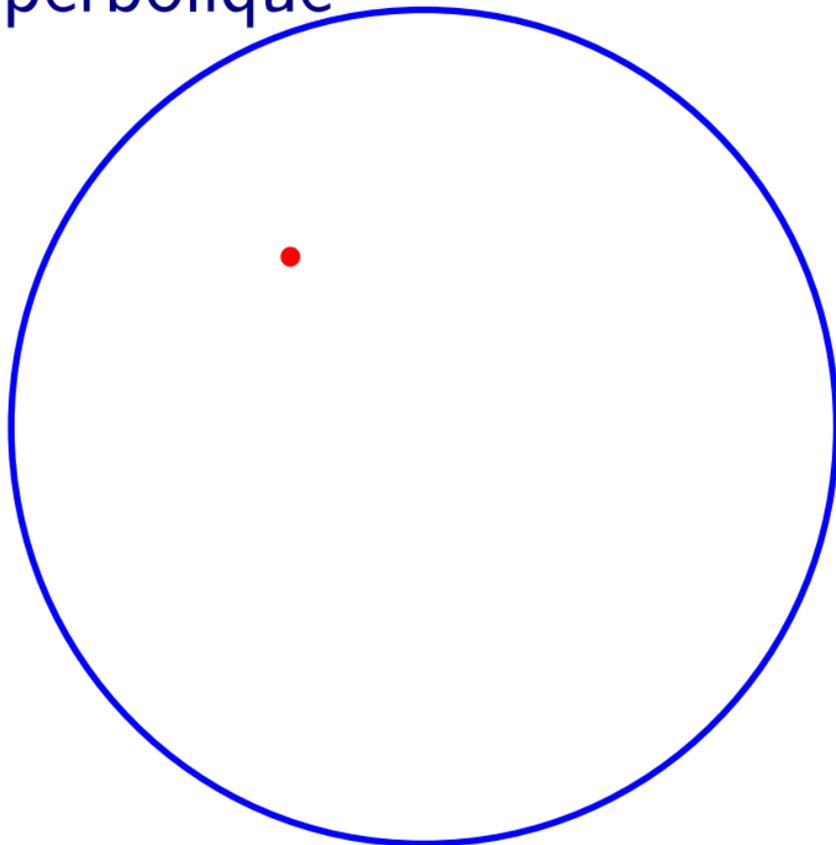
Diagramme de Voronoï

distance hyperbolique



distance hyperbolique

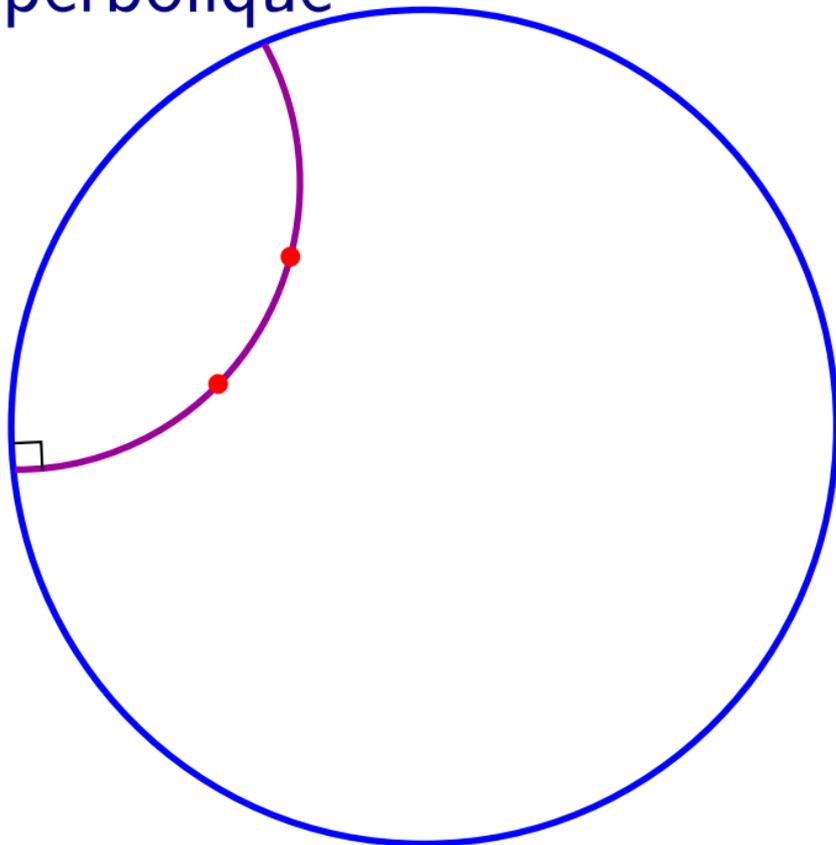
point



distance hyperbolique

point

droite

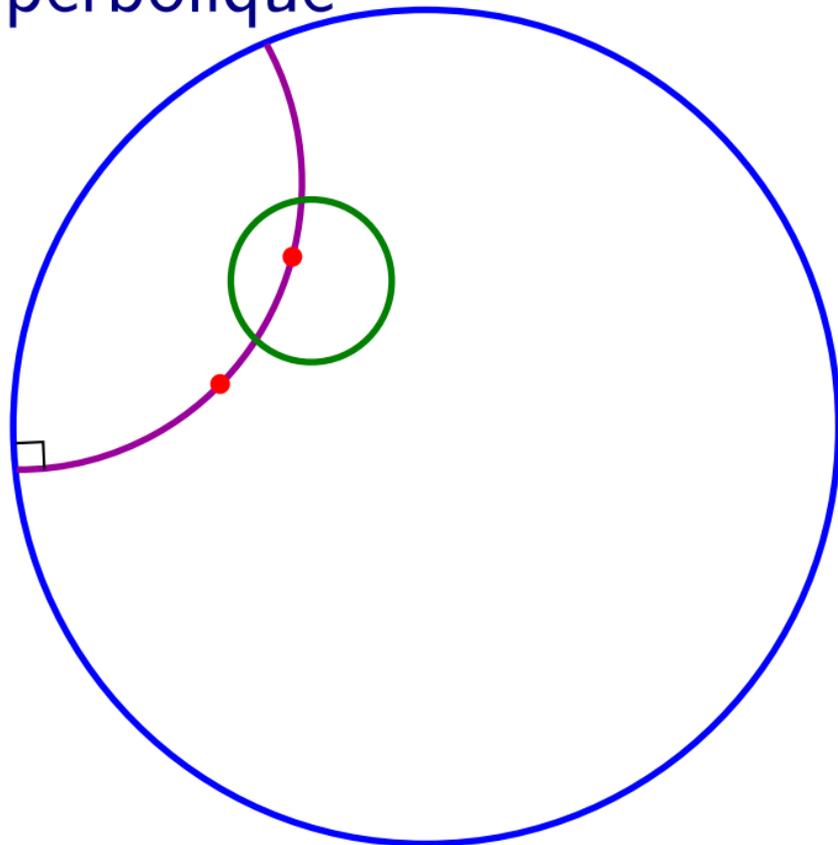


distance hyperbolique

point

droite

cercles

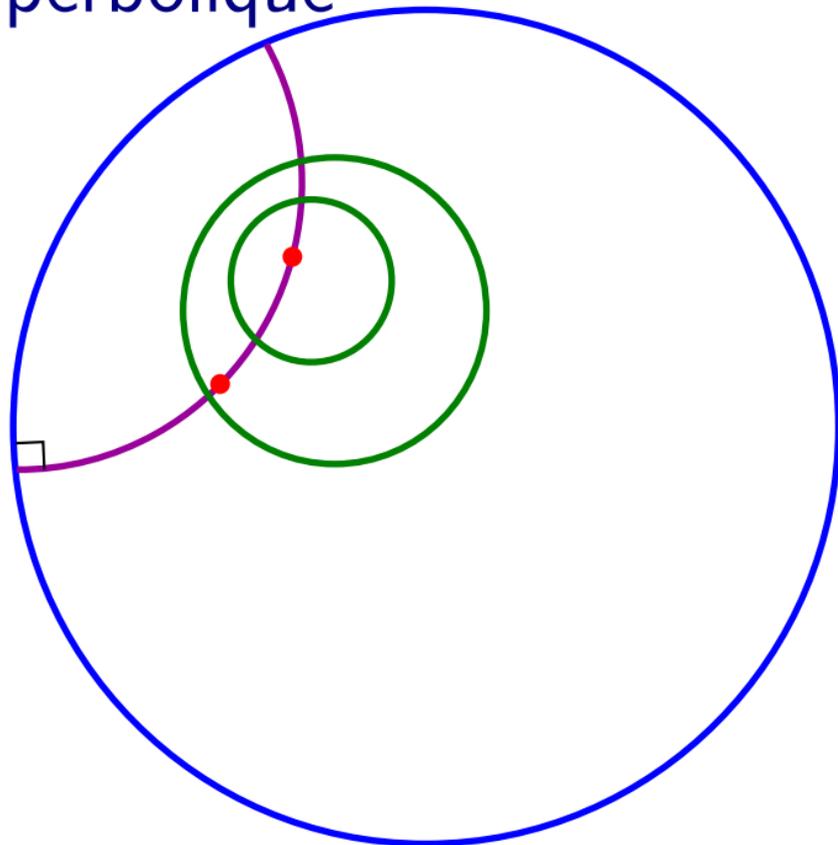


distance hyperbolique

point

droite

cercles

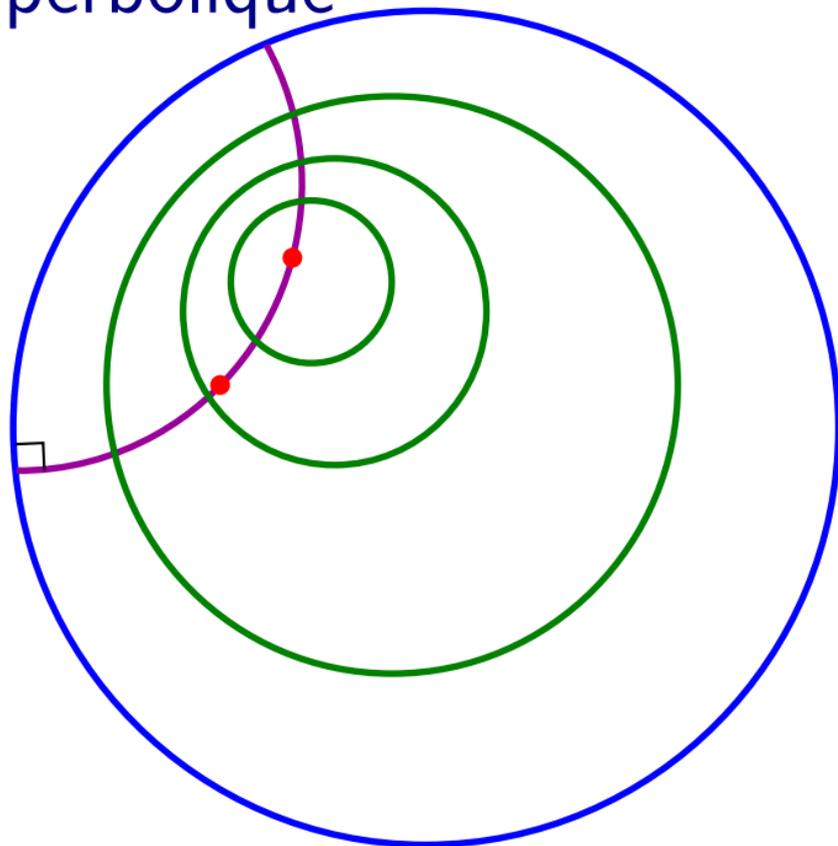


distance hyperbolique

point

droite

cercles

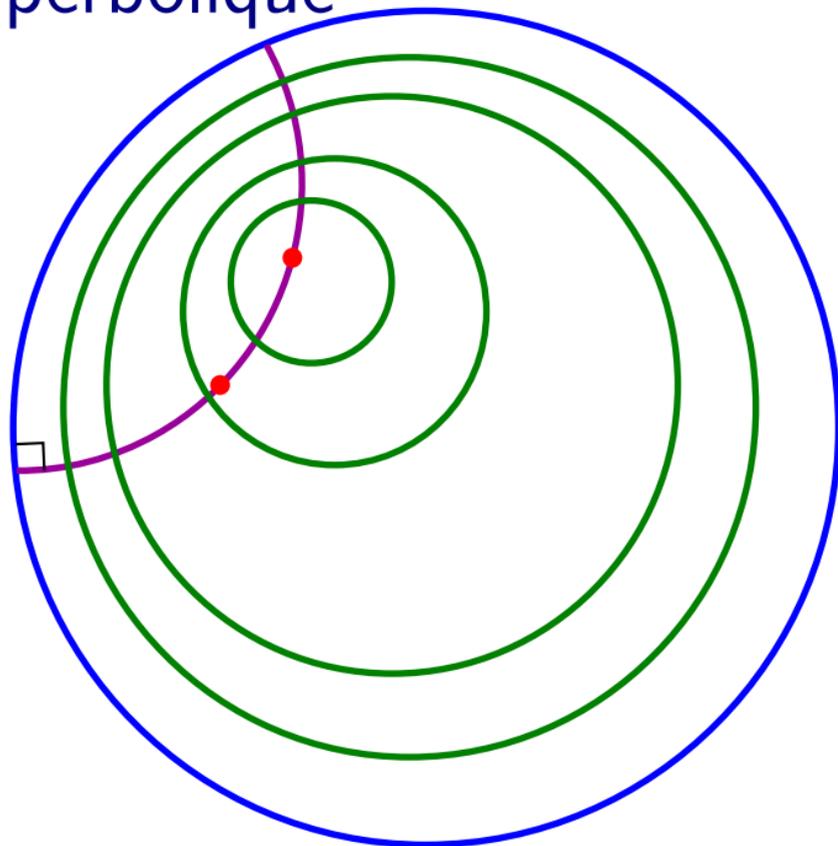


distance hyperbolique

point

droite

cercles



# Diagramme de Voronoï

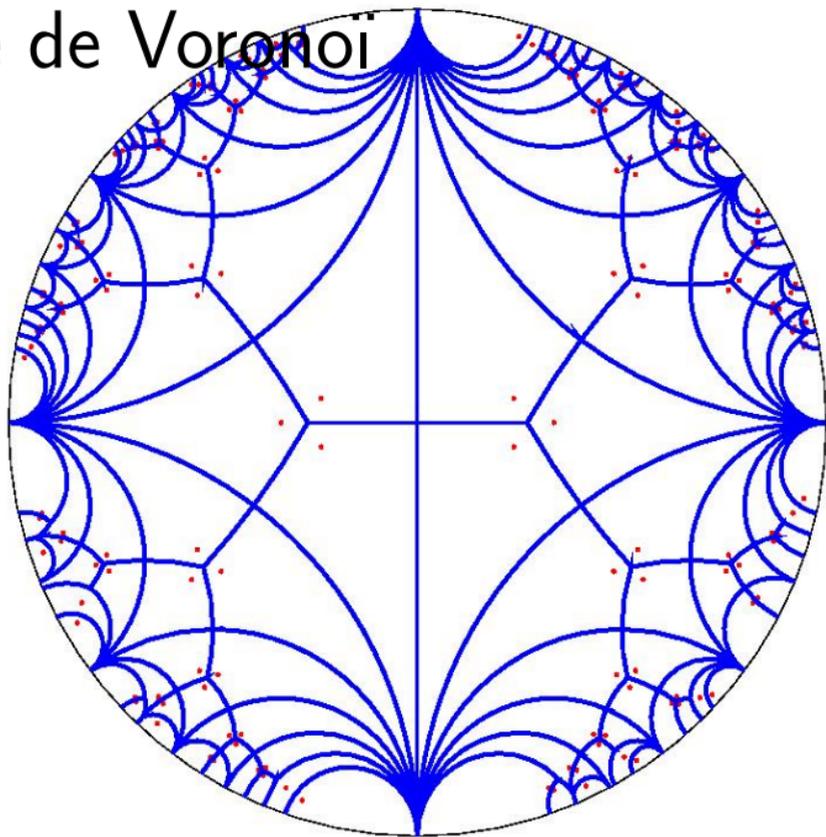
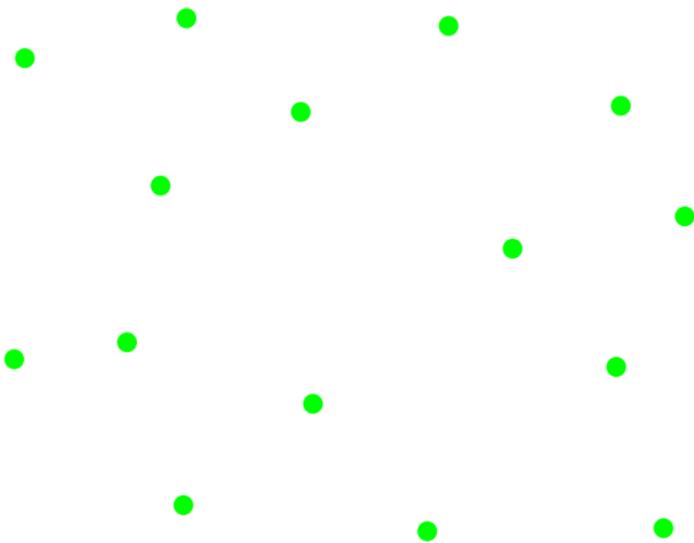
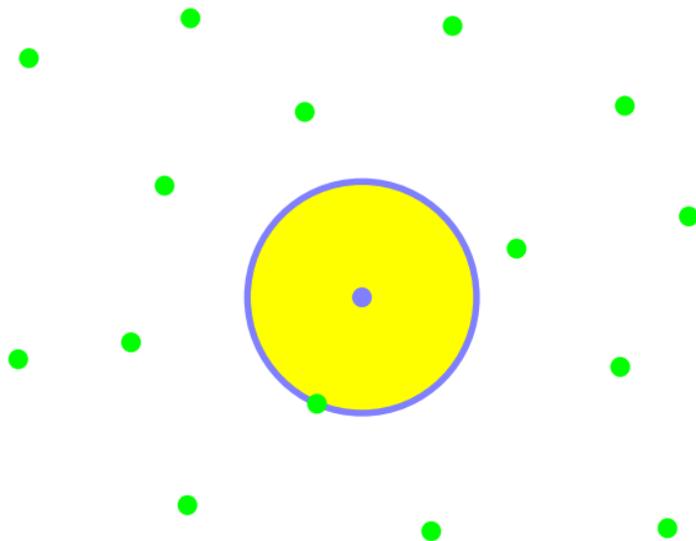




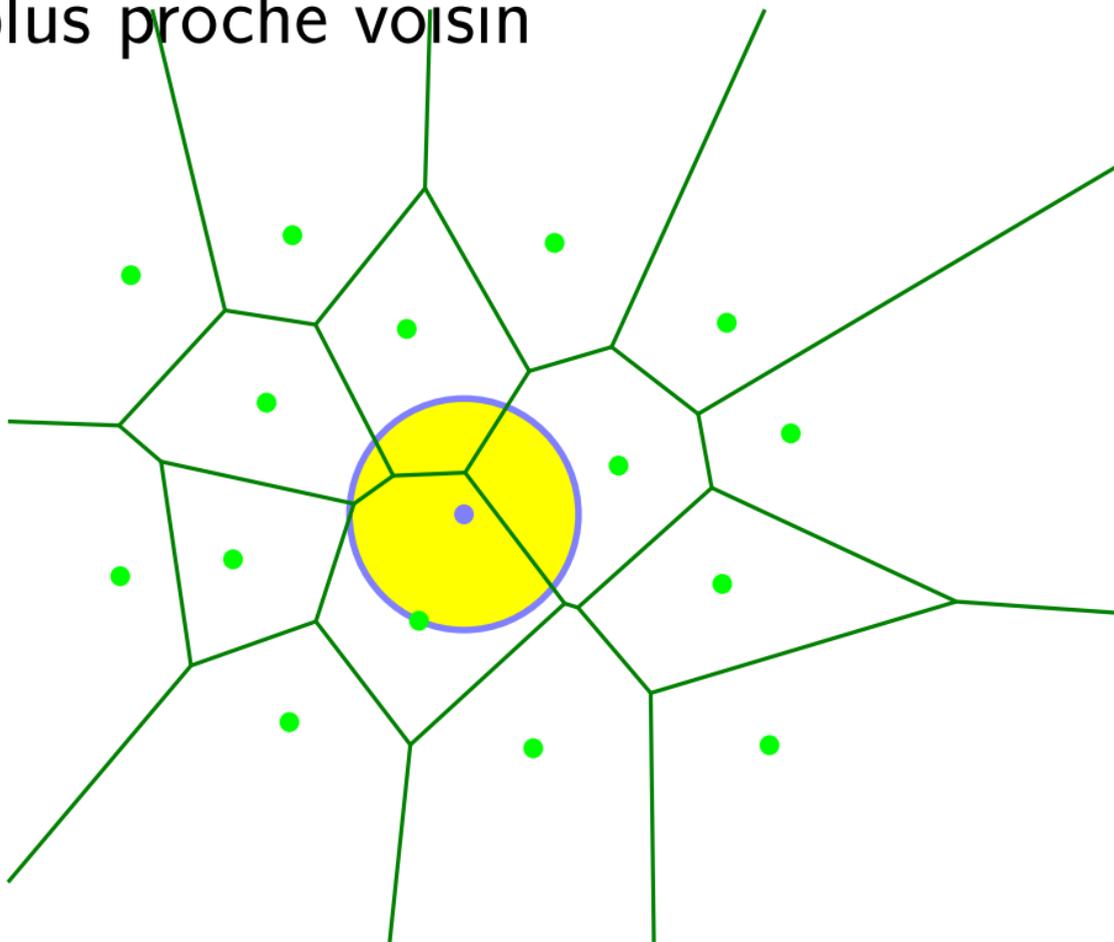
diagramme de Voronoï d'ordre  $k$



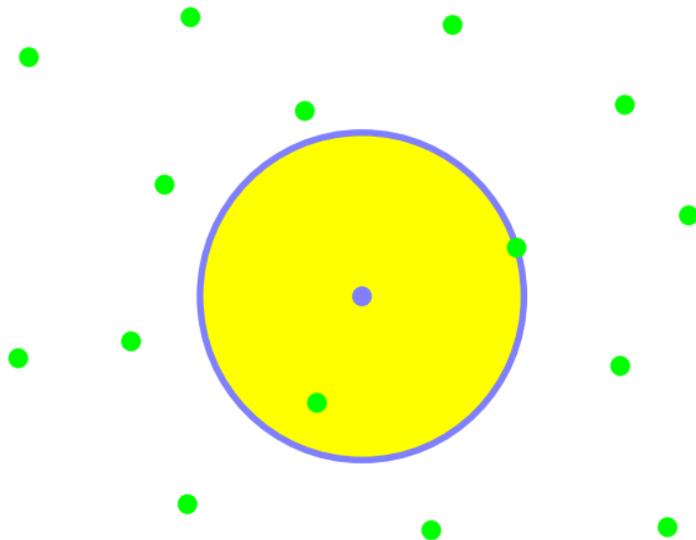
# Le plus proche voisin



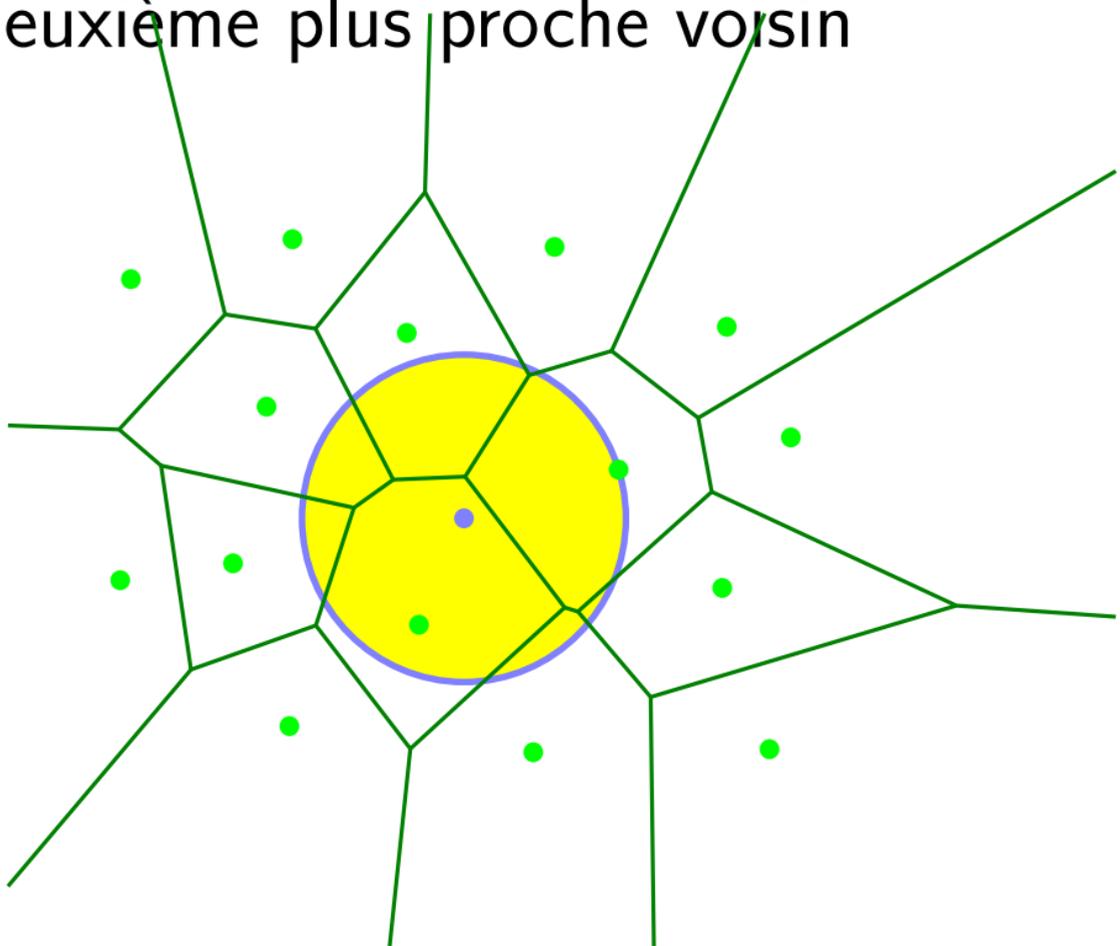
Le plus proche voisin



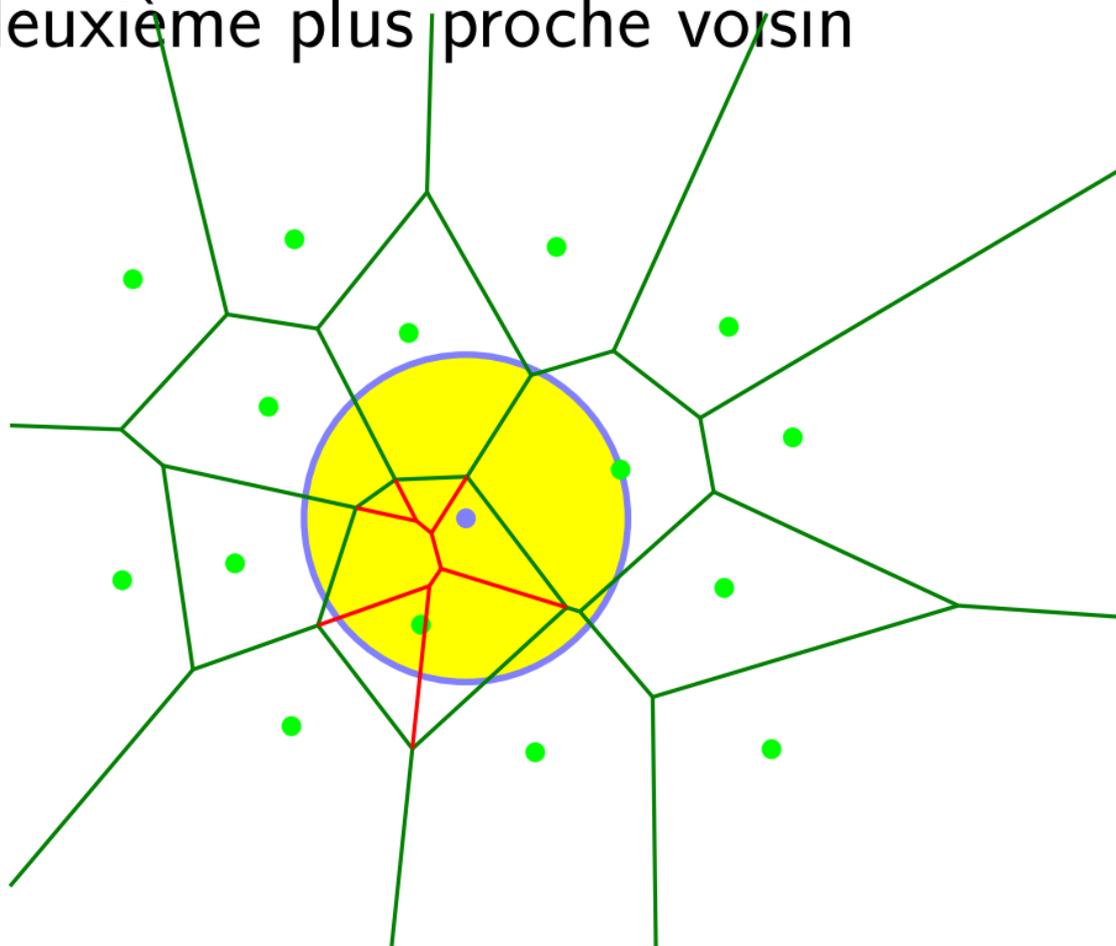
# Le deuxième plus proche voisin



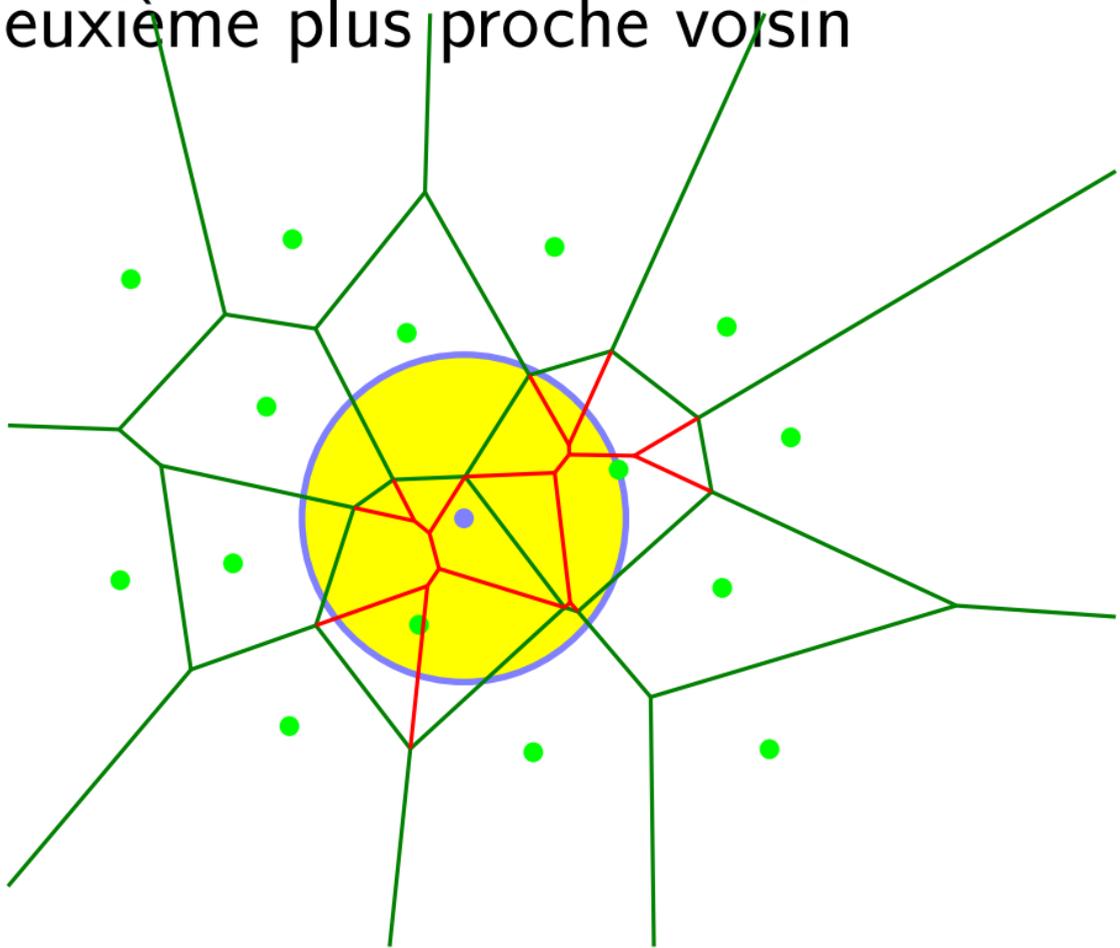
Le deuxième plus proche voisin

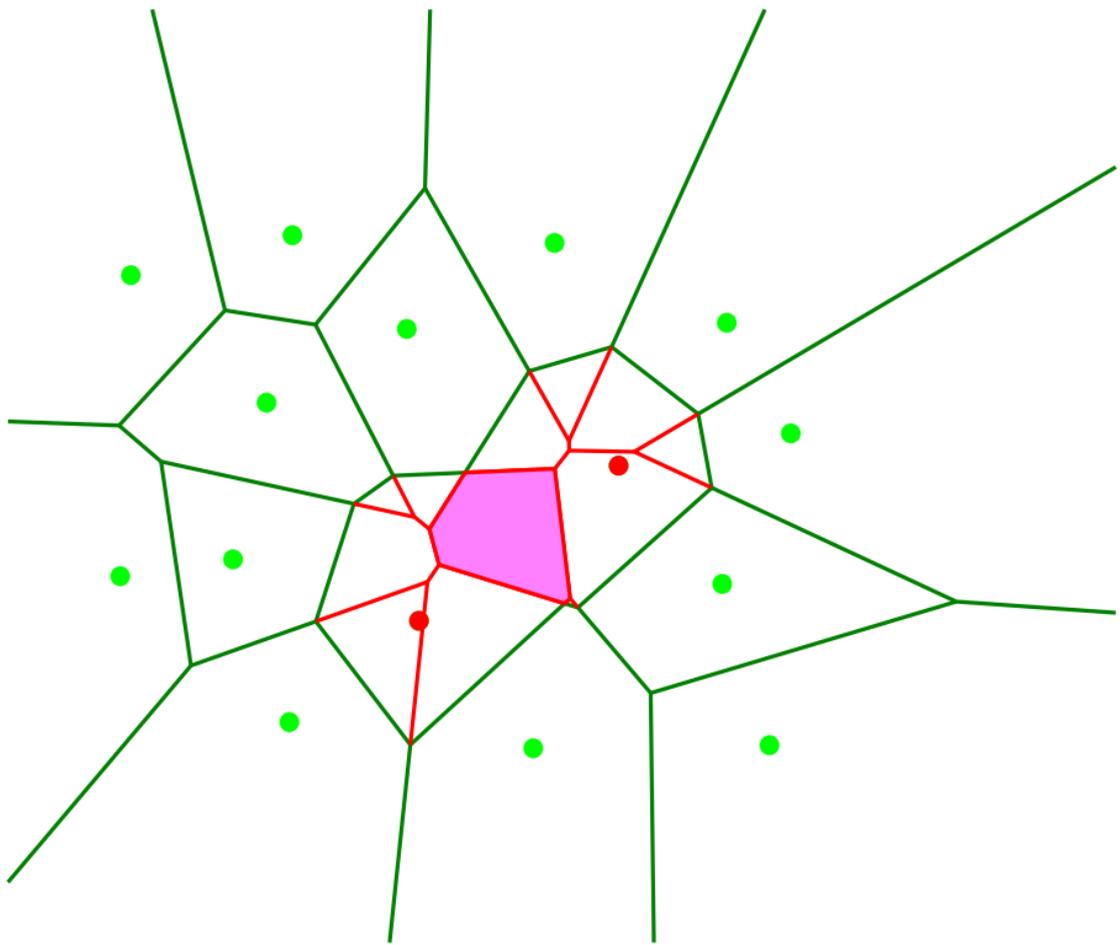


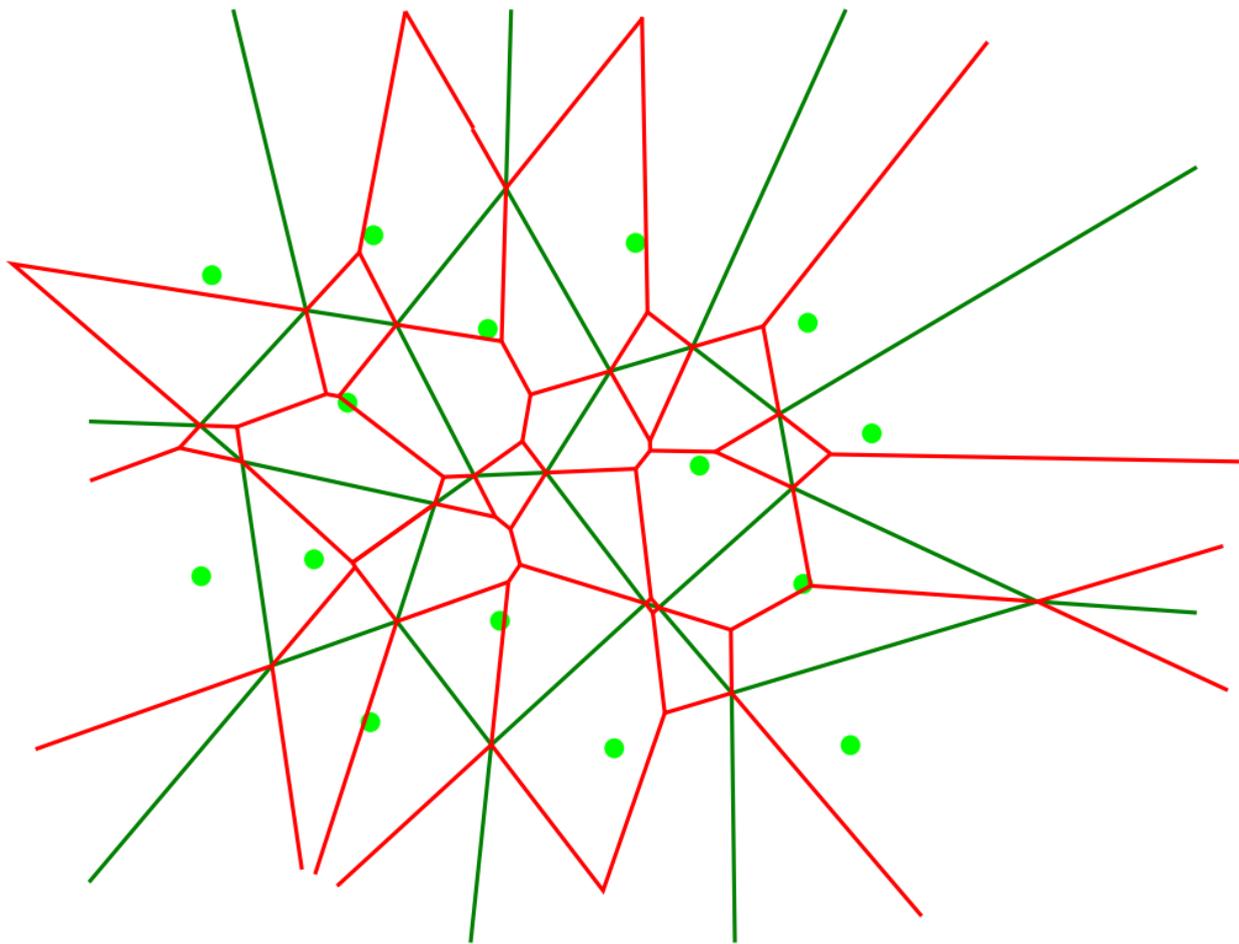
Le deuxième plus proche voisin



Le deuxième plus proche voisin







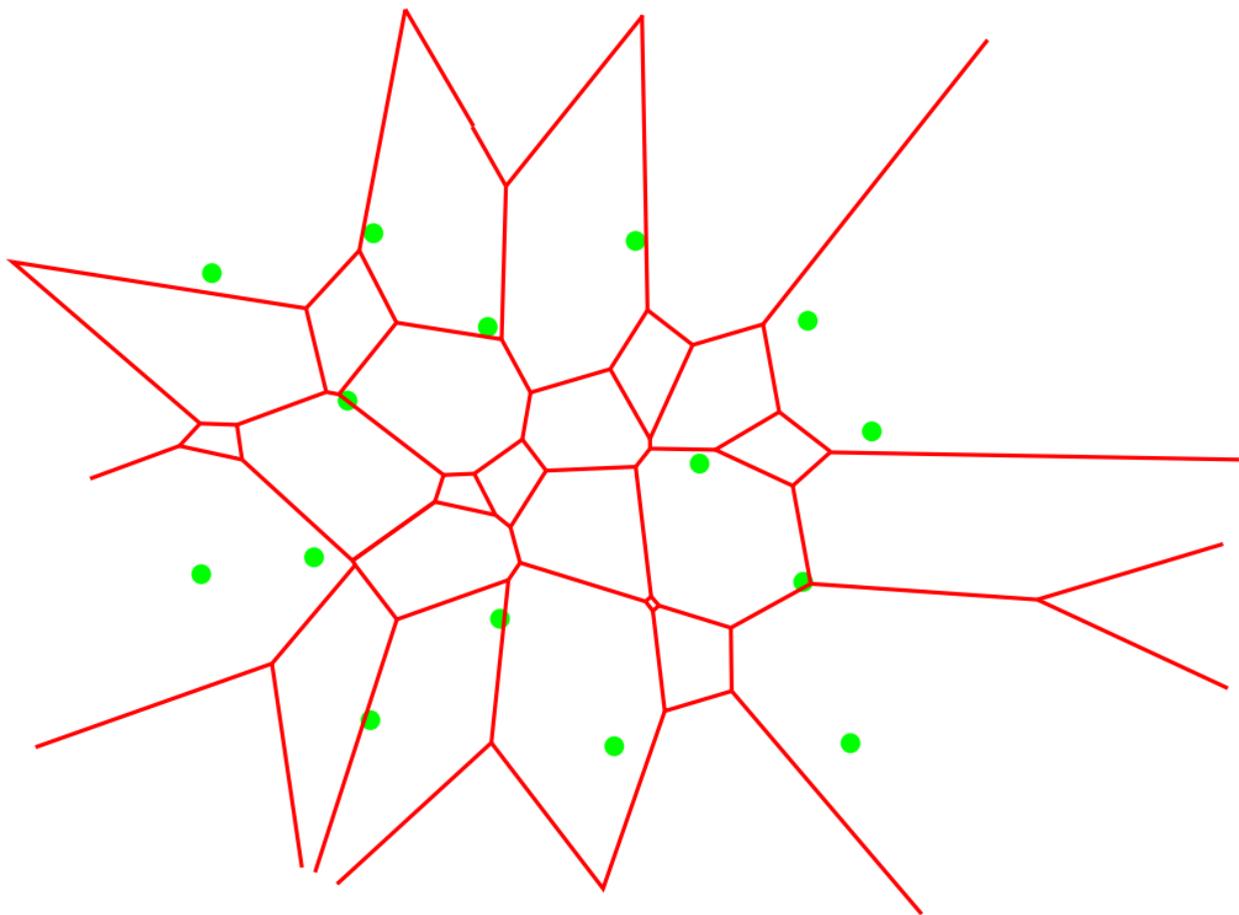


diagramme de Voronoï d'ordre  $k$

diagramme de Voronoï d'ordre  $k$

taille  $O(nk)$

diagramme de Voronoï d'ordre  $k$

taille  $O(nk)$

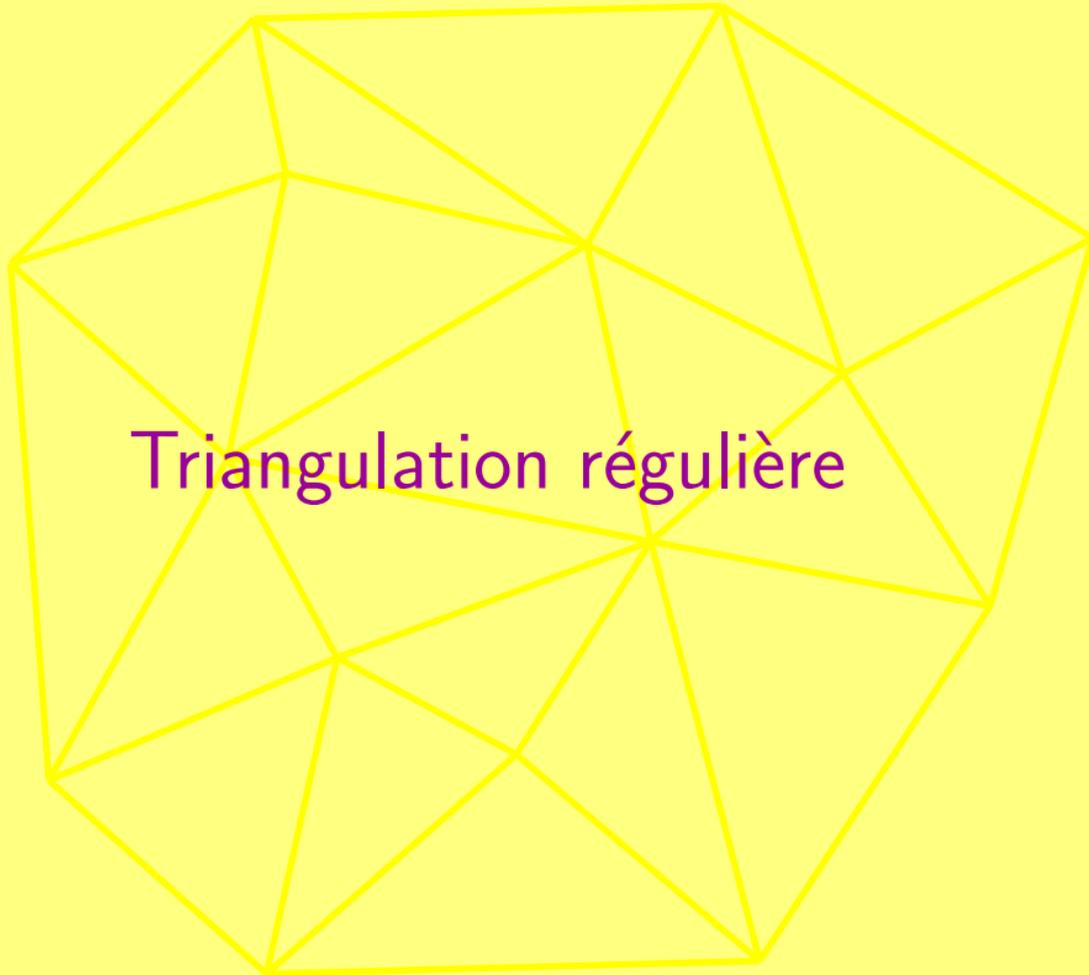
calculé en  $O(nk)$  à partir de l'ordre  $k - 1$

diagramme de Voronoï d'ordre  $k$

taille  $O(nk)$

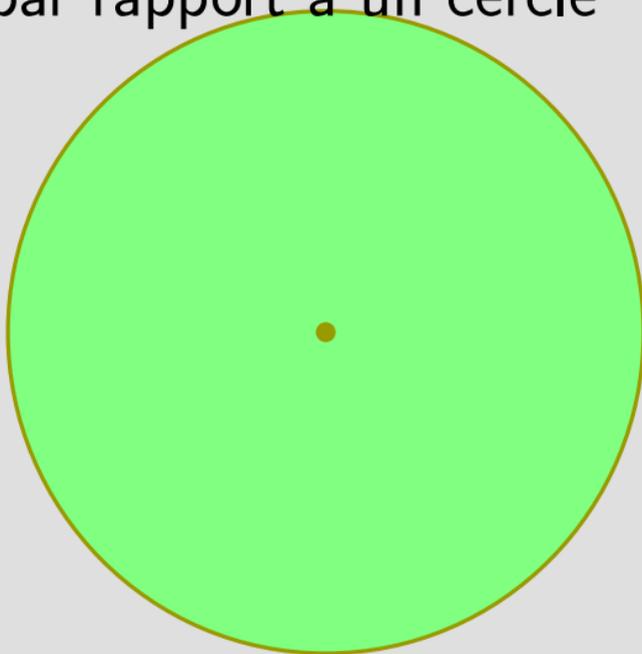
calculé en  $O(nk)$  à partir de l'ordre  $k - 1$

$O(nk^2)$



Triangulation régulière

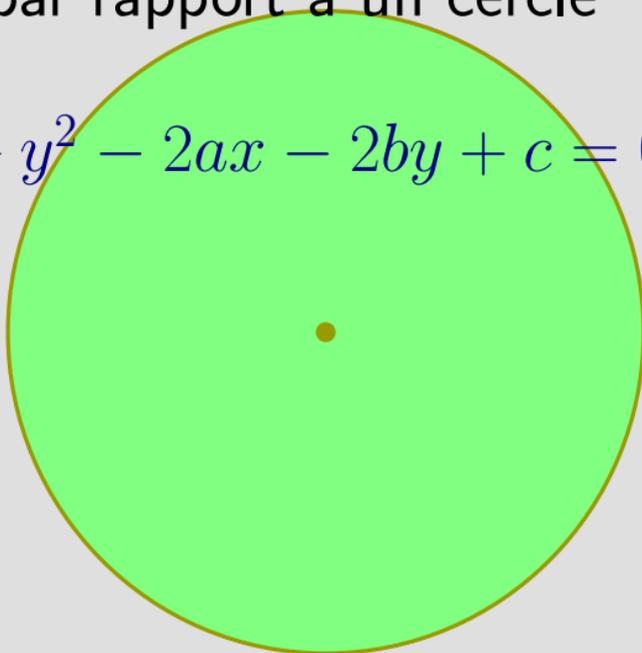
# Puissance d'un point par rapport à un cercle



# Puissance d'un point par rapport à un cercle

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

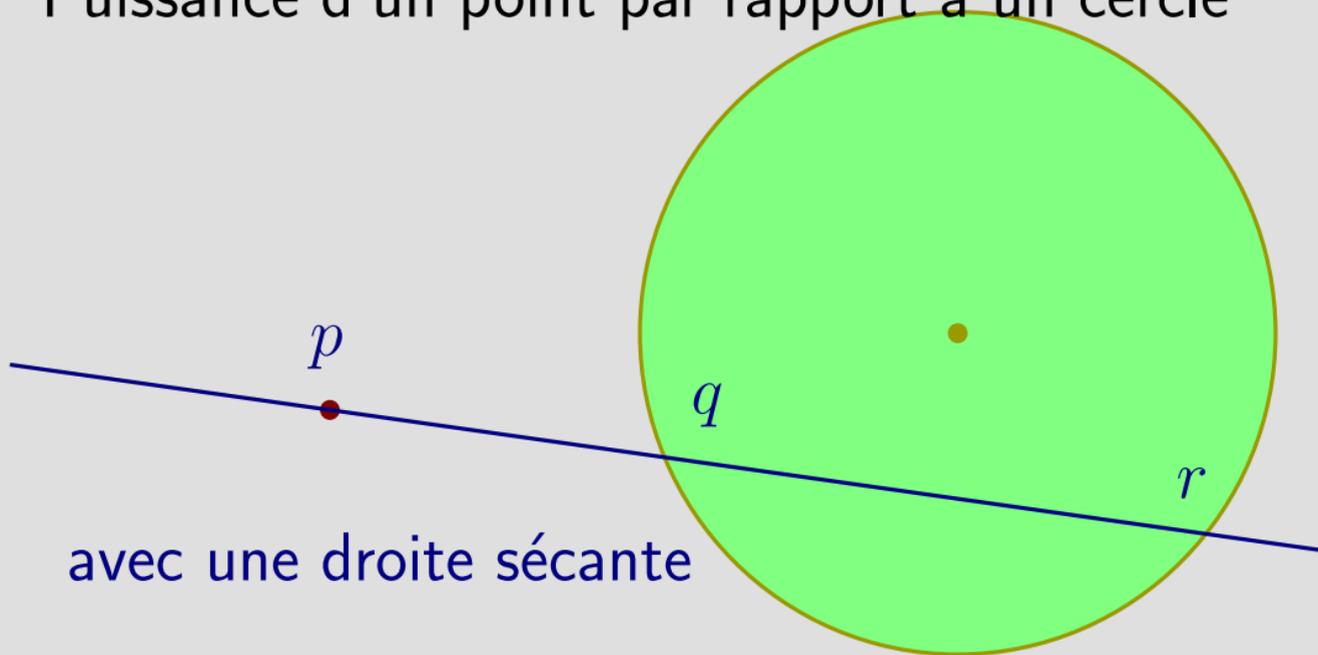
$(x_p, y_p)$



avec l'équation

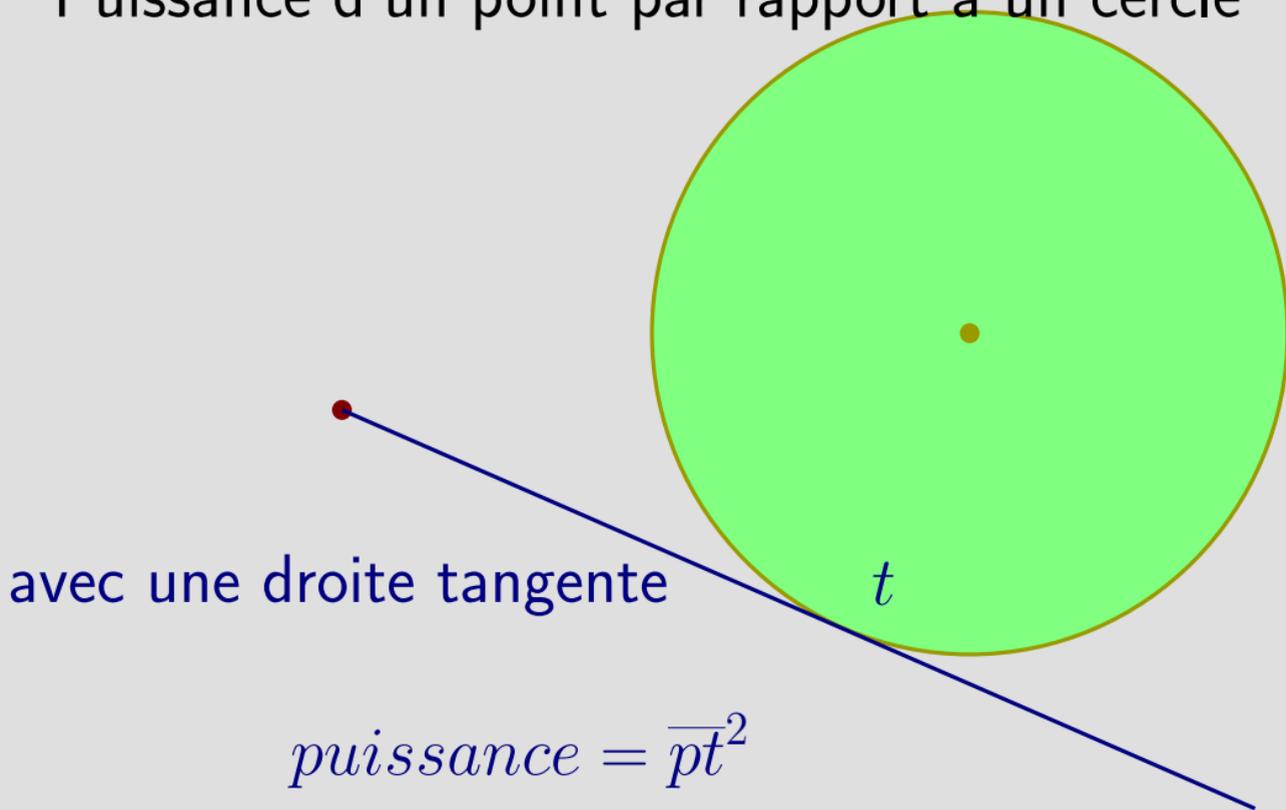
$$puissance = x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_p + c$$

# Puissance d'un point par rapport à un cercle



$$\text{puissance} = \overline{pq} \cdot \overline{pr}$$

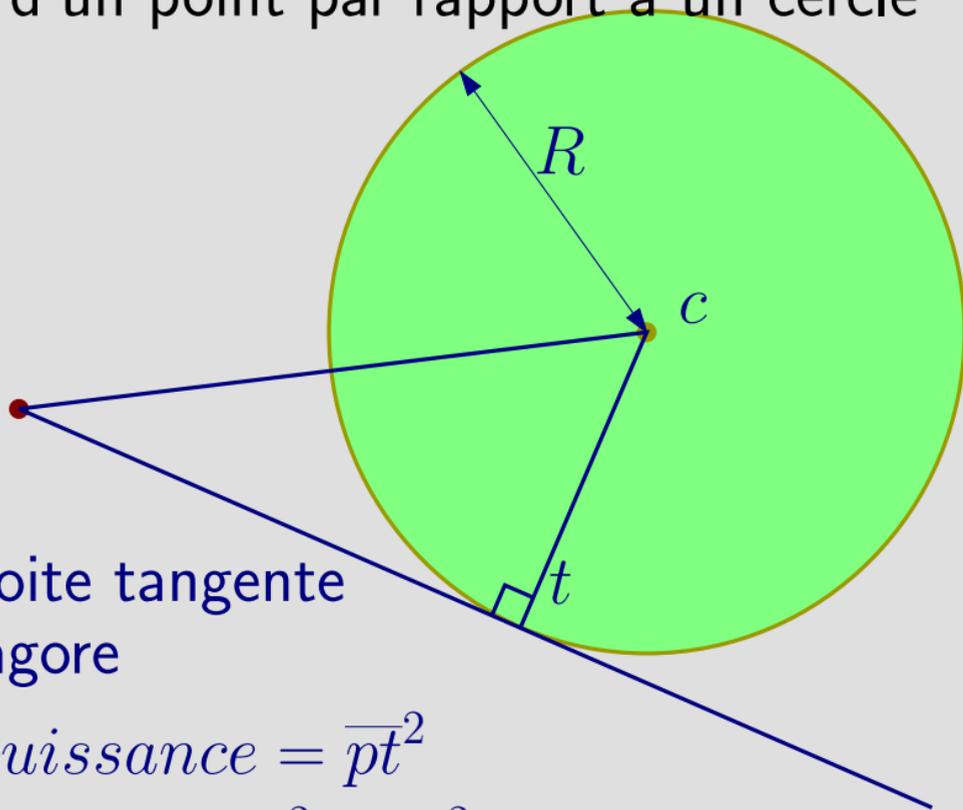
# Puissance d'un point par rapport à un cercle



avec une droite tangente

$$puissance = \overline{pt}^2$$

# Puissance d'un point par rapport à un cercle



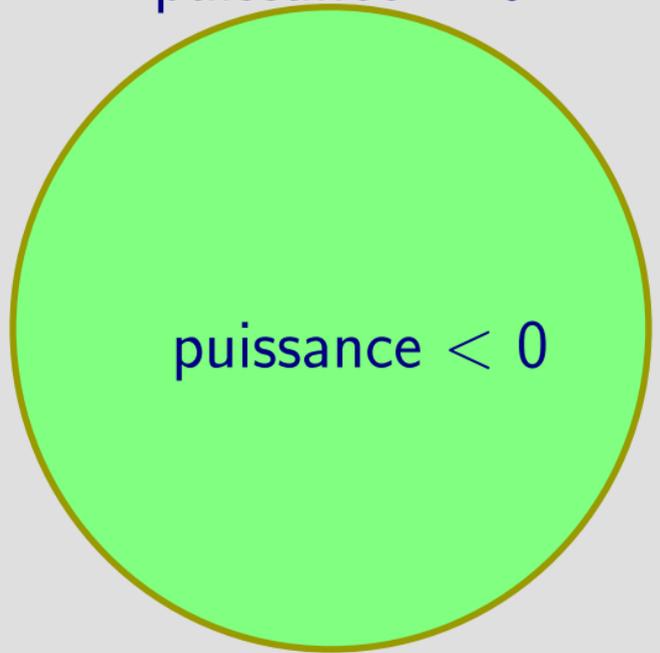
avec une droite tangente  
et Pythagore

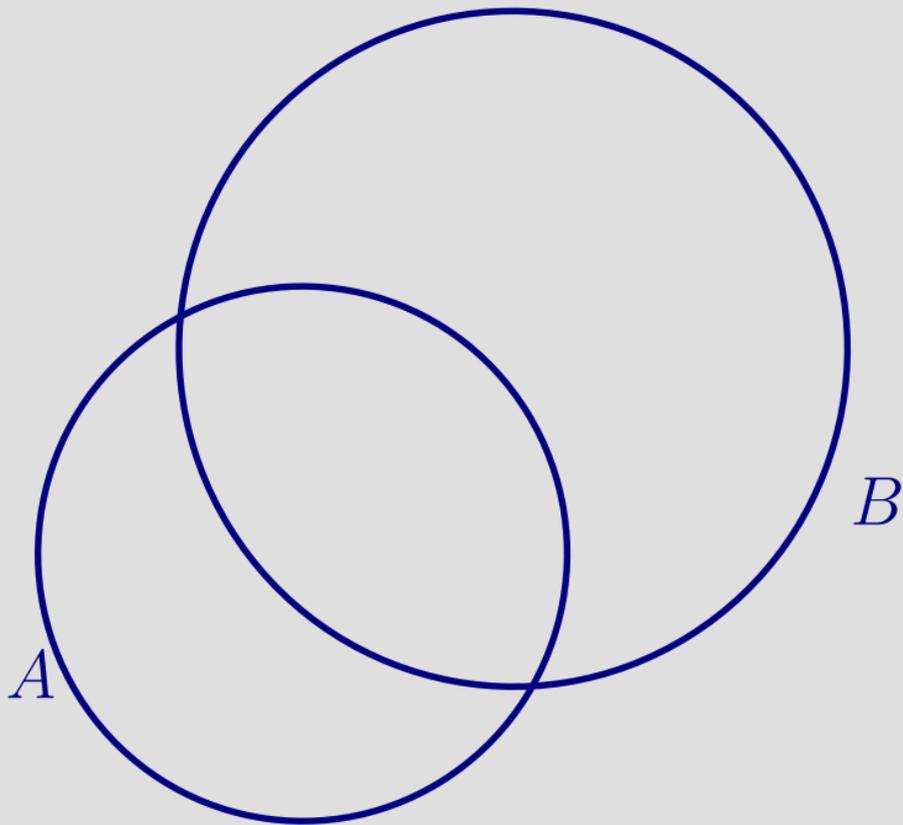
$$\begin{aligned} \text{puissance} &= \overline{pt}^2 \\ &= \overline{pc}^2 - R^2 \end{aligned}$$

puissance = 0

puissance > 0

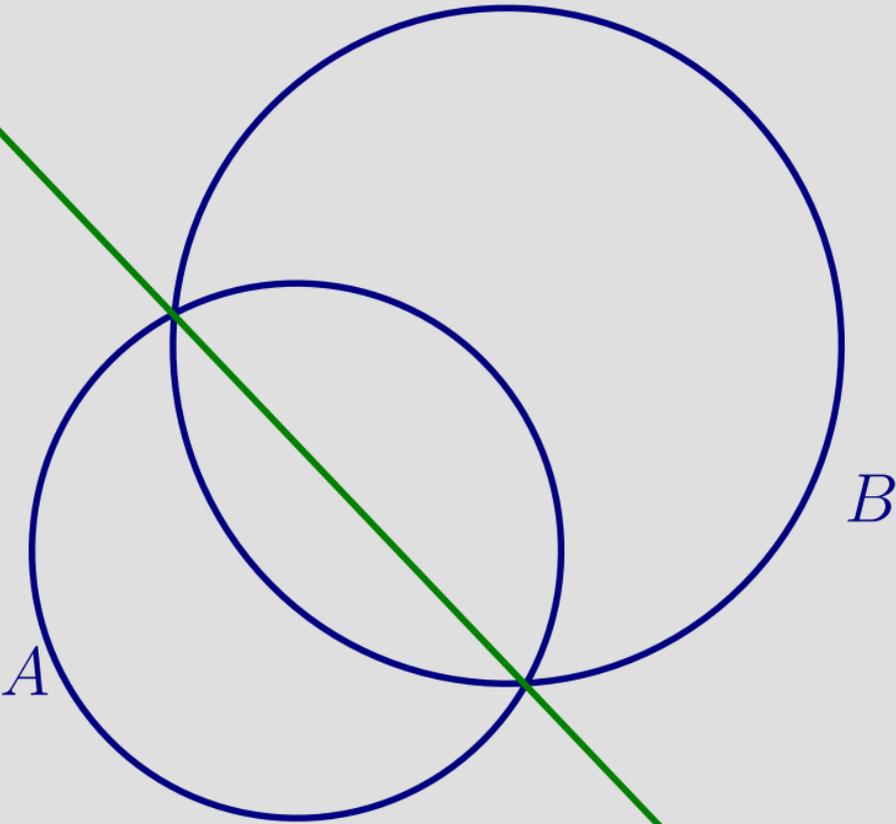
puissance < 0





puissance  $A <$  puissance  $B$

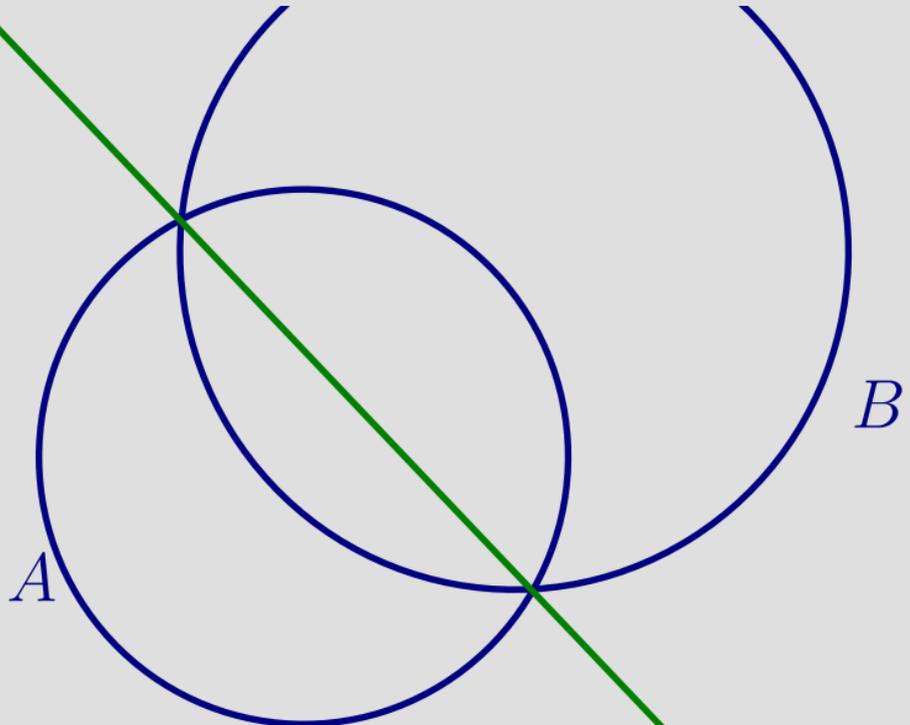
axe radical



puissance  $A <$  puissance  $B$

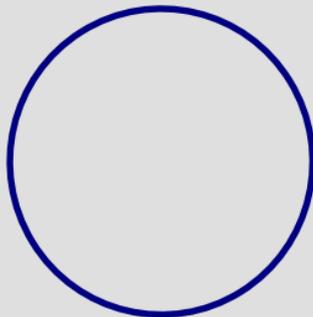
axe radical

puissance  $A >$  puissance  $B$

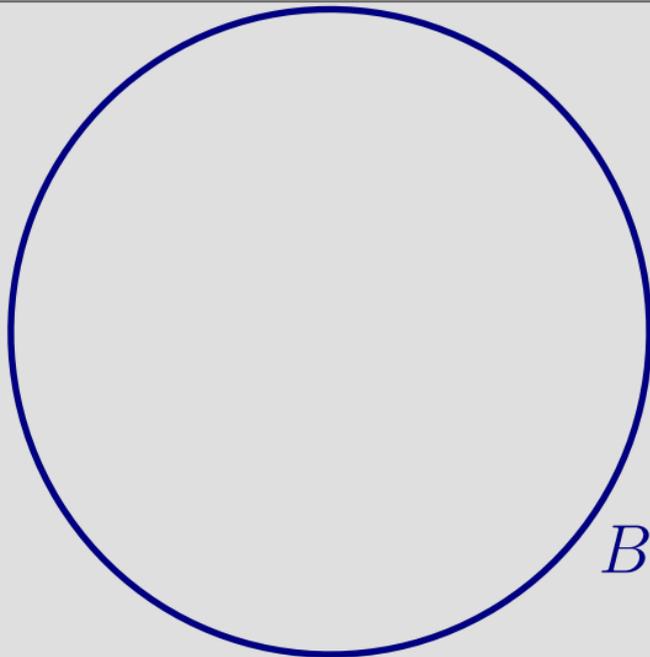


puissance  $A <$  puissance  $B$

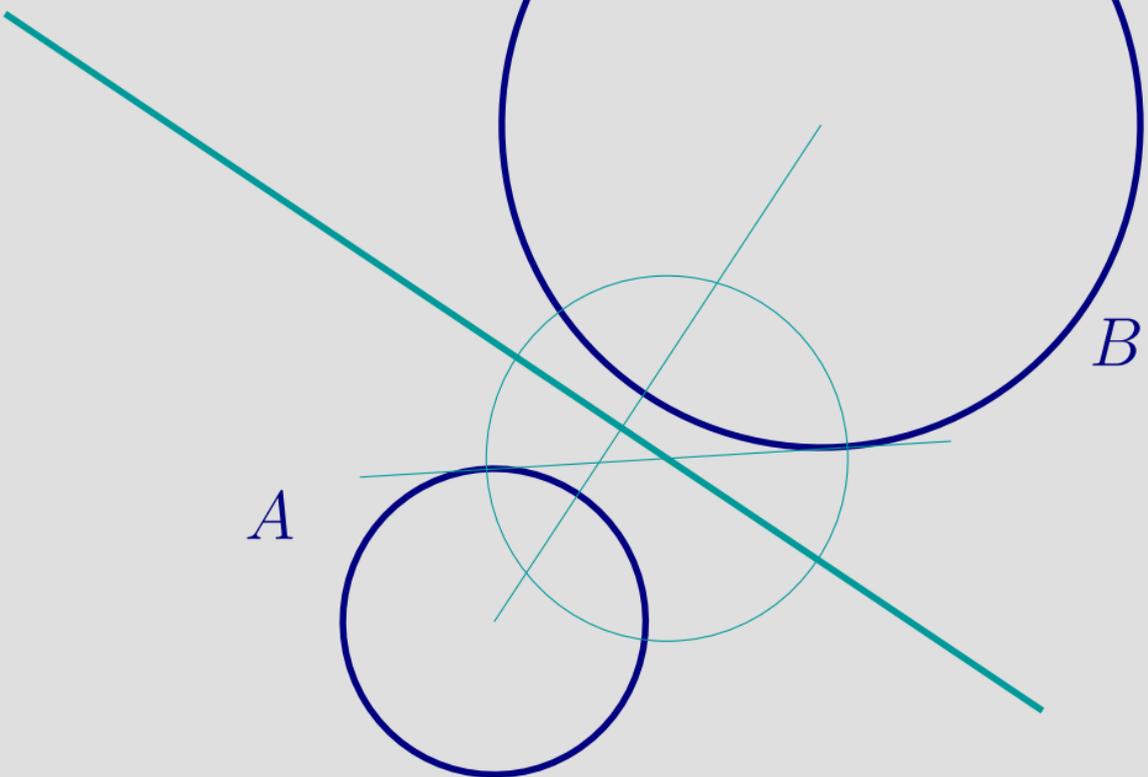
*A*



*B*



axe radical



*A*

*B*

axe radical

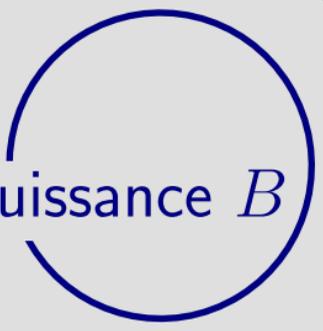
puissance  $A >$  puissance  $B$

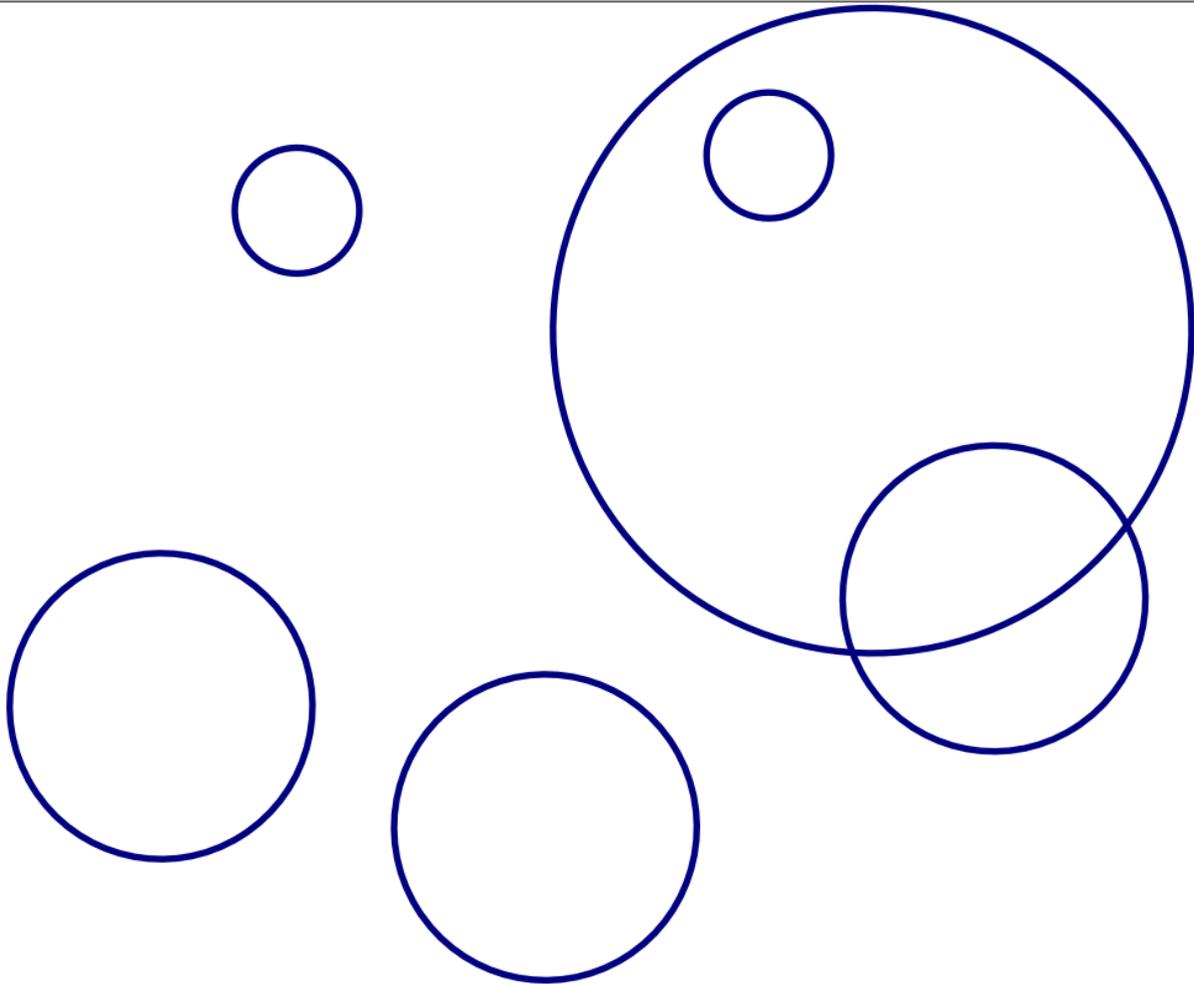


$B$

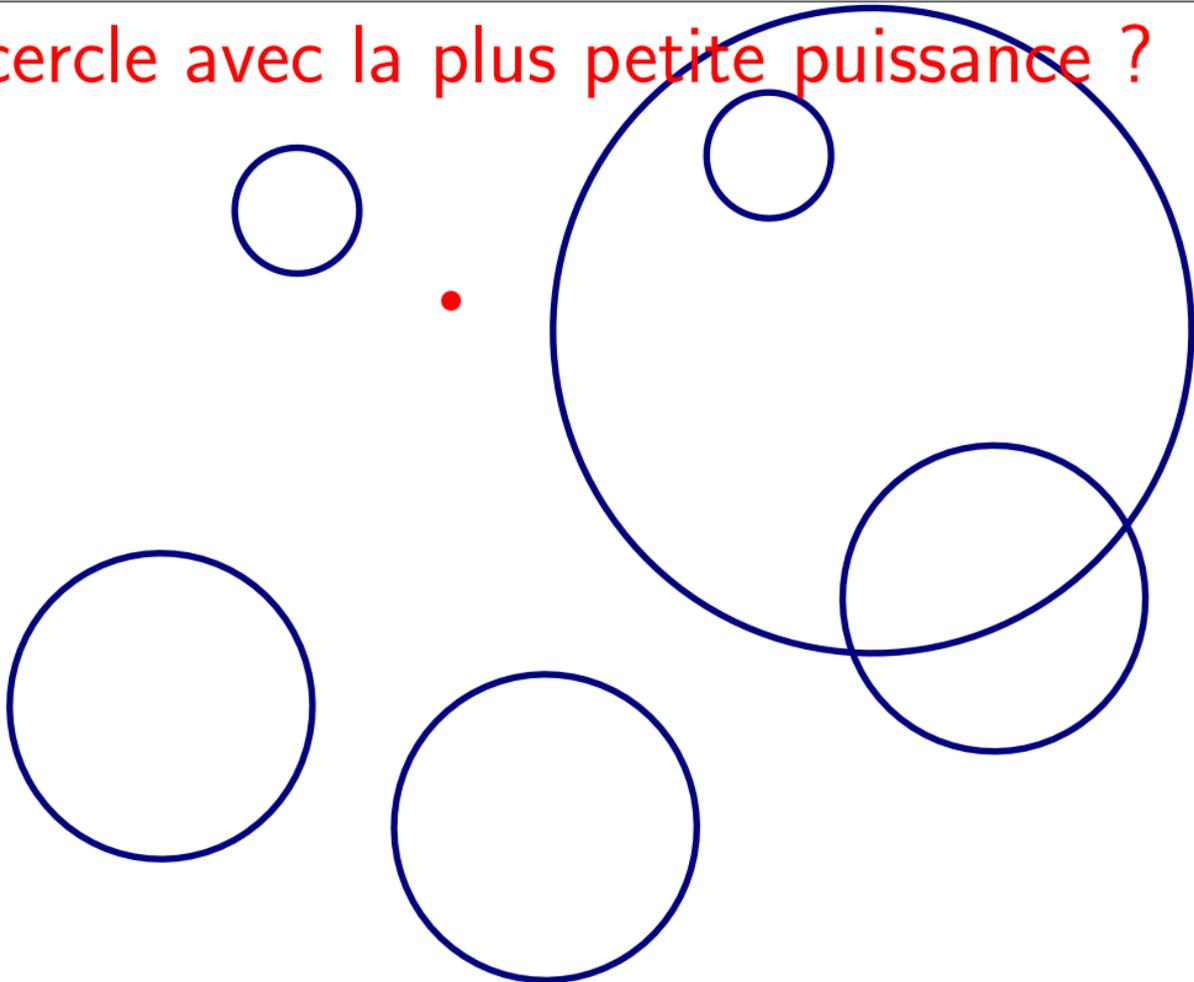
$A$

puissance  $A <$  puissance  $B$

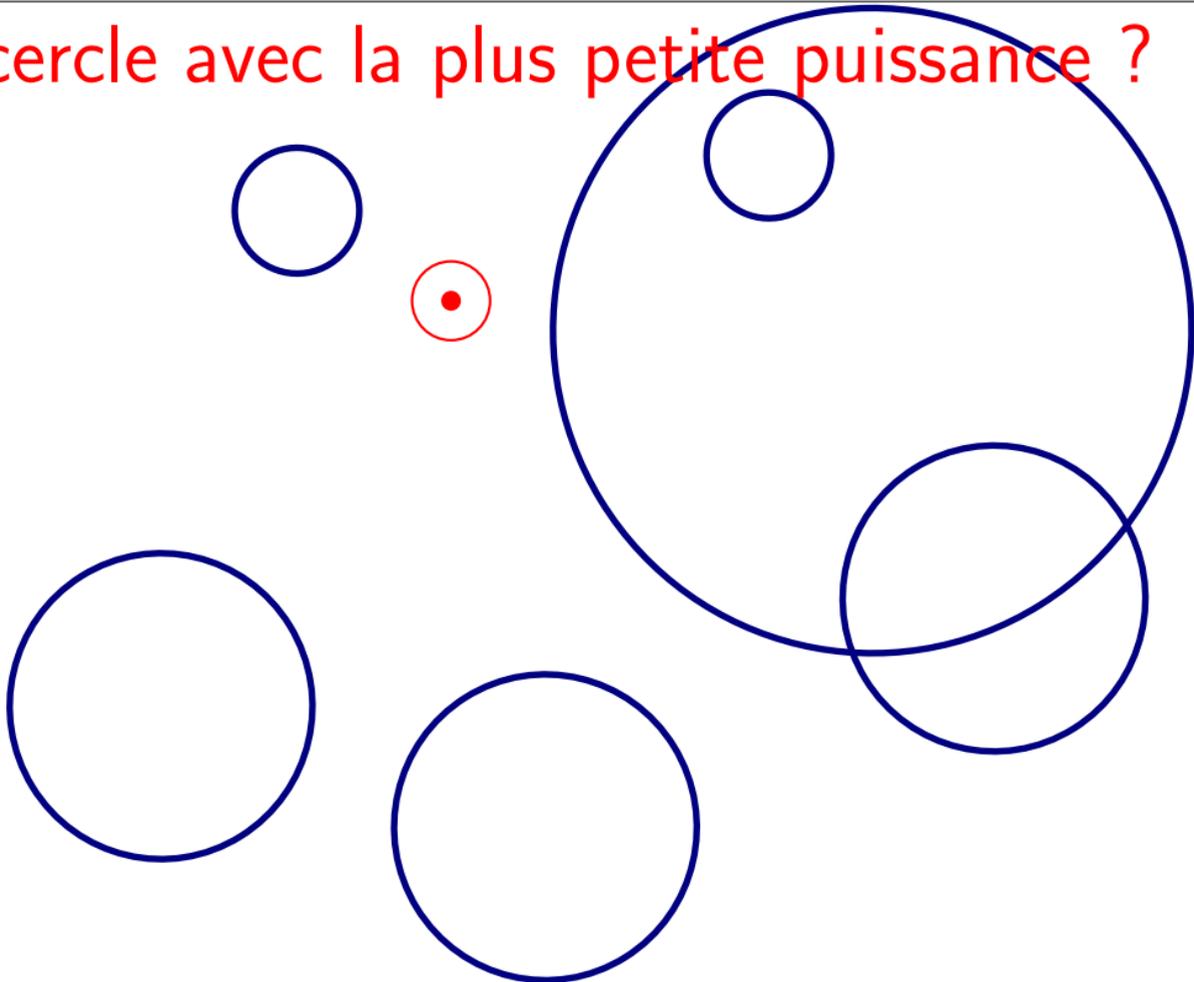




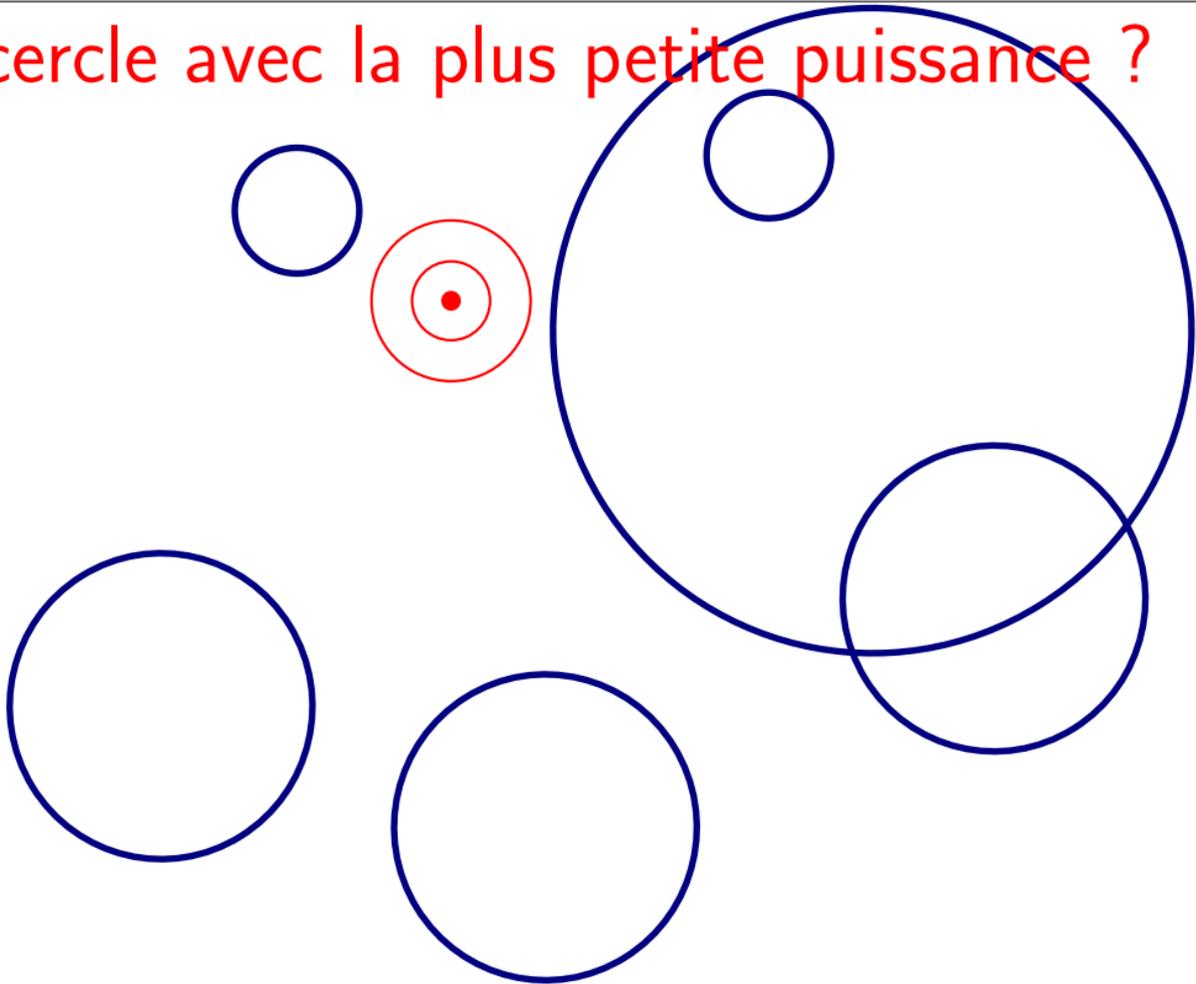
cercle avec la plus petite puissance ?



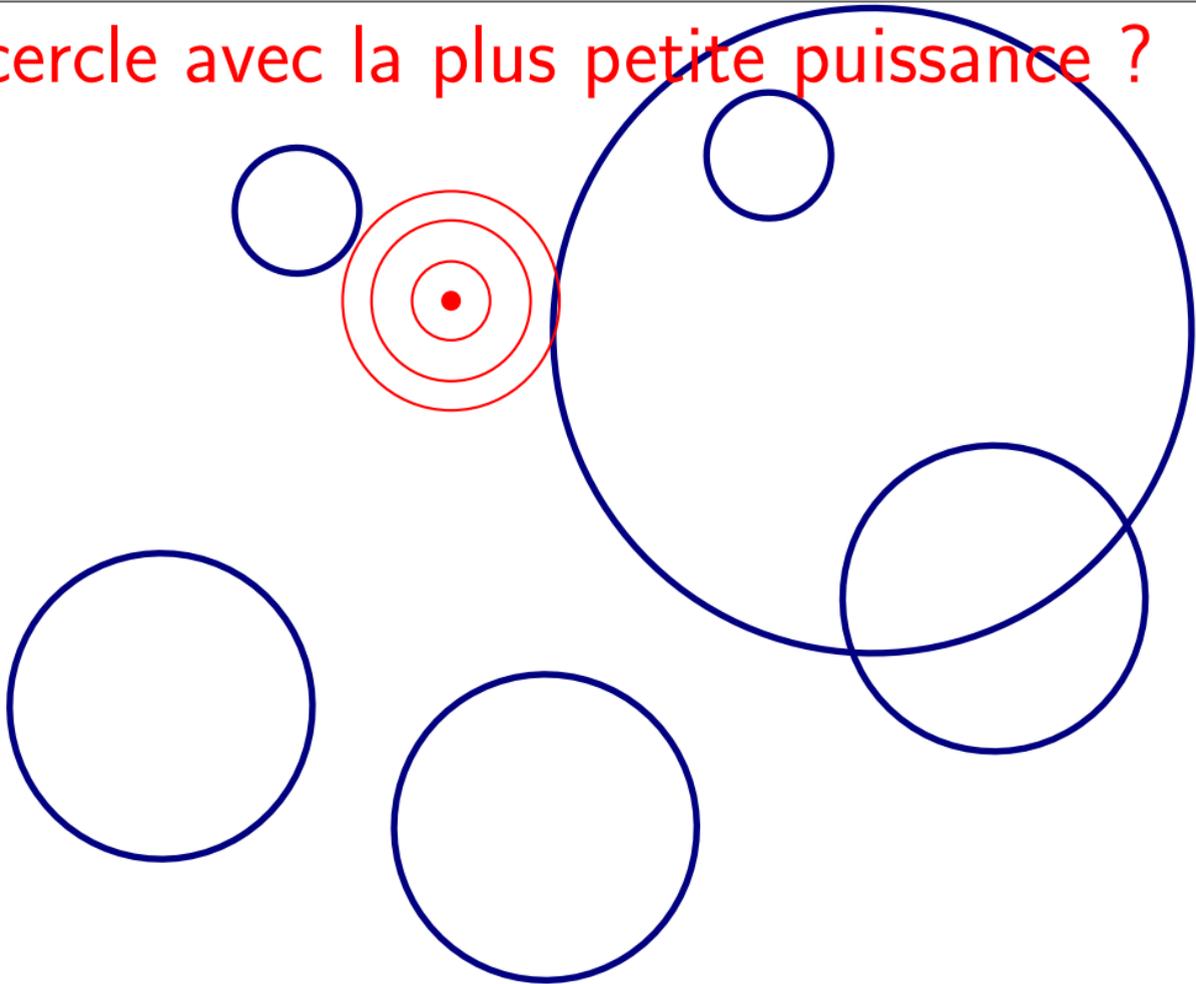
cercle avec la plus petite puissance ?



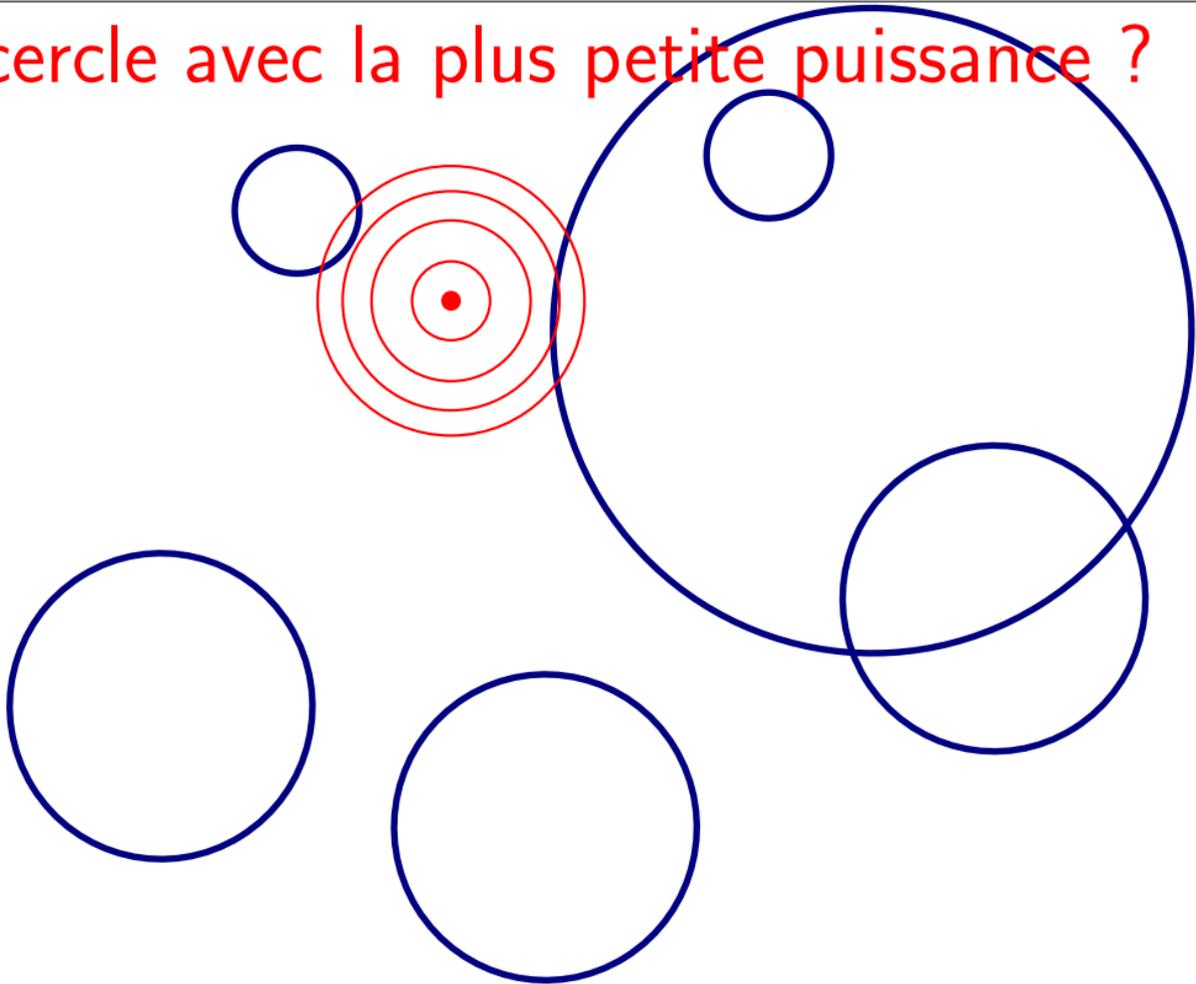
cercle avec la plus petite puissance ?



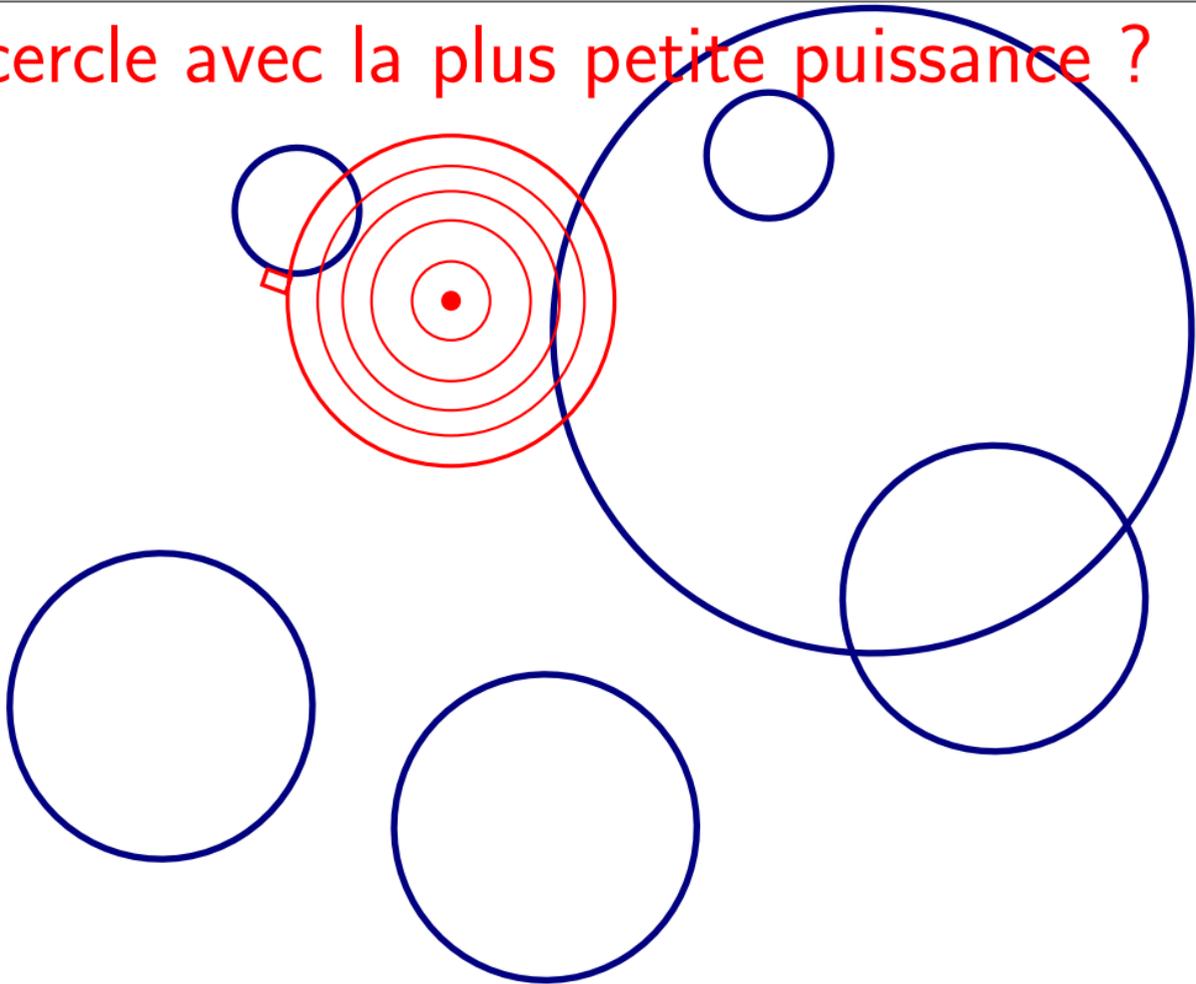
cercle avec la plus petite puissance ?



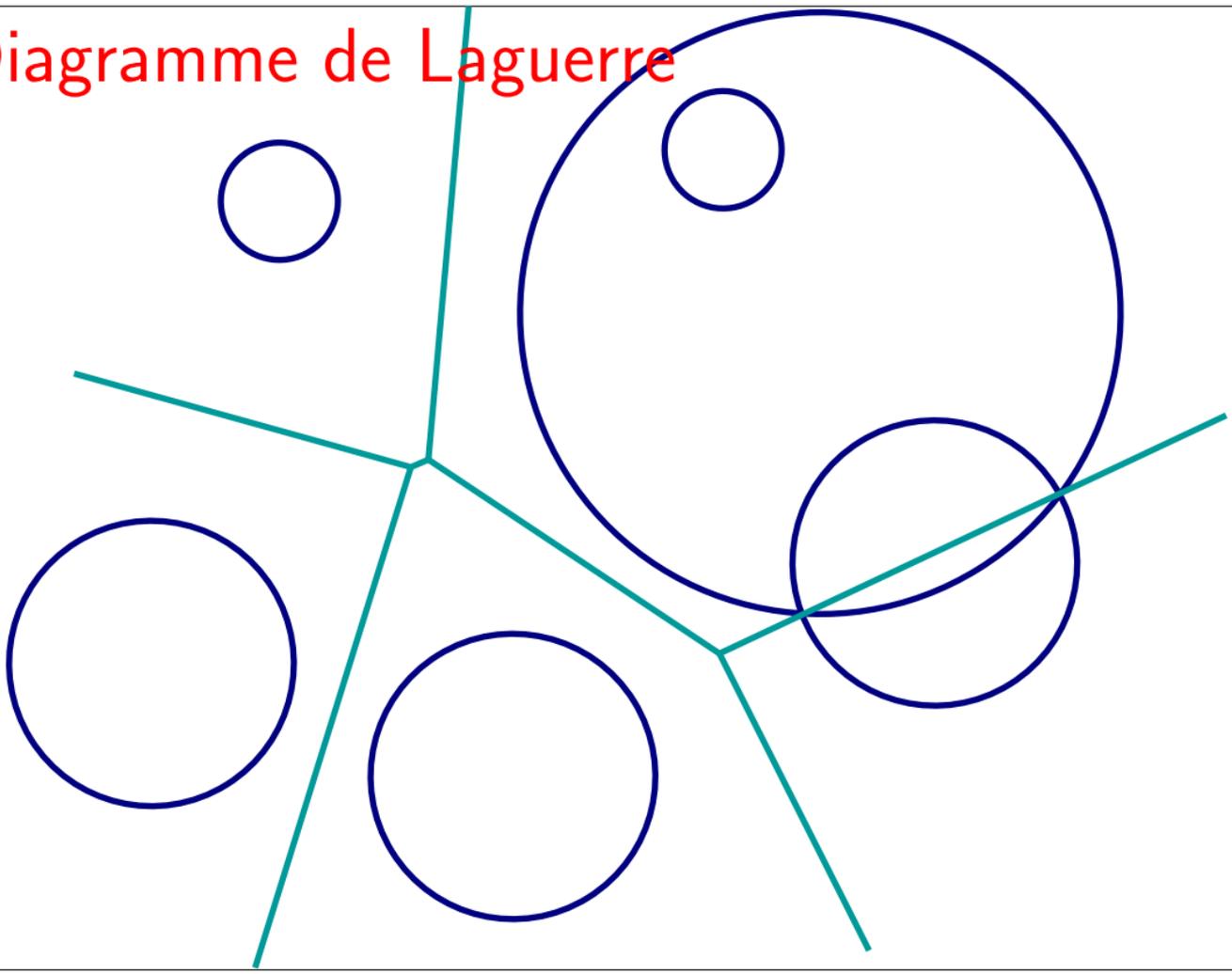
cercle avec la plus petite puissance ?



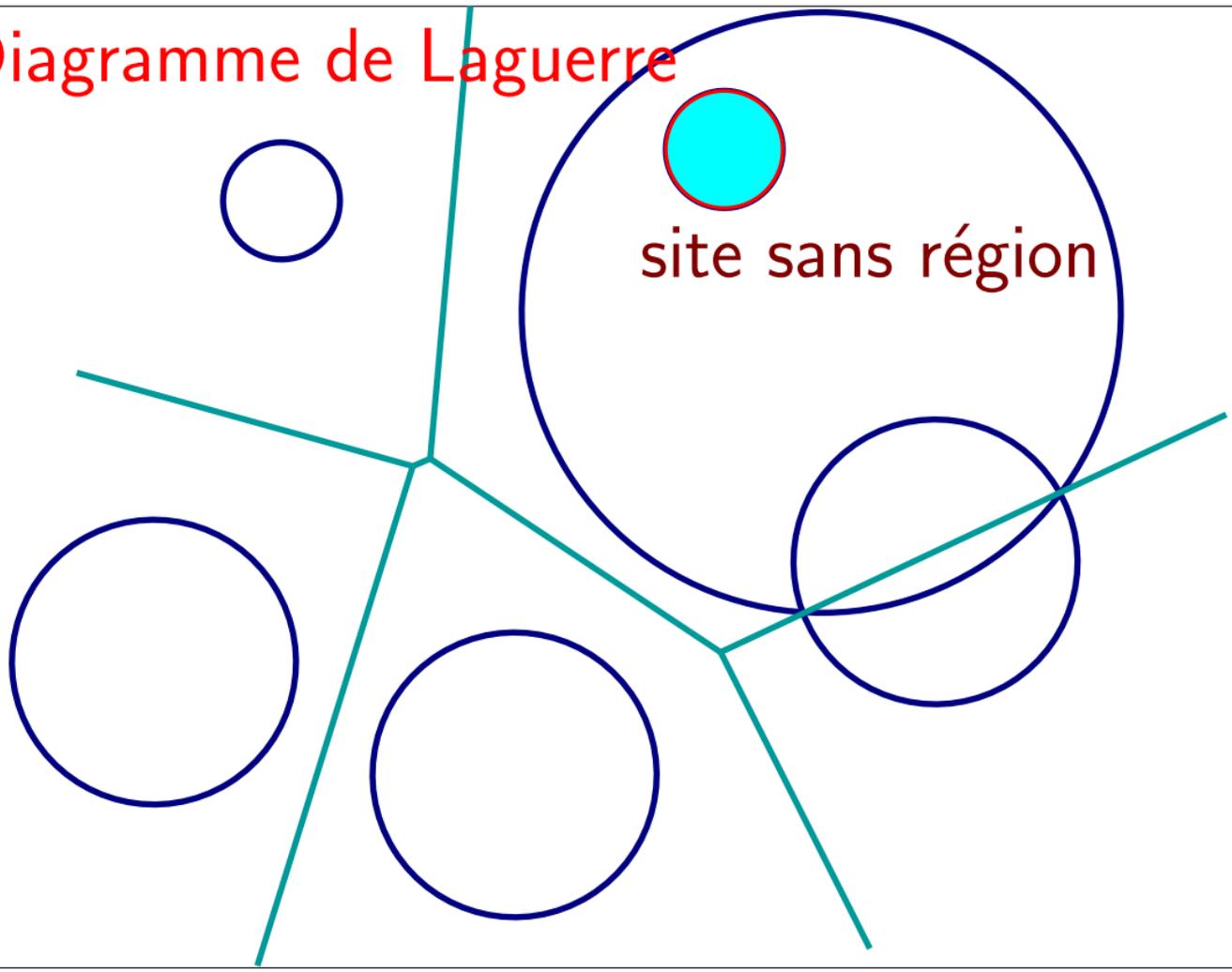
cercle avec la plus petite puissance ?



# Diagramme de Laguerre

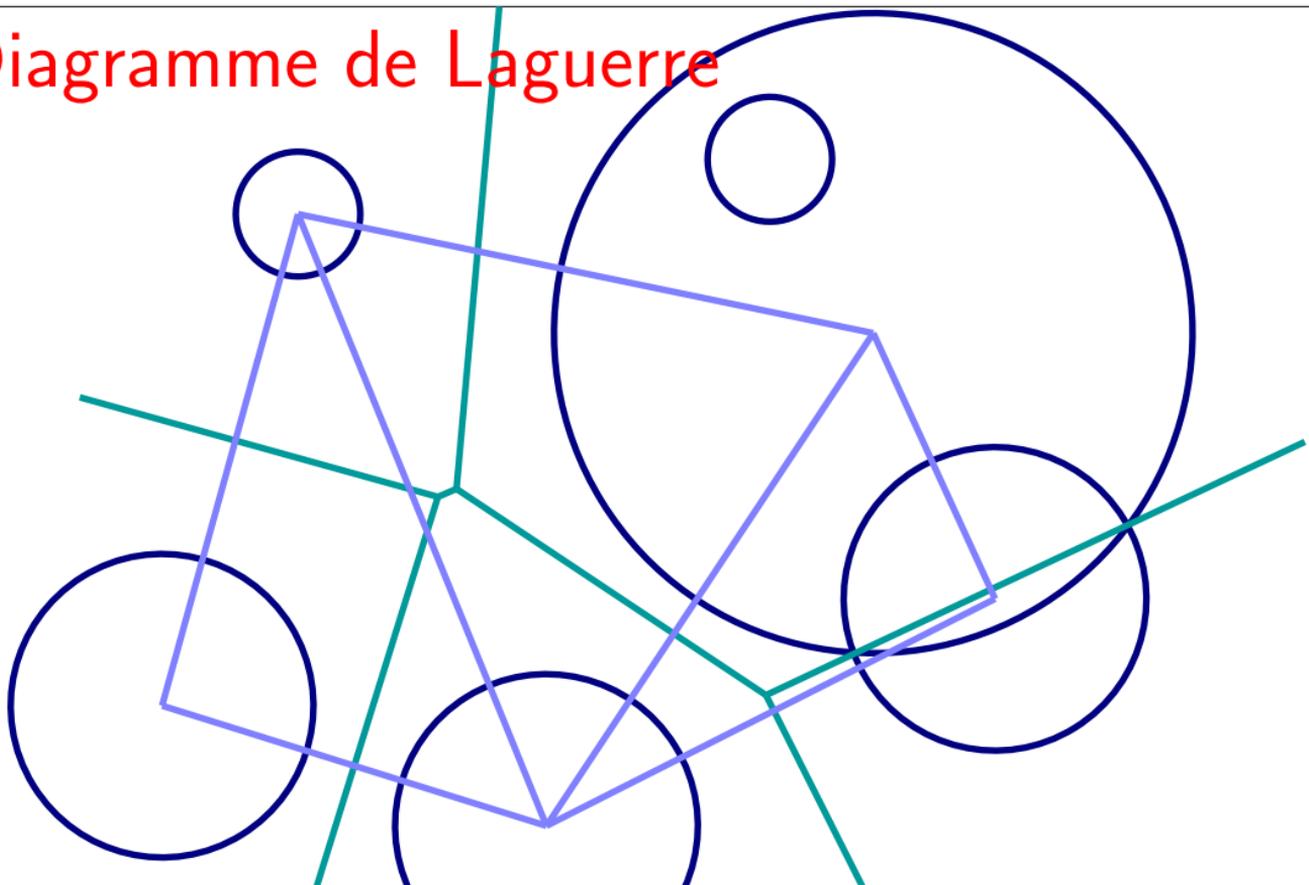


# Diagramme de Laguerre

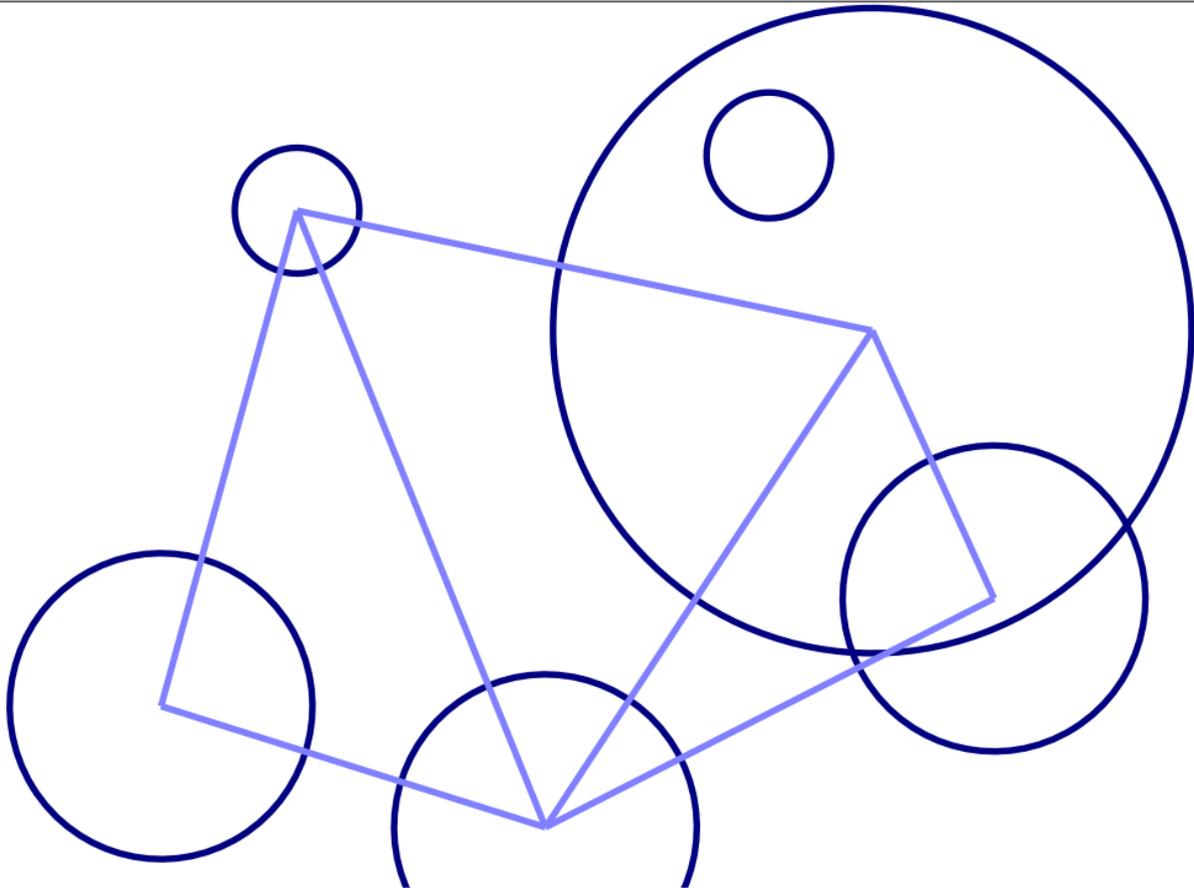


site sans région

# Diagramme de Laguerre

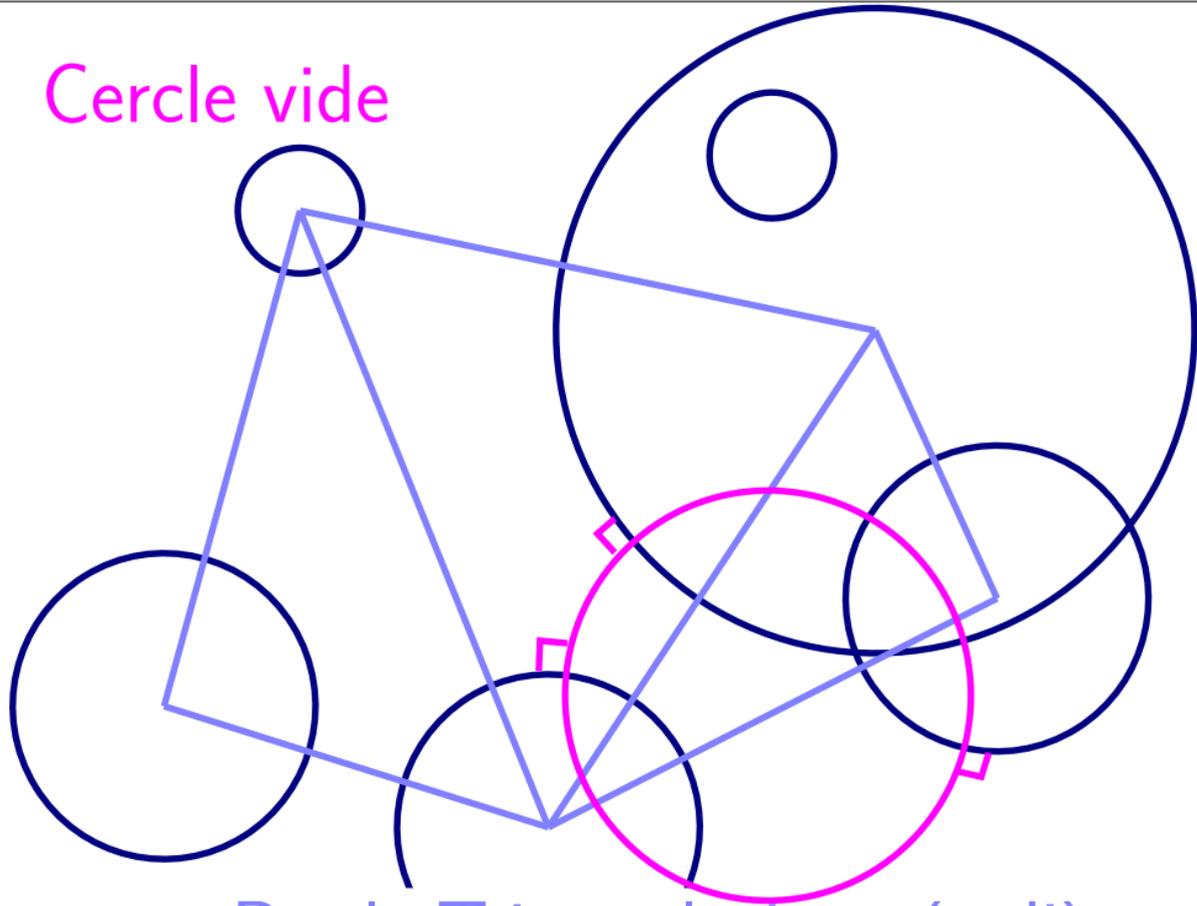


Dual: Triangulation régulière



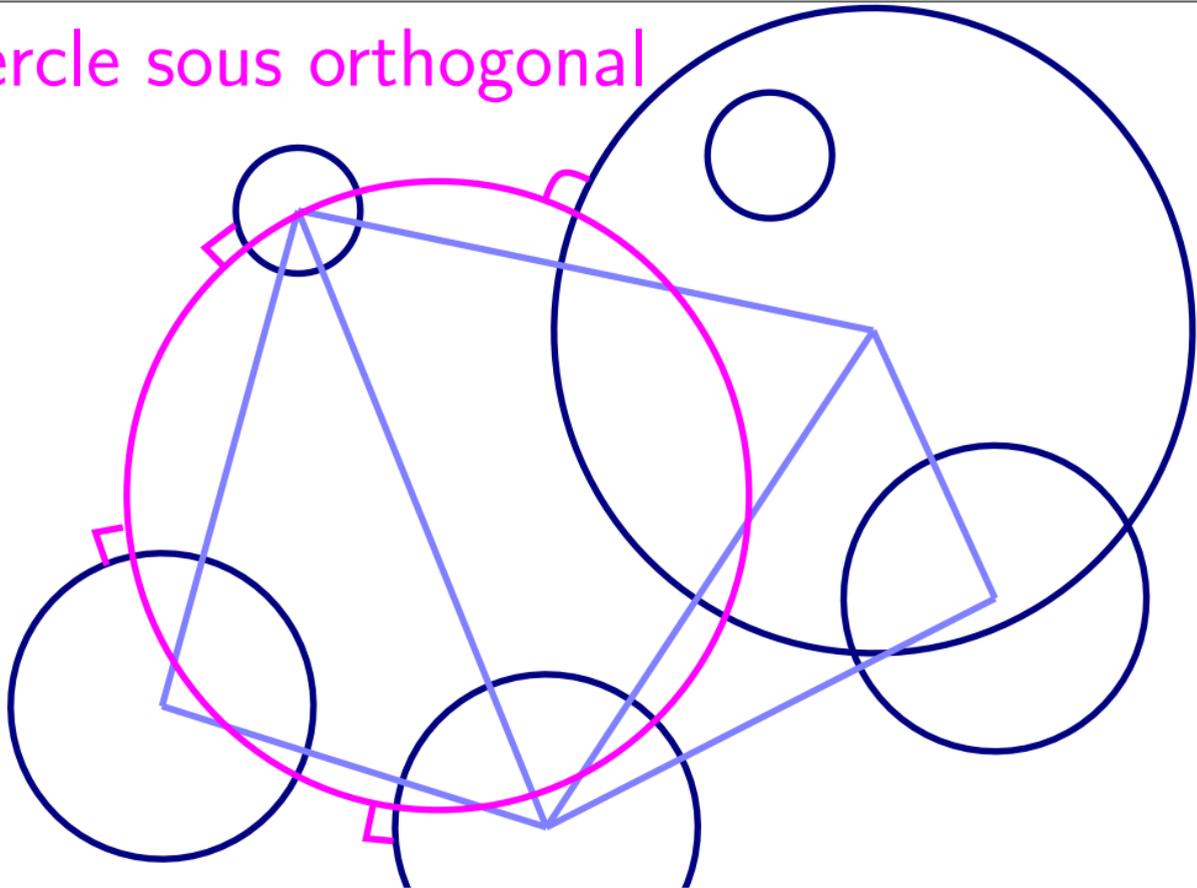
Dual: Triangulation régulière

Cercle vide



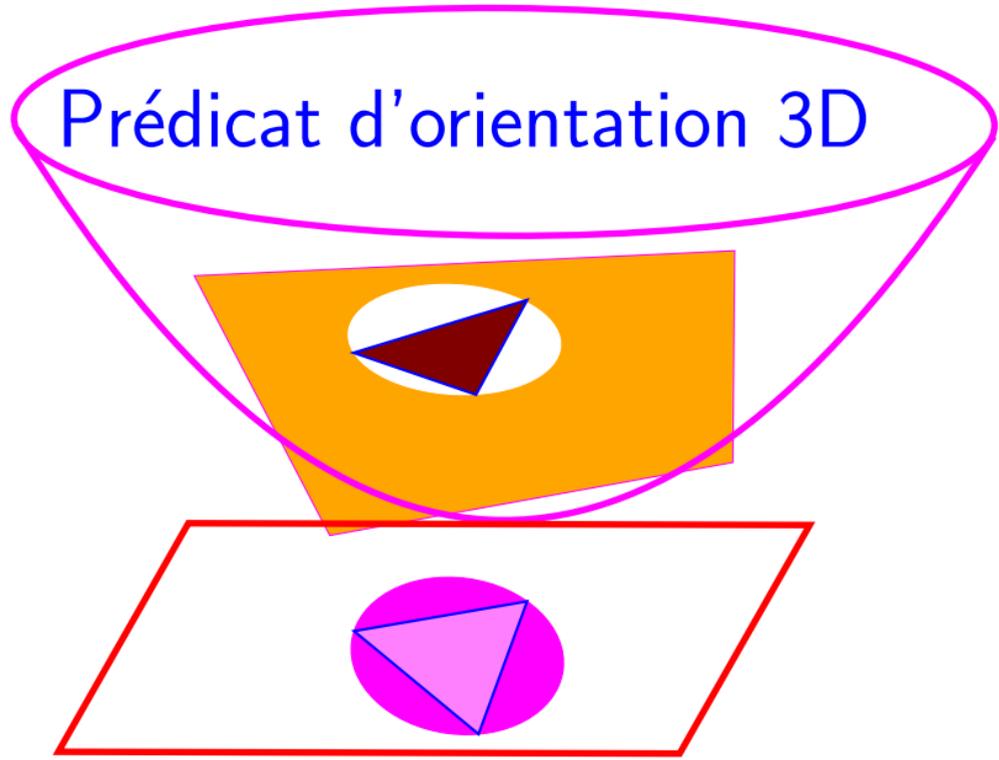
Dual: Triangulation régulière

Cercle sous orthogonal



Dual: Triangulation régulière

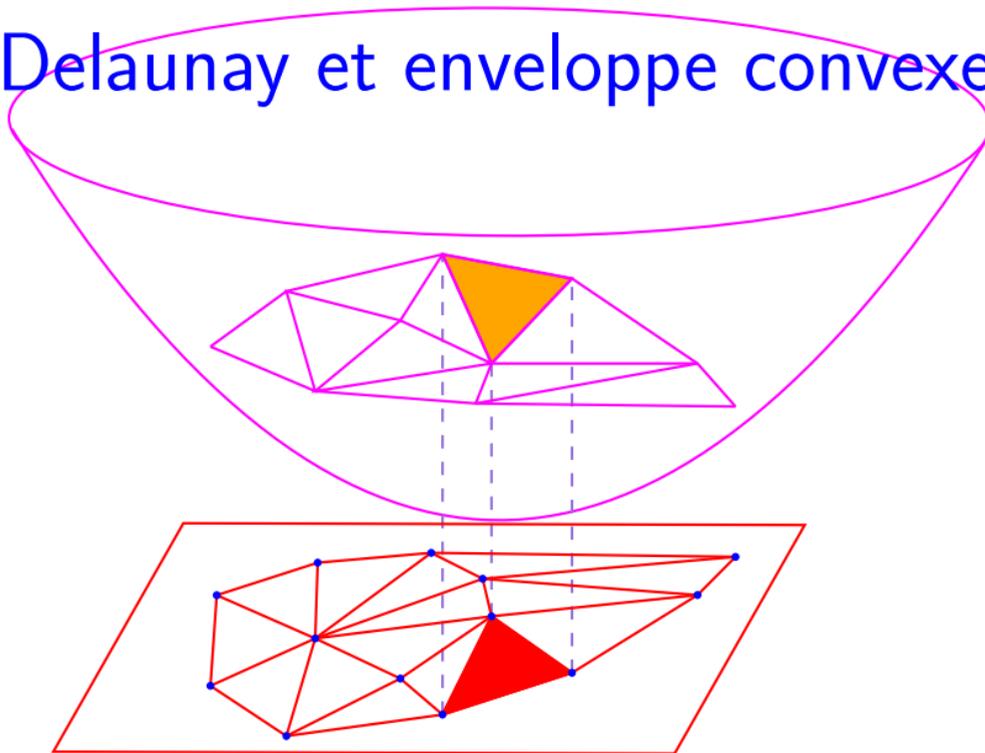
# Rappel



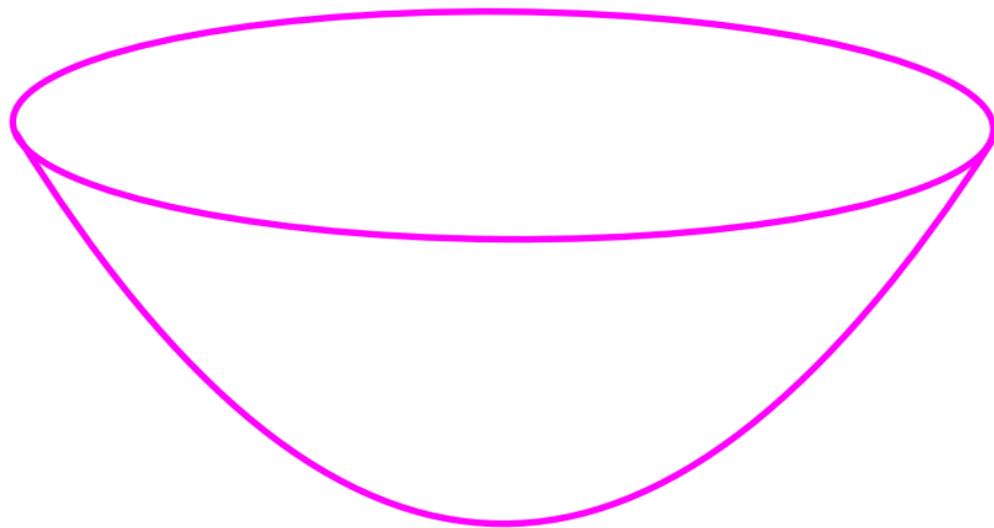
Prédicat de cocyclicité

# Rappel

## Delaunay et enveloppe convexe

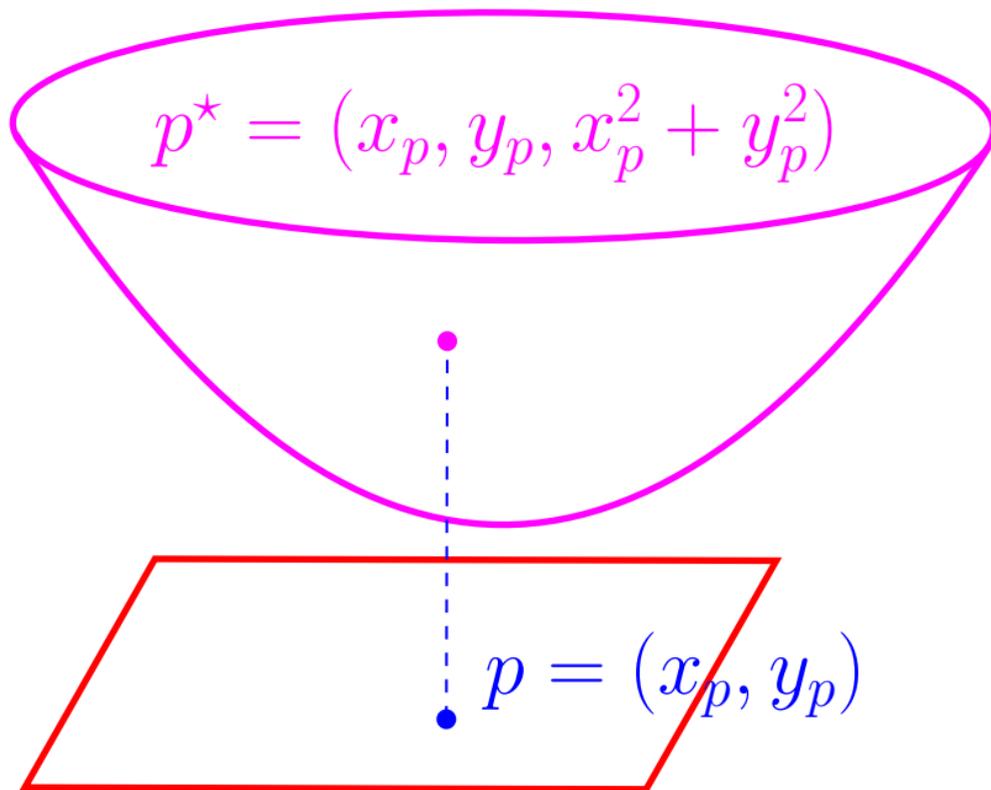


# Rappel

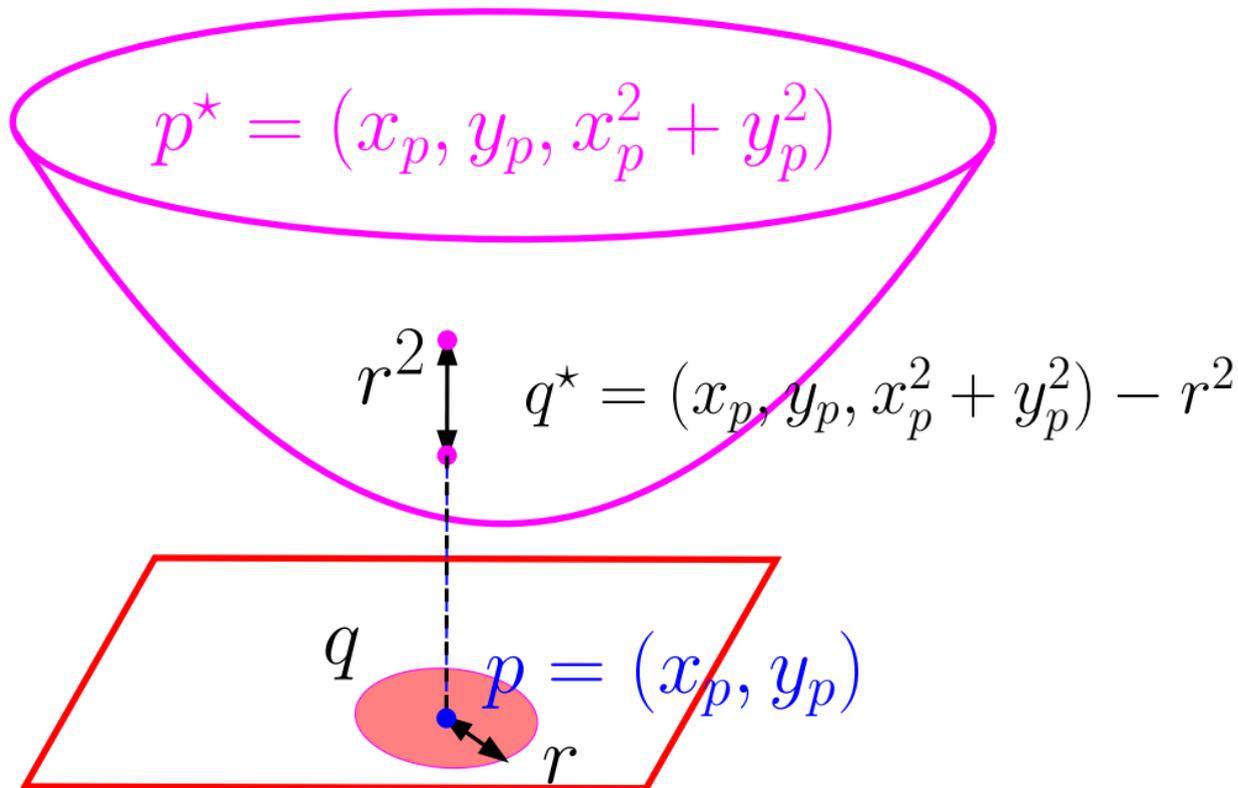


$$\Pi : x^2 + y^2 = z$$

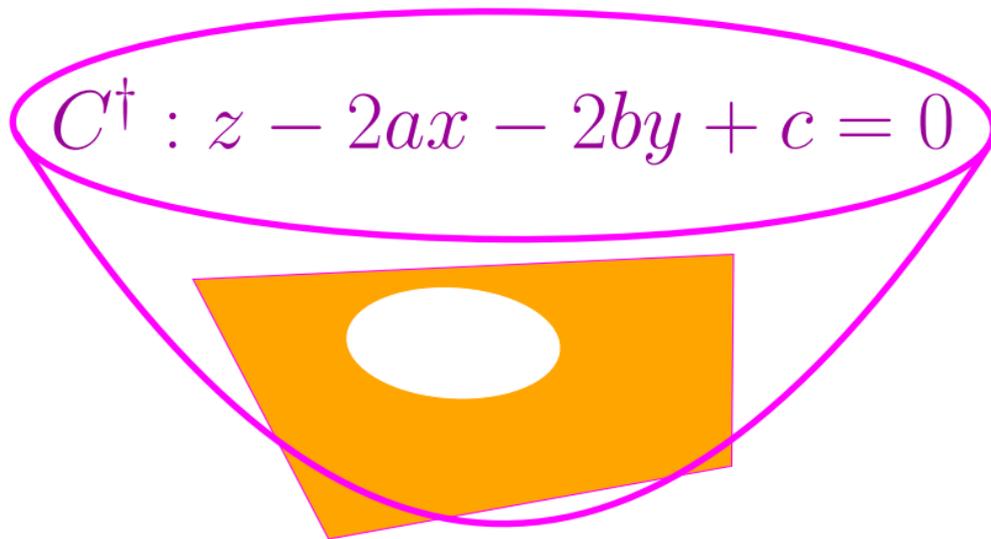
# Rappel



# Rappel

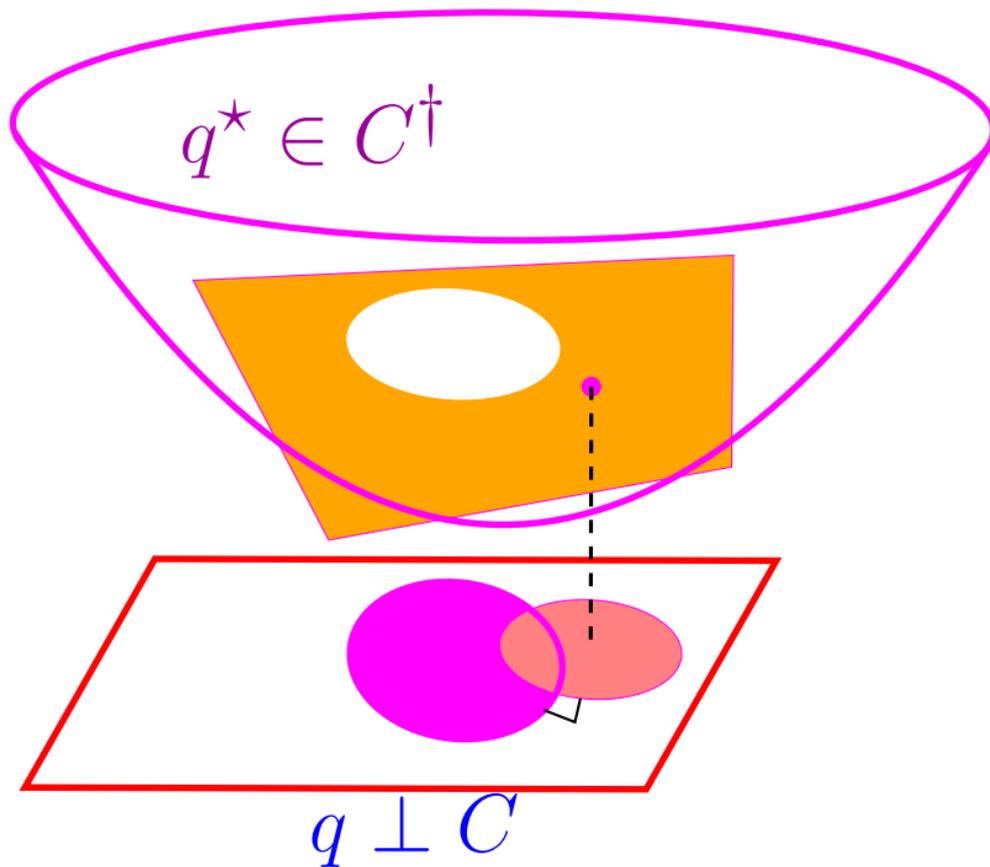


# Rappel

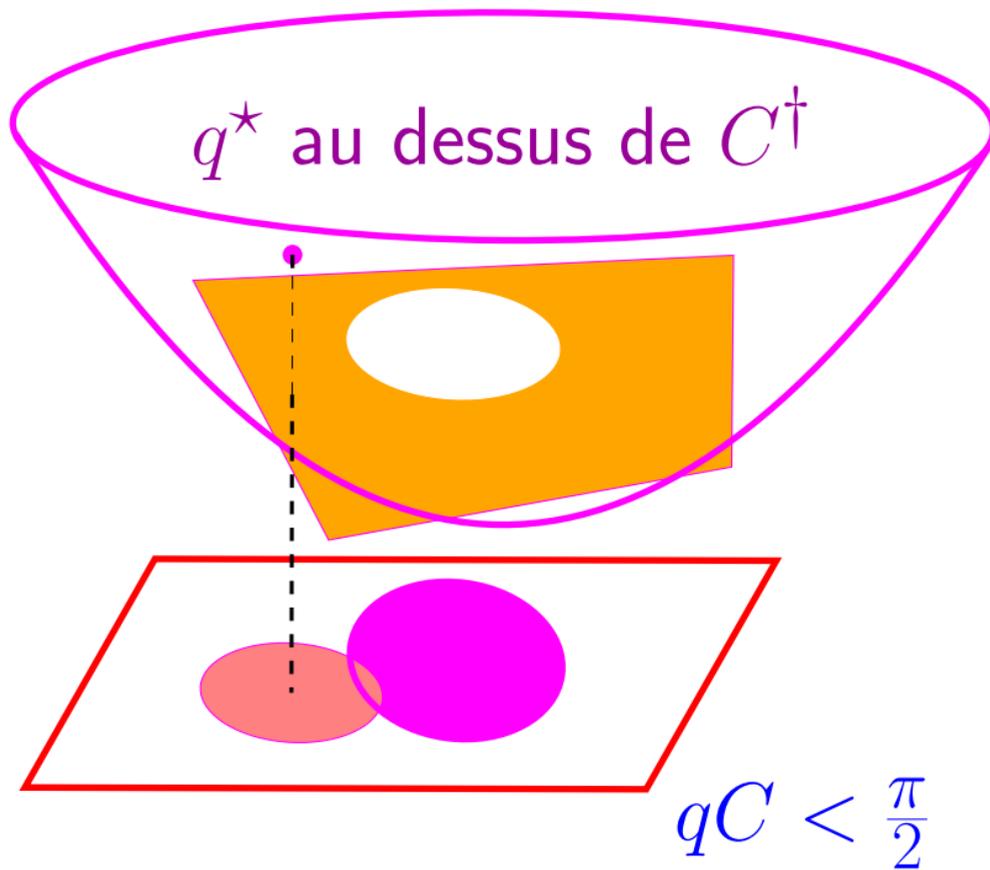


$$C : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

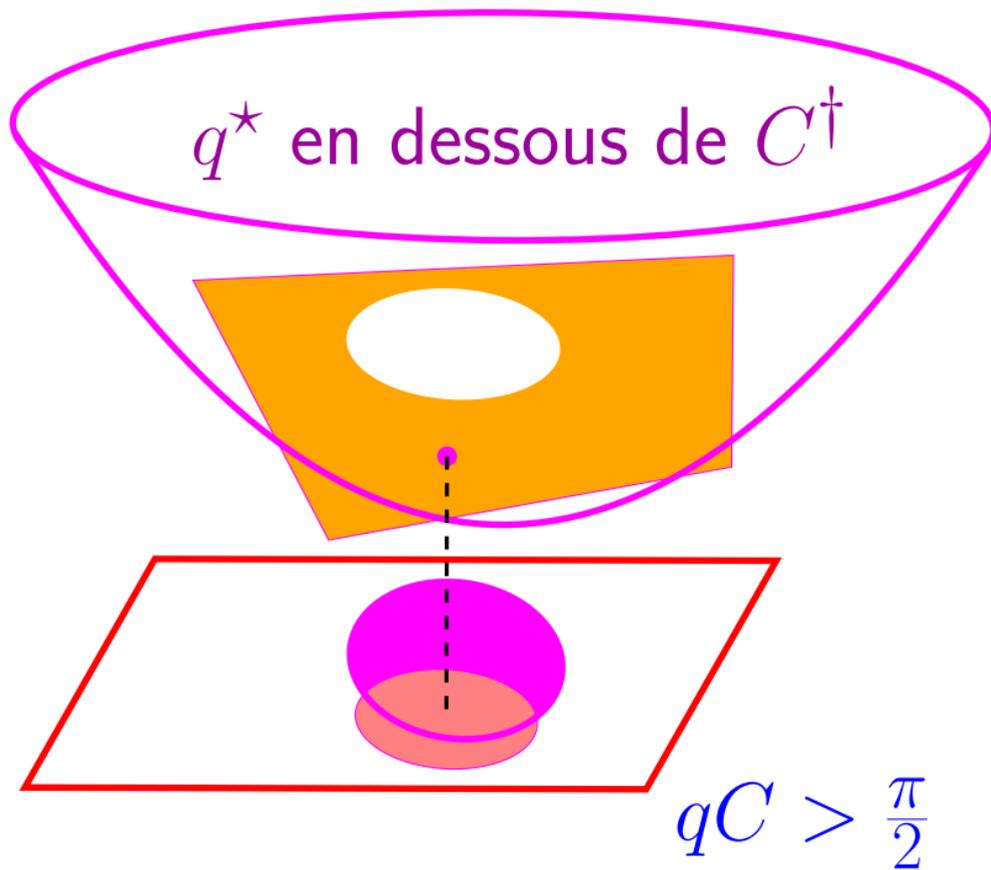
# Rappel



# Rappel

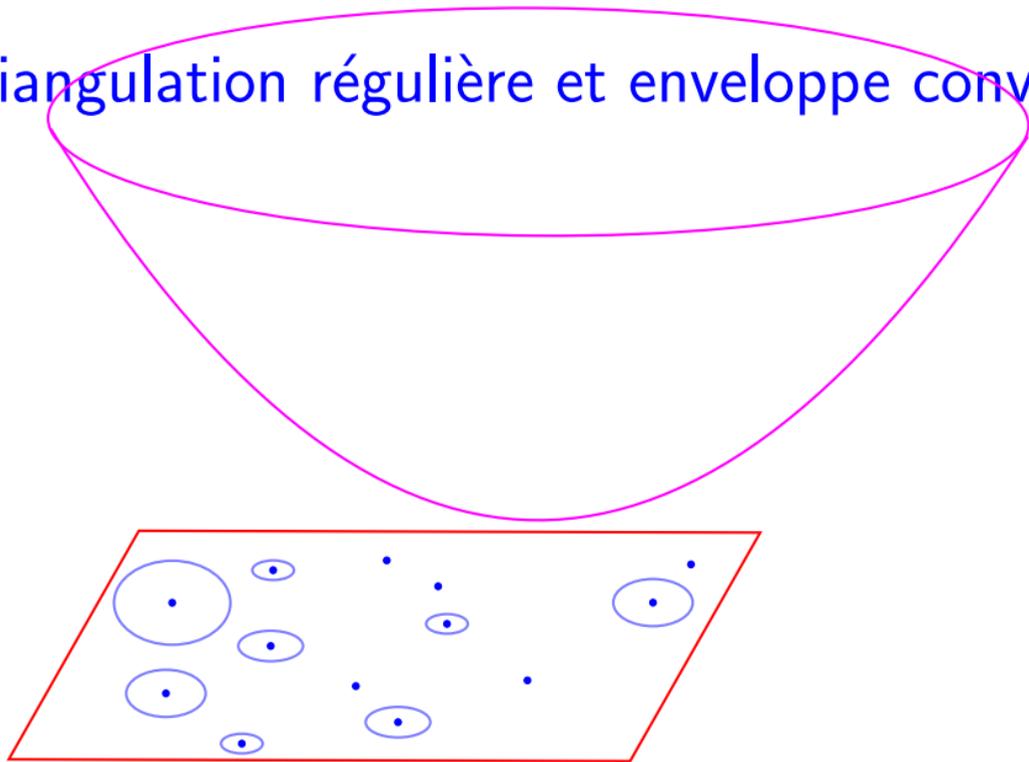


# Rappel



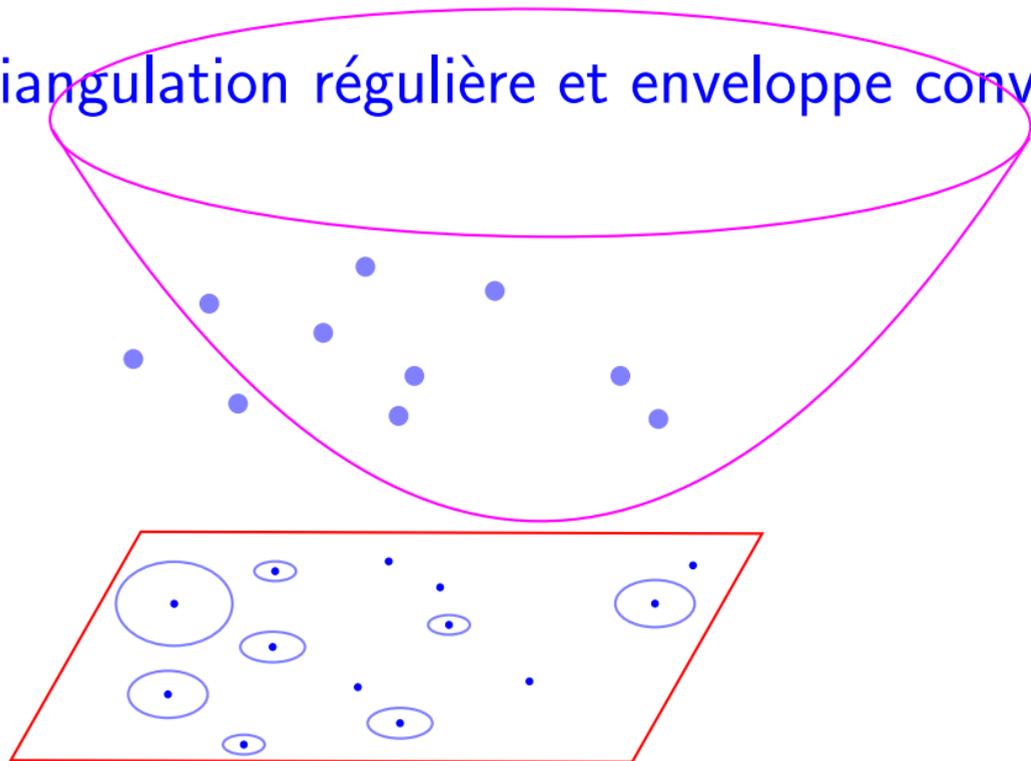
# Rappel

Triangulation régulière et enveloppe convexe



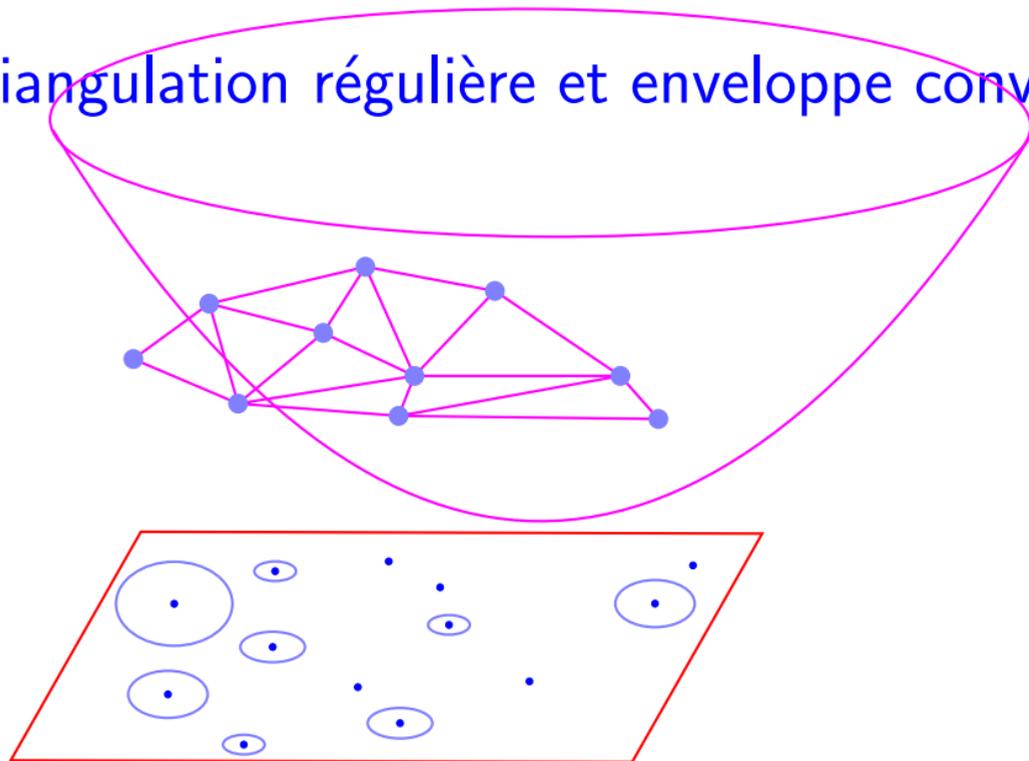
# Rappel

Triangulation régulière et enveloppe convexe



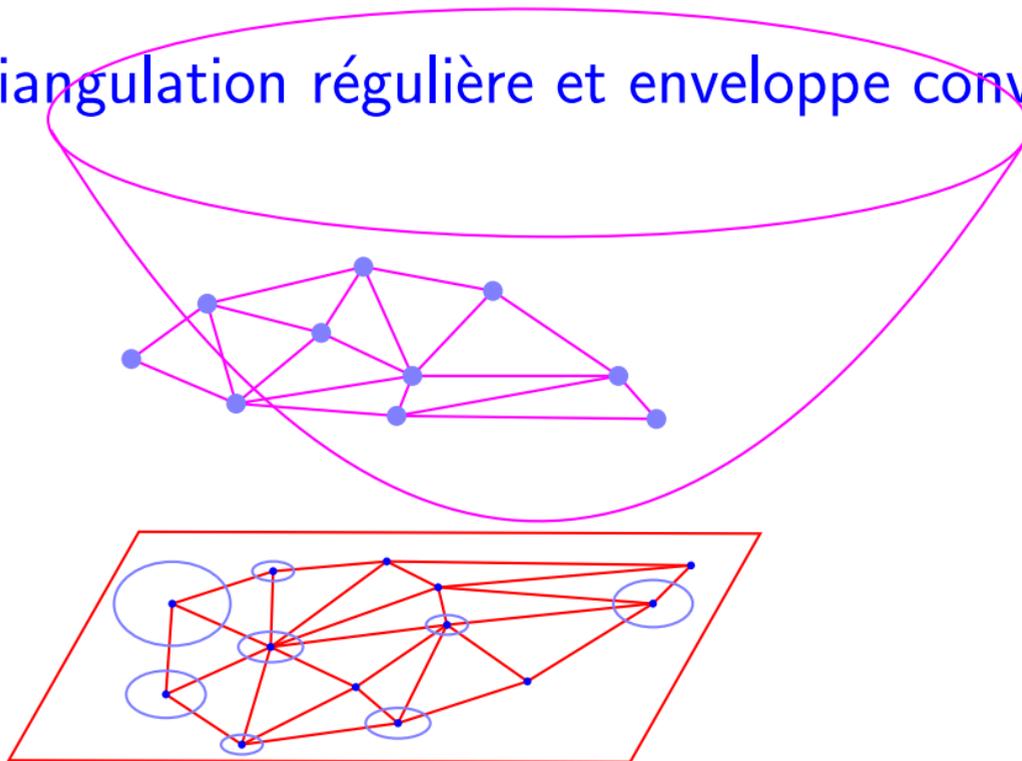
# Rappel

Triangulation régulière et enveloppe convexe



# Rappel

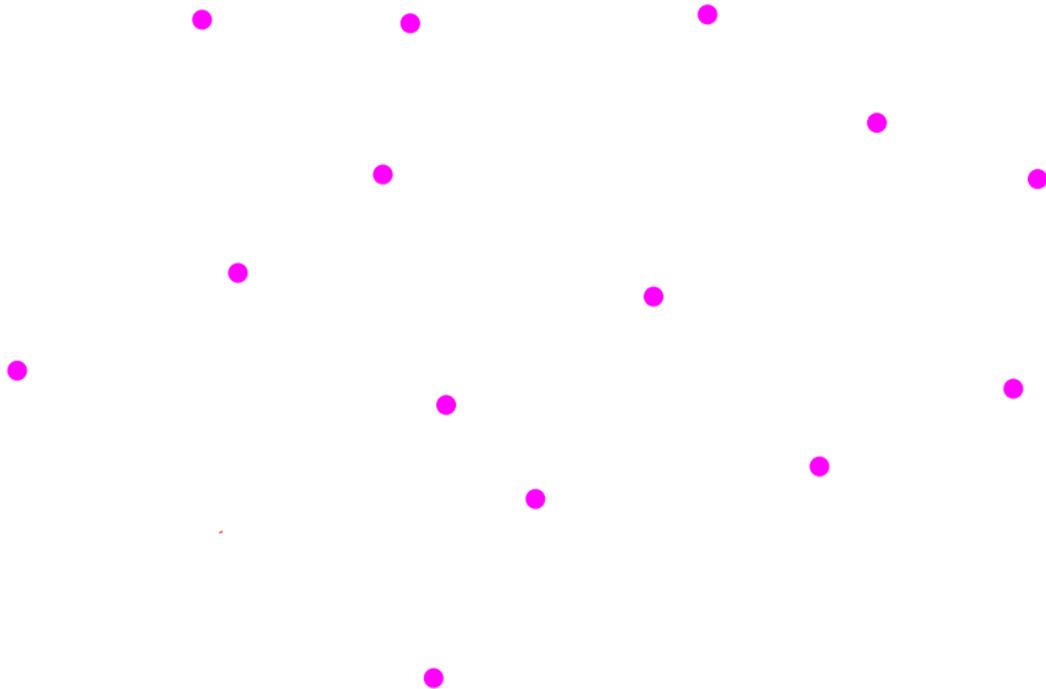
Triangulation régulière et enveloppe convexe





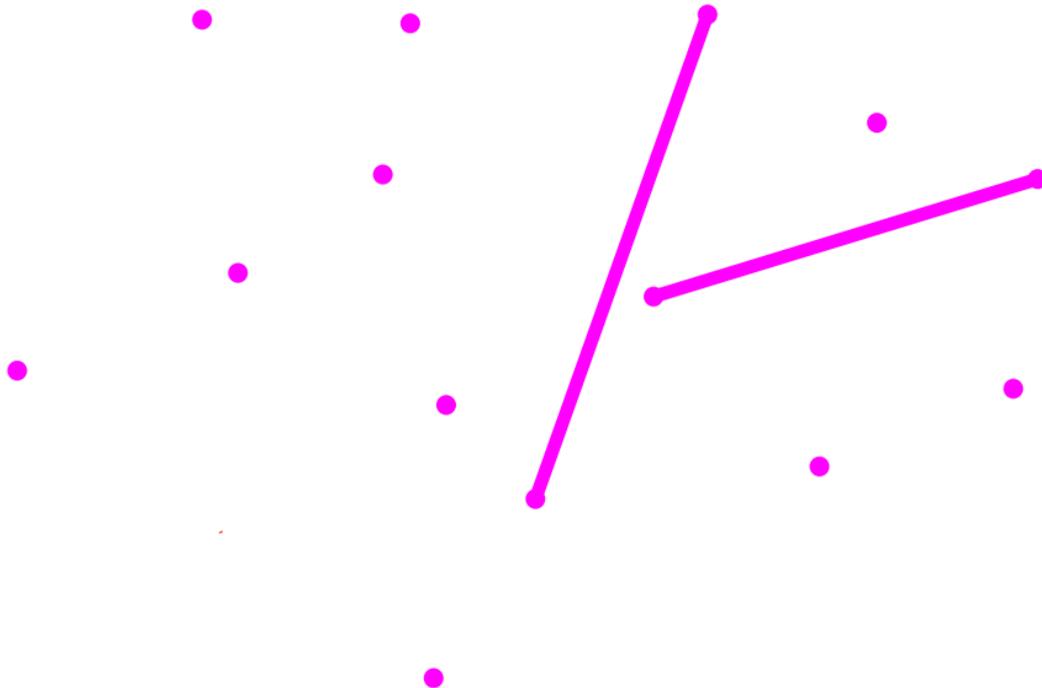
Delaunay contraint

# On veut trianguler des points

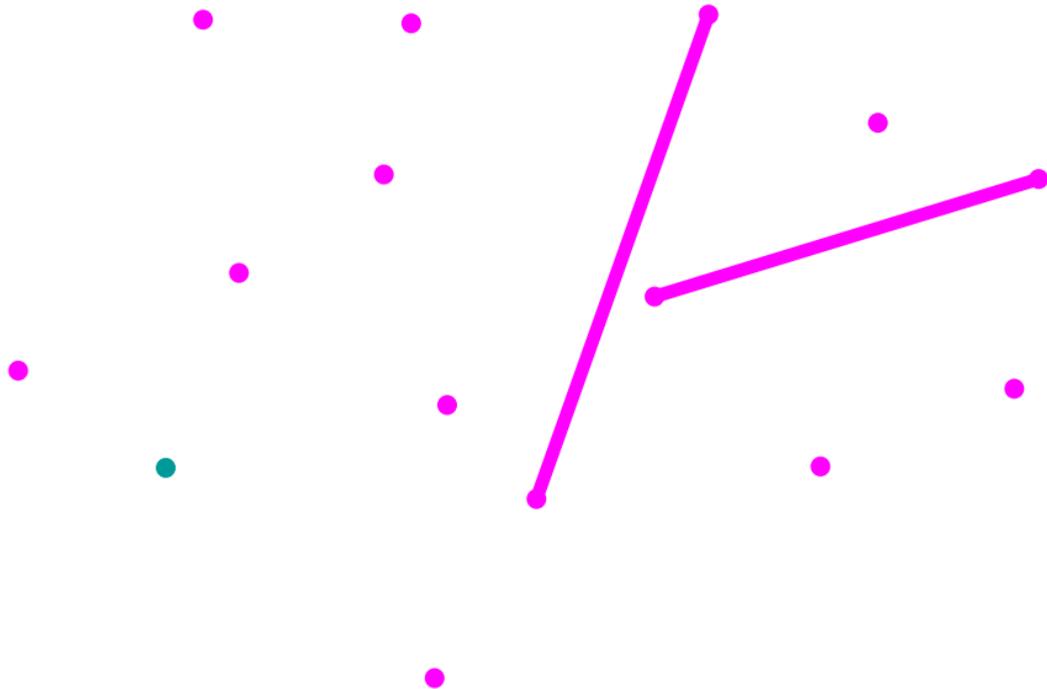


On veut trianguler des points

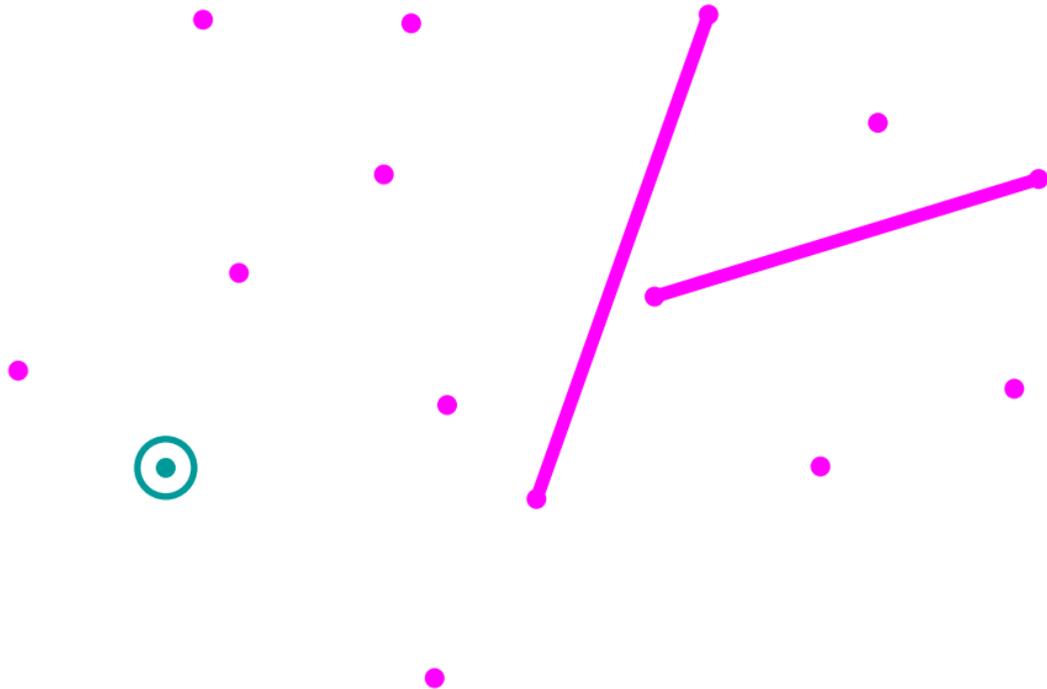
En contraignant certains segments



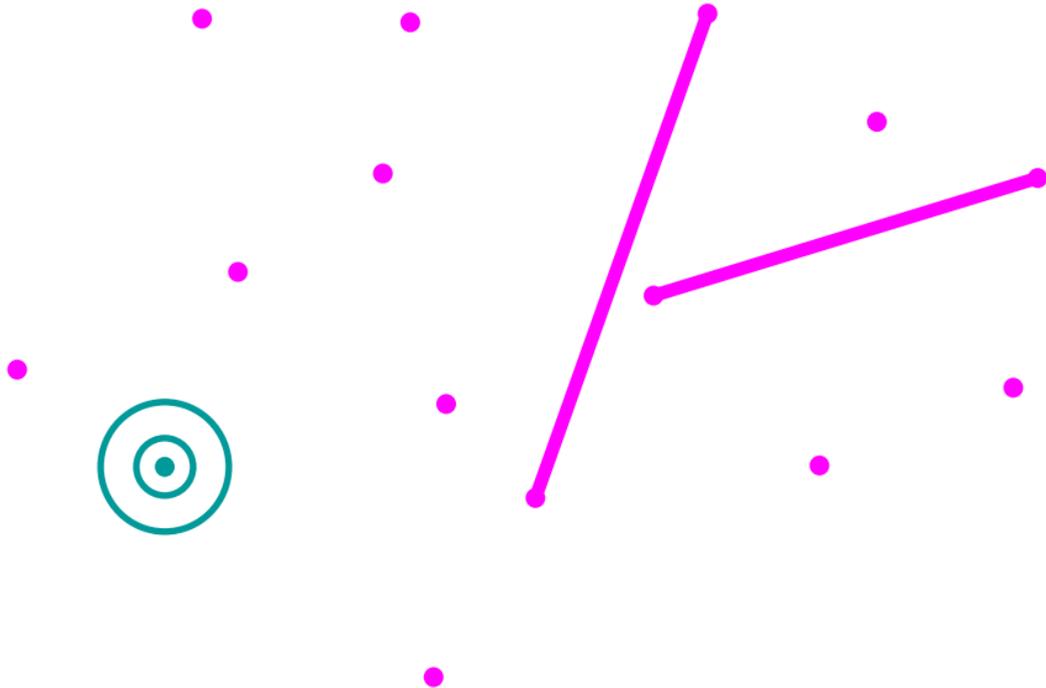
# Le plus proche voisin



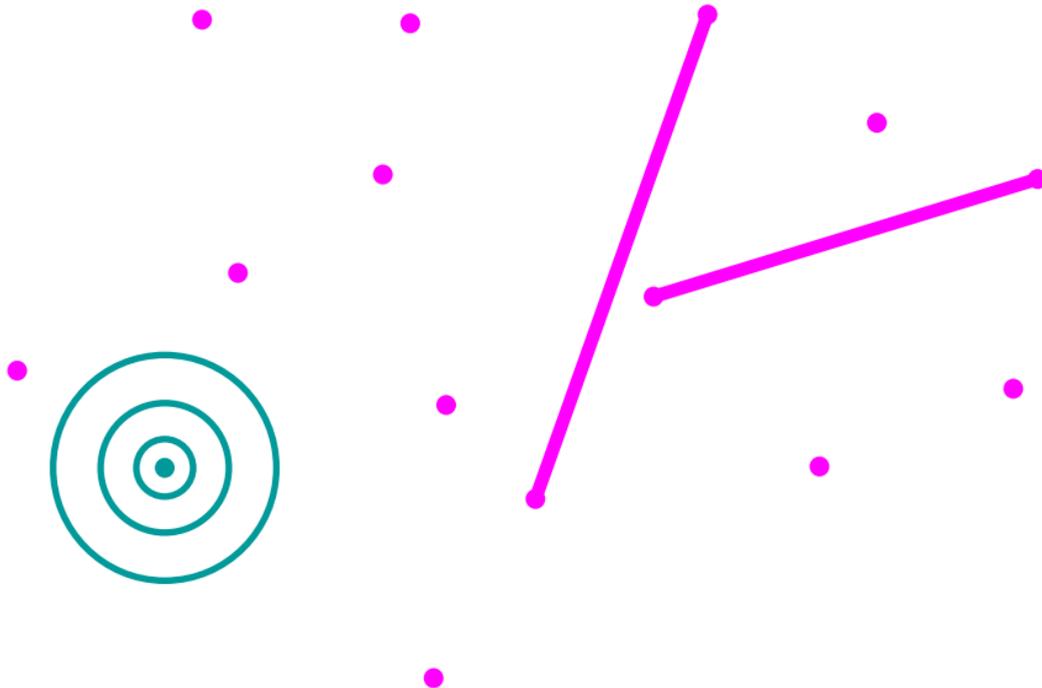
# Le plus proche voisin



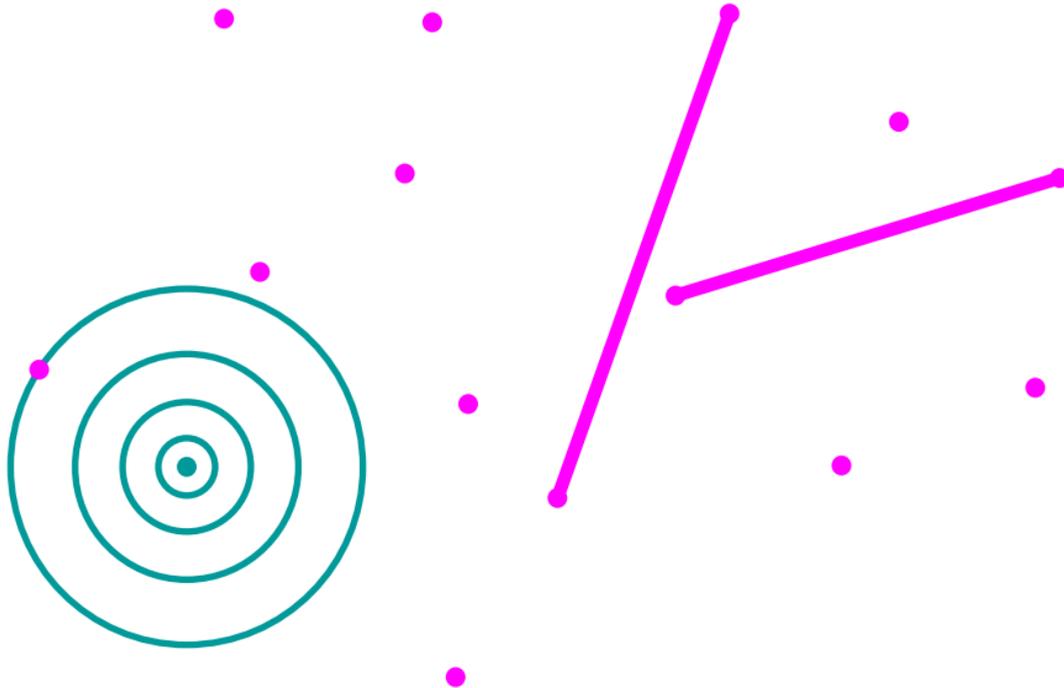
# Le plus proche voisin



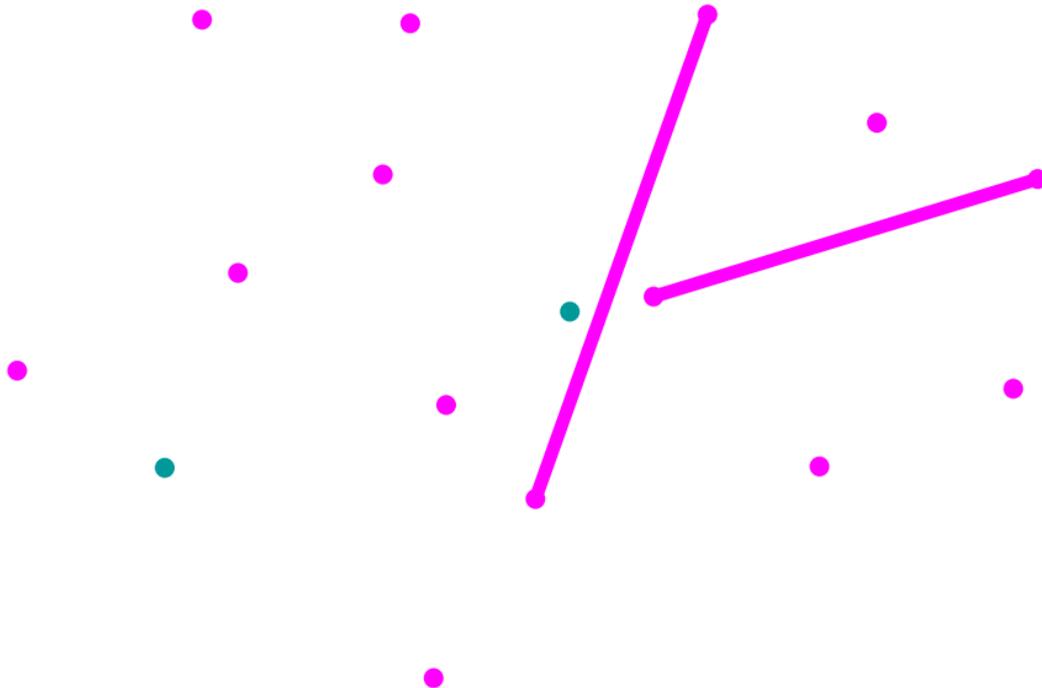
# Le plus proche voisin



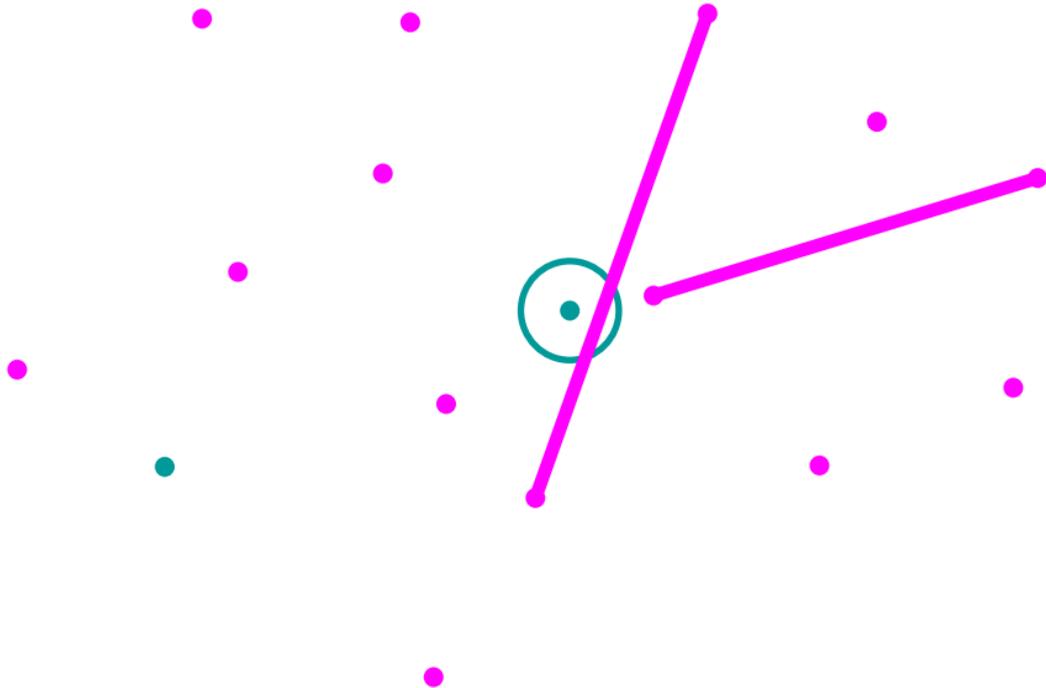
# Le plus proche voisin



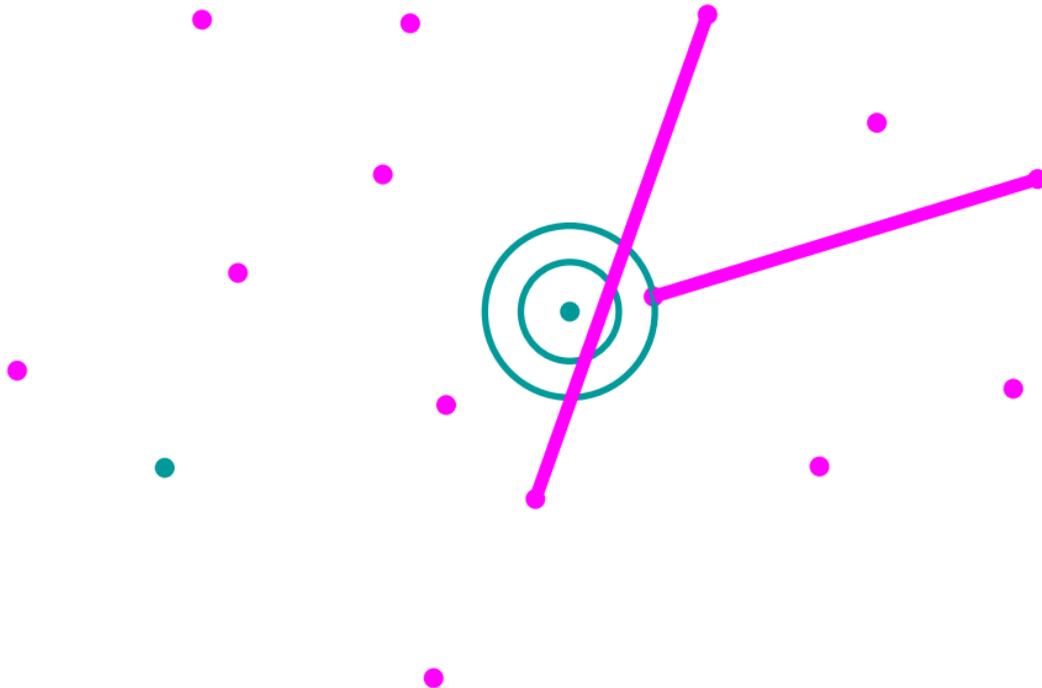
# Le plus proche voisin



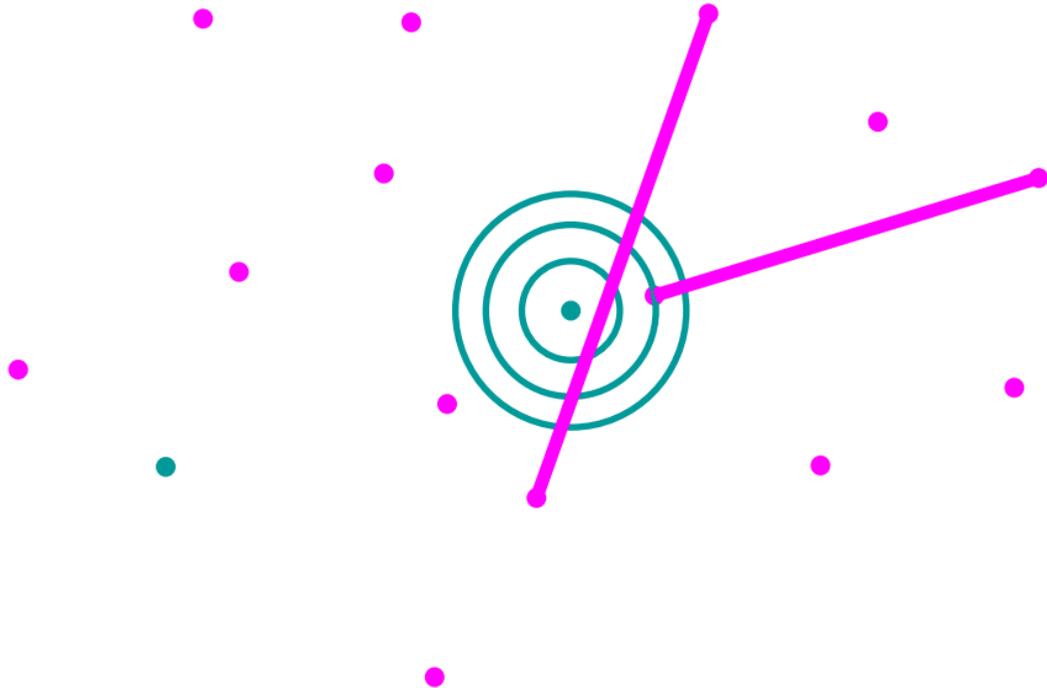
# Le plus proche voisin



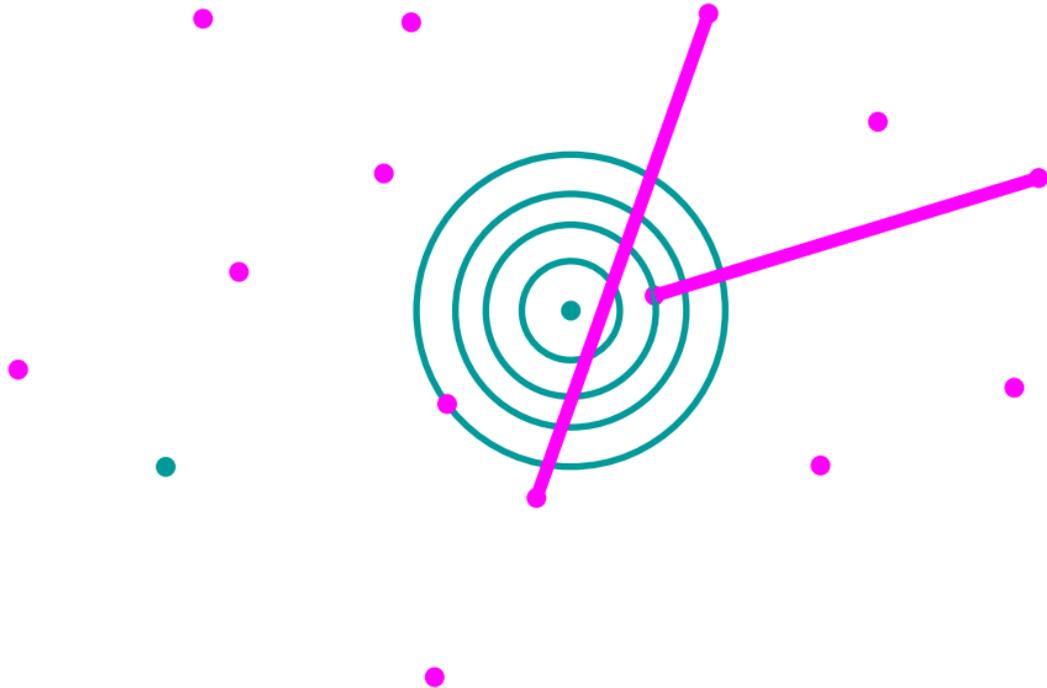
# Le plus proche voisin **visible**



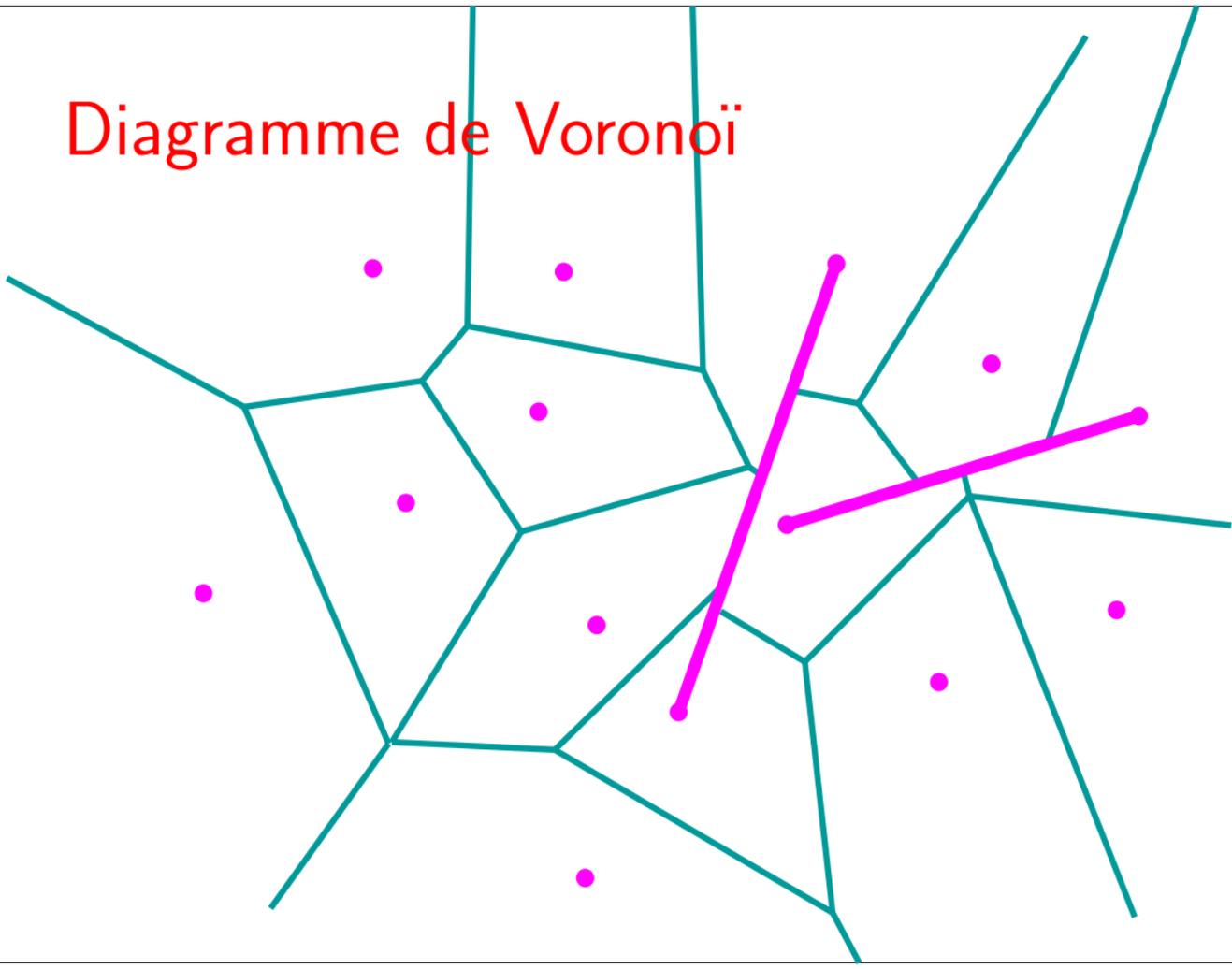
# Le plus proche voisin visible



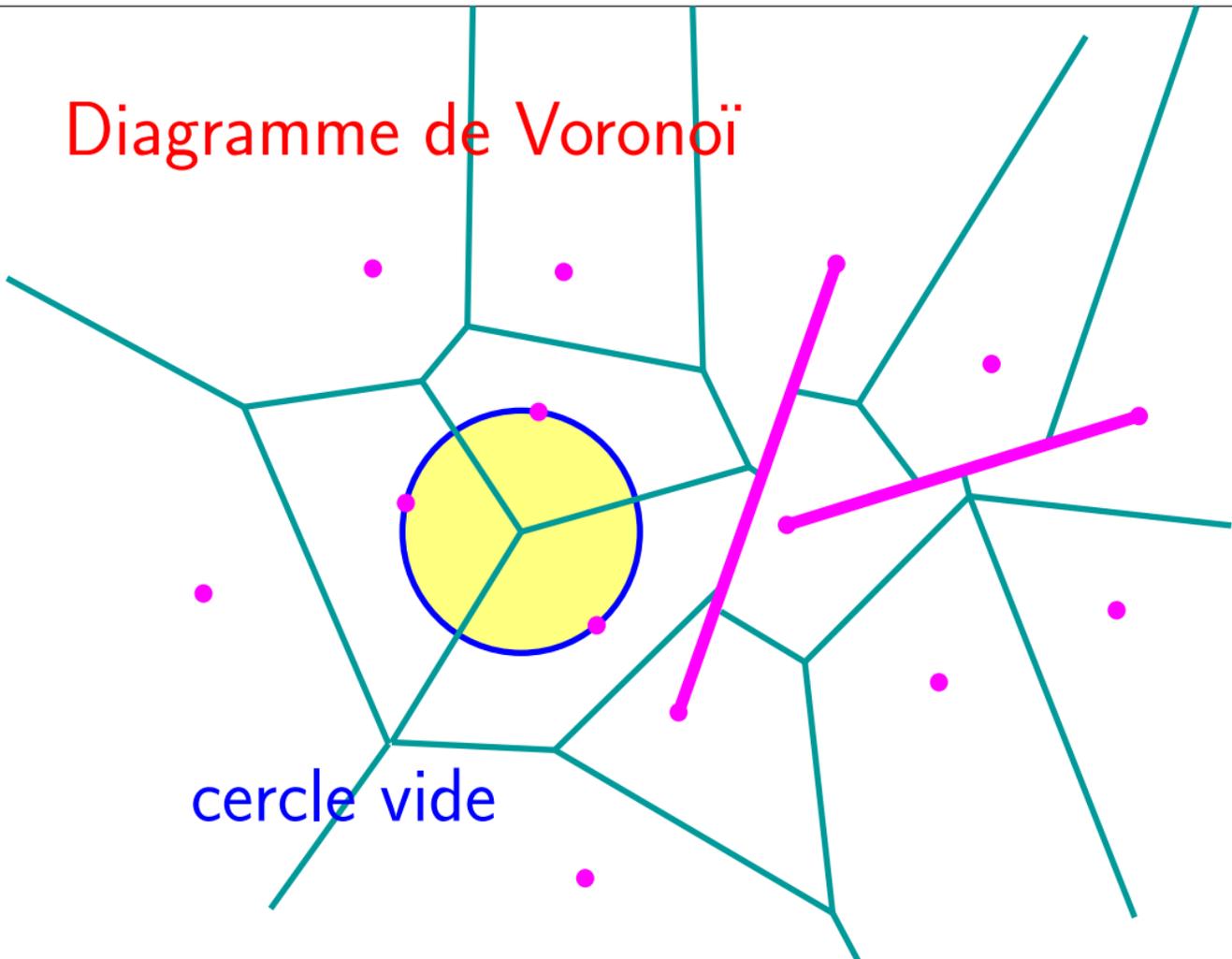
# Le plus proche voisin visible



# Diagramme de Voronoï

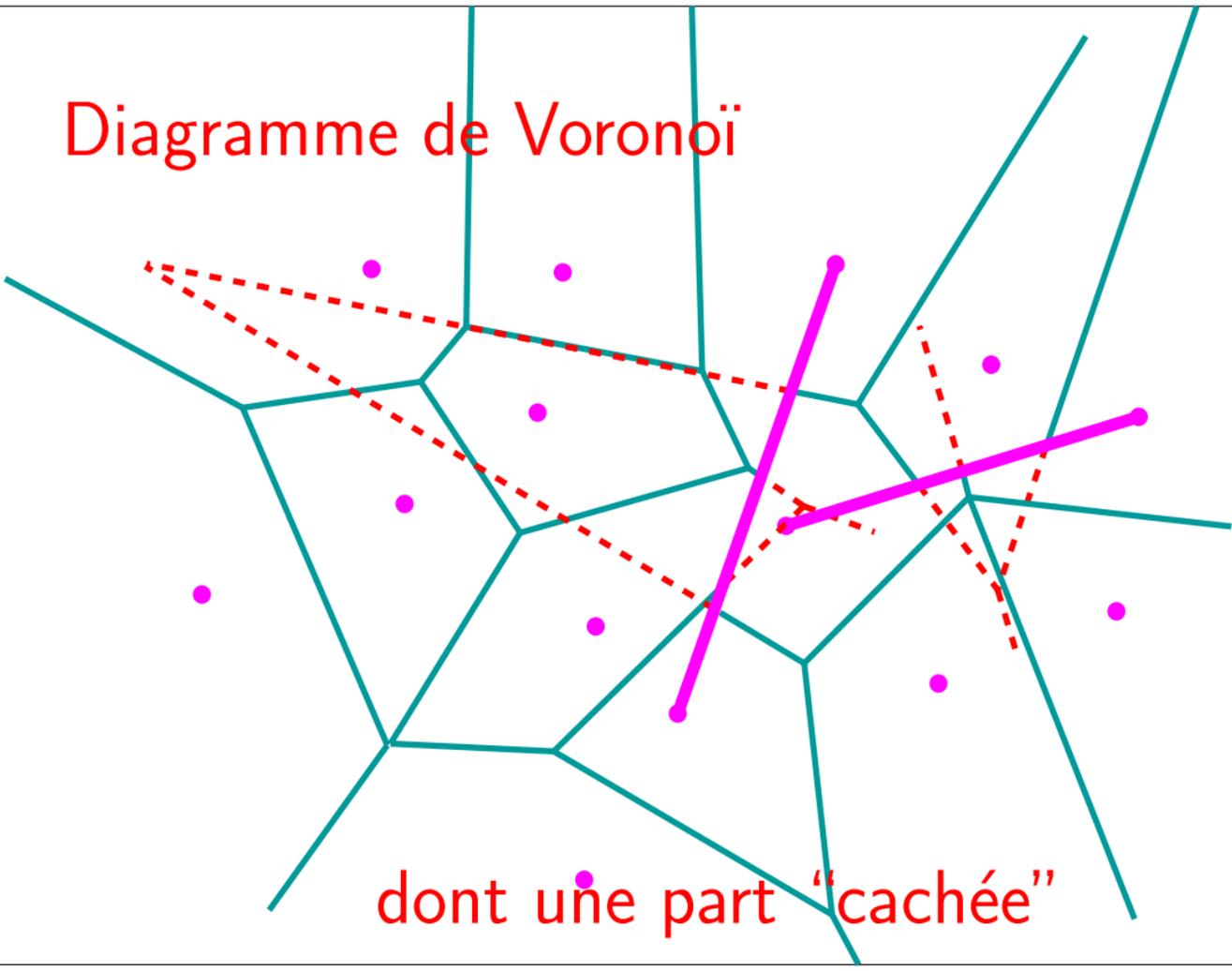


# Diagramme de Voronoï



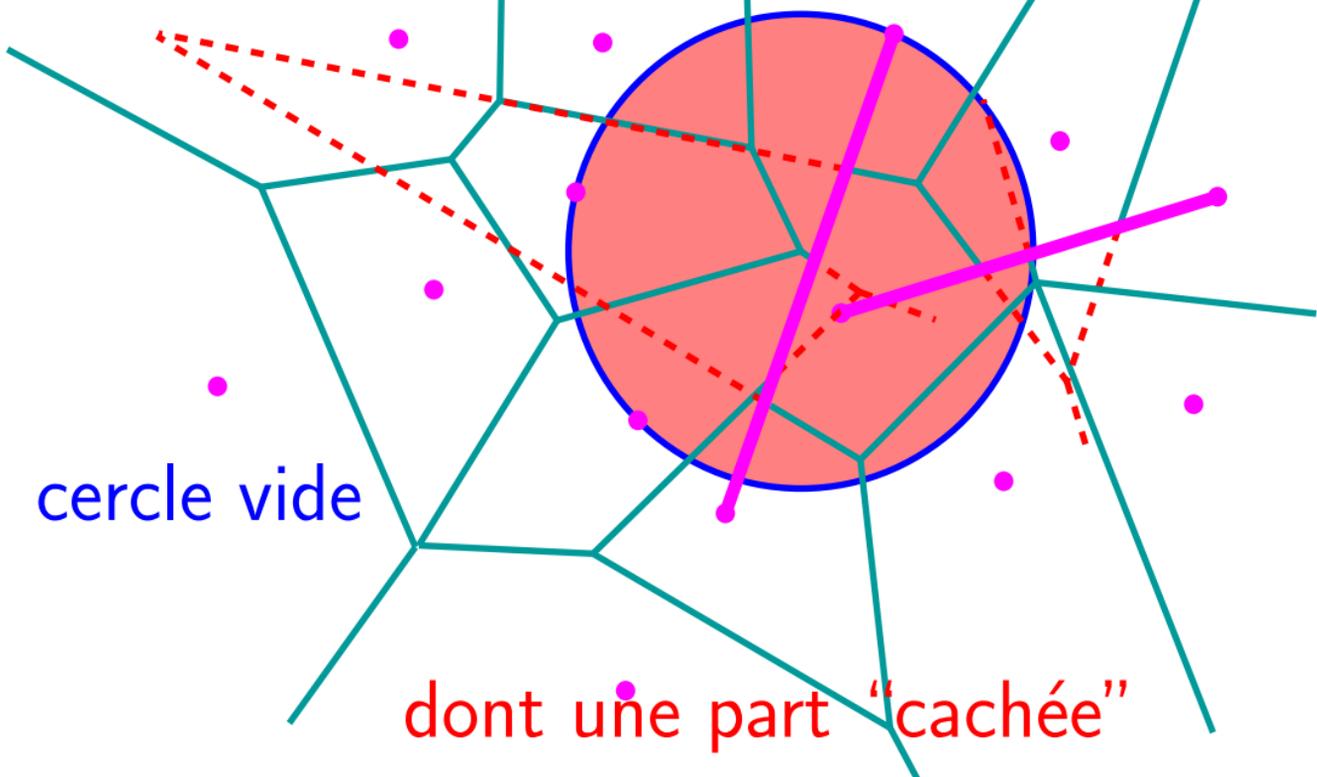
cercle vide

# Diagramme de Voronoï



dont une part "cachée"

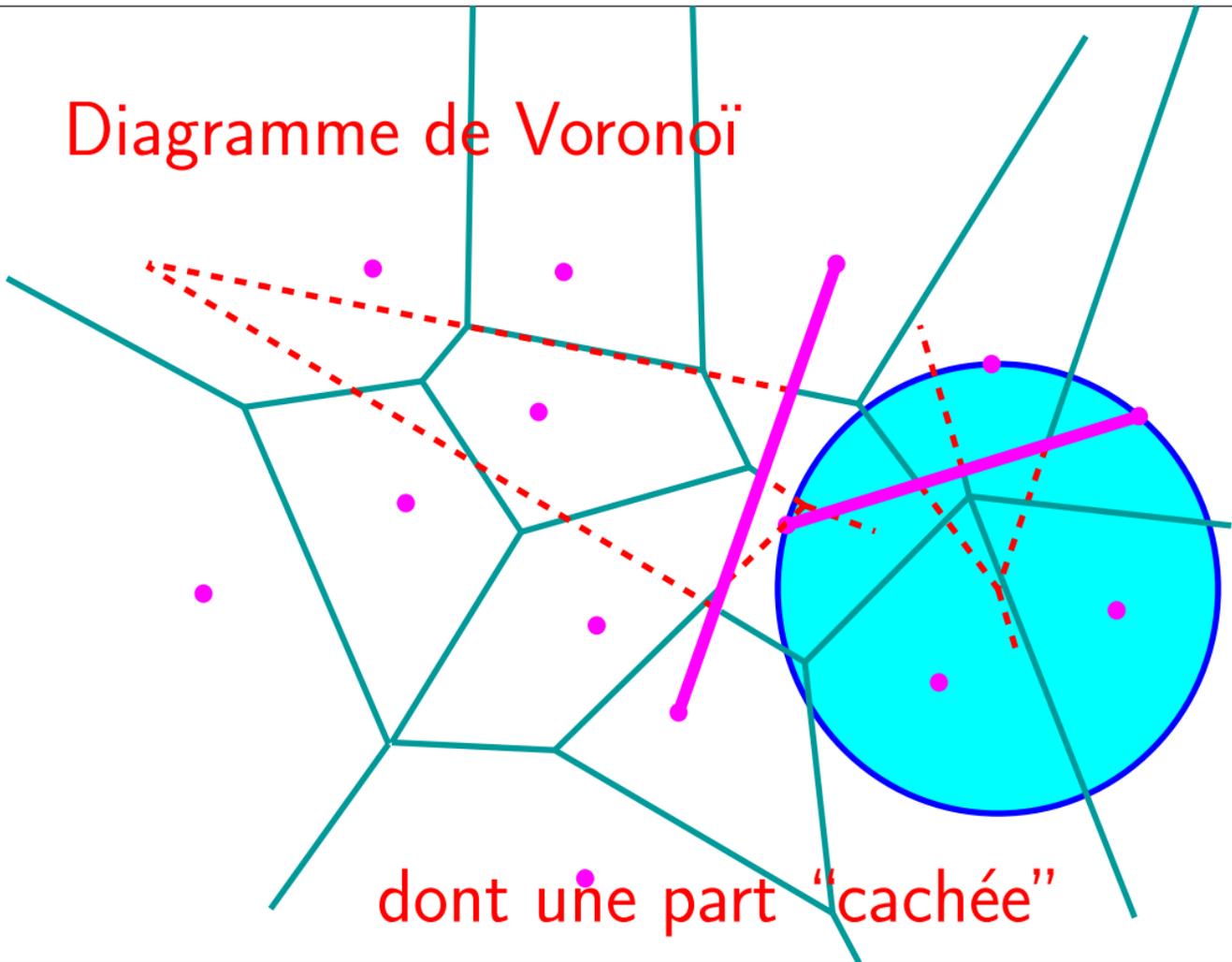
# Diagramme de Voronoï



cercle vide

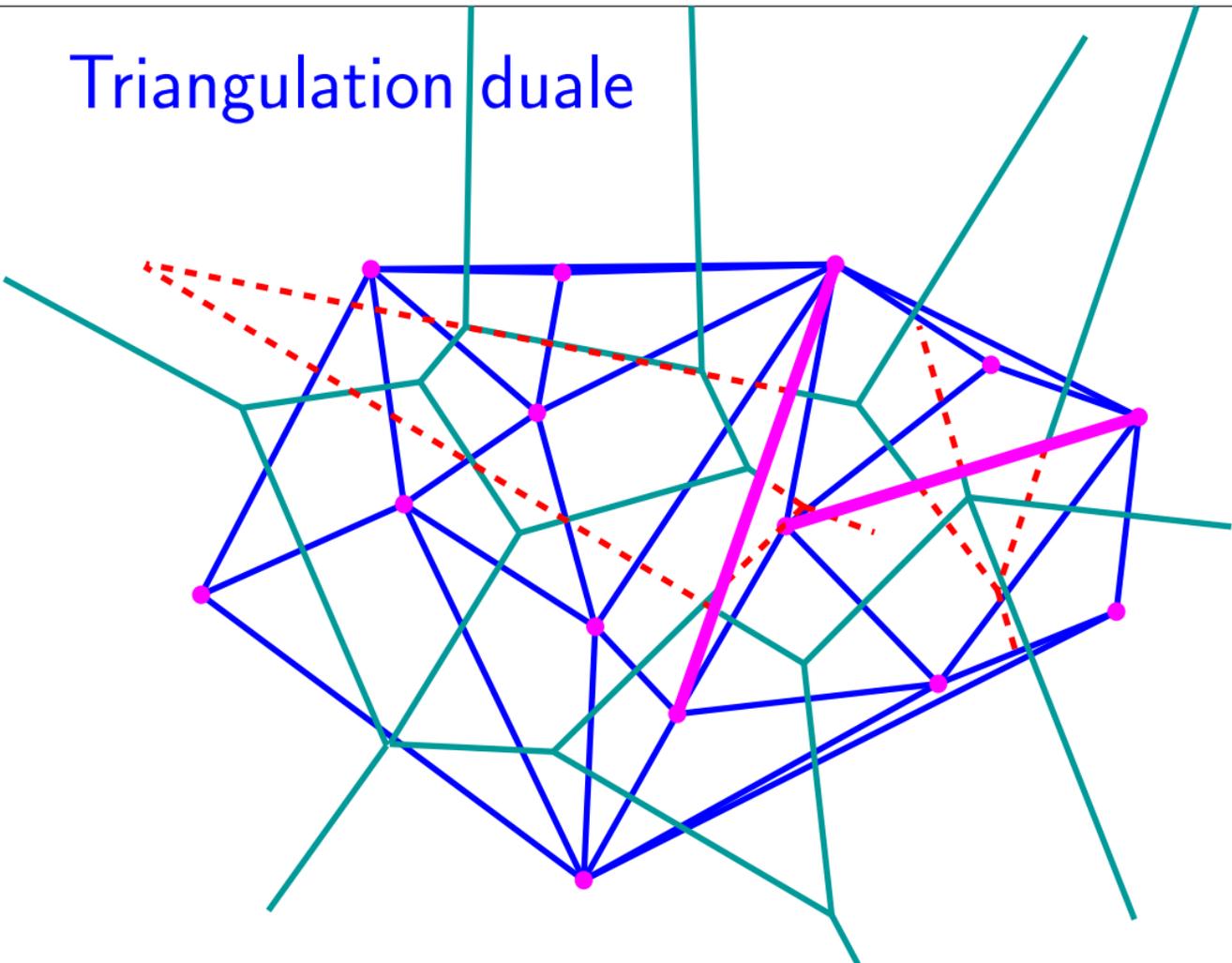
dont une part "cachée"

# Diagramme de Voronoï

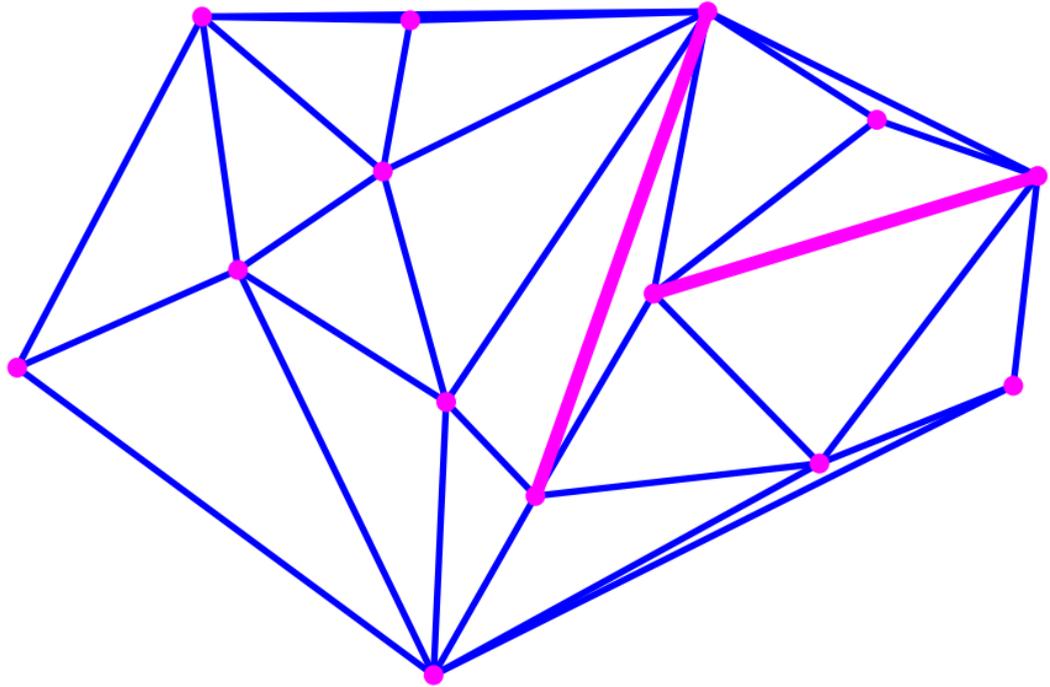


dont une part "cachée"

# Triangulation duale



# Delaunay constraint



# Delaunay contraint

trianguler un domaine en respectant un bord donné

# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

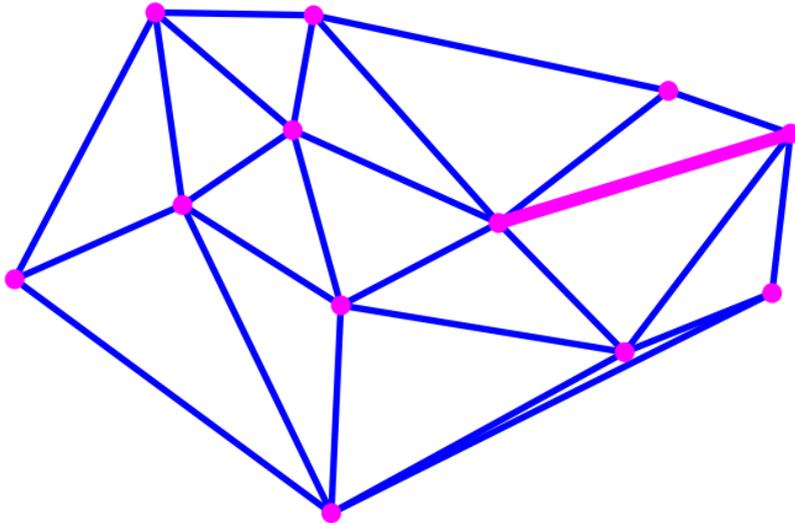
## Algorithme

# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

Algorithme

incrémental

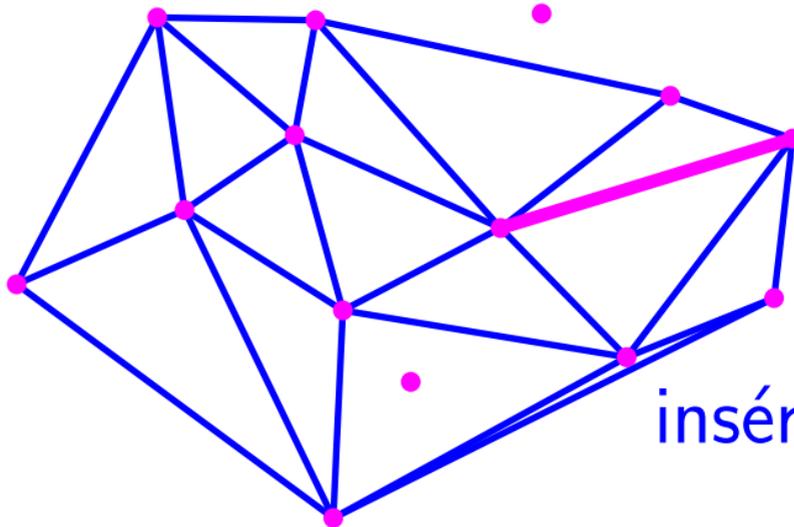


# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

## Algorithme

incrémental



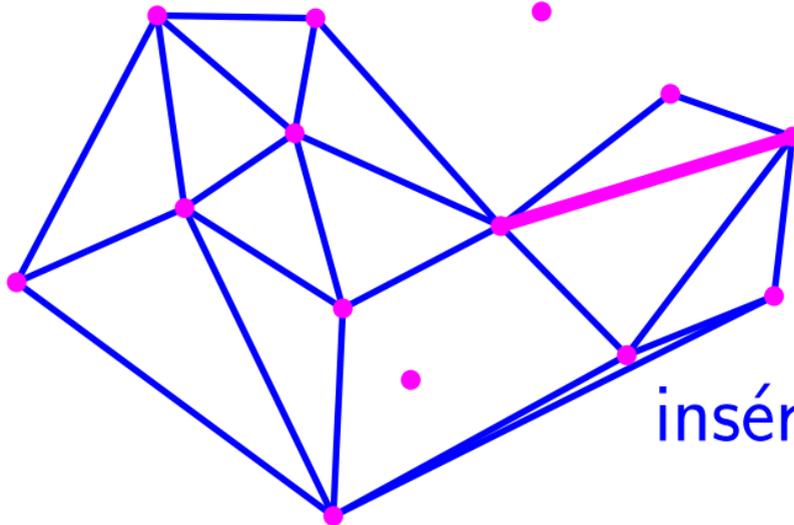
insérer les extrémités

# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

## Algorithme

incrémental



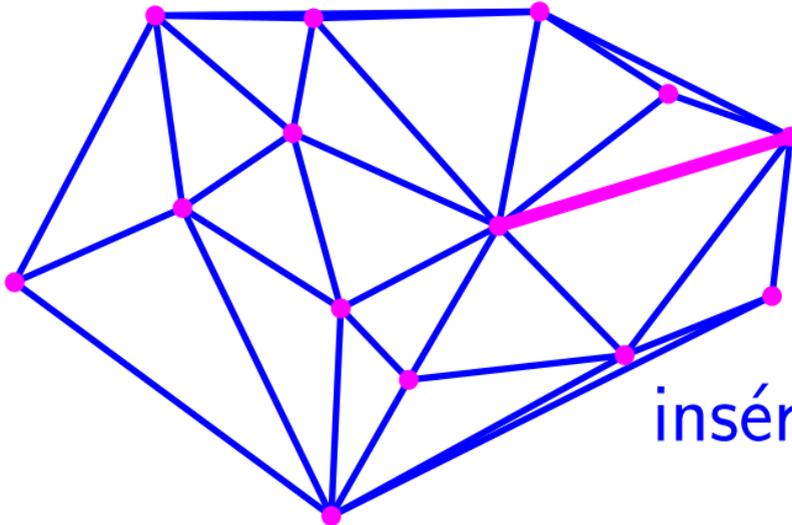
insérer les extrémités

# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

## Algorithme

incrémental



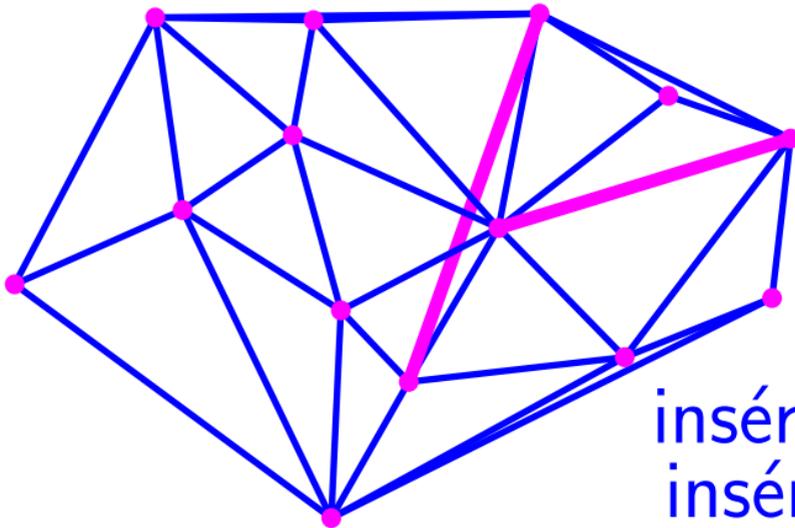
insérer les extrémités

# Delaunay contraint

triangler un domaine en respectant un bord donné

## Algorithme

incrémental



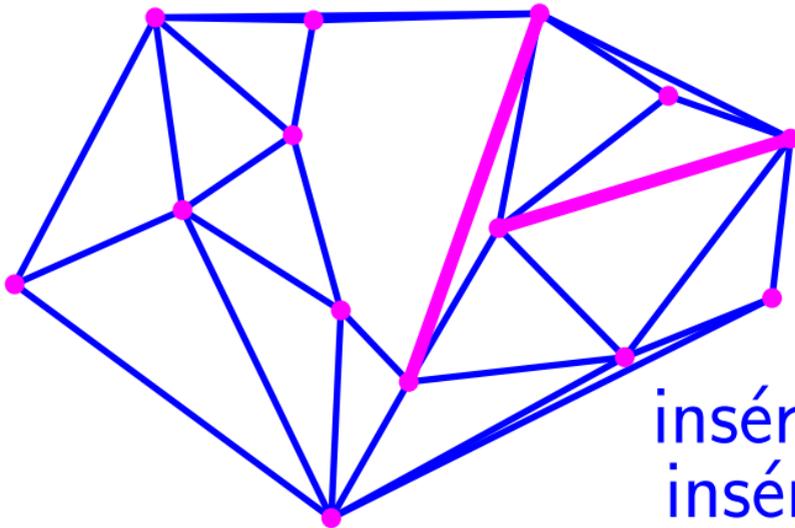
insérer les extrémités  
insérer la contrainte

# Delaunay contraint

trianguler un domaine en respectant un bord donné

## Algorithme

incrémental



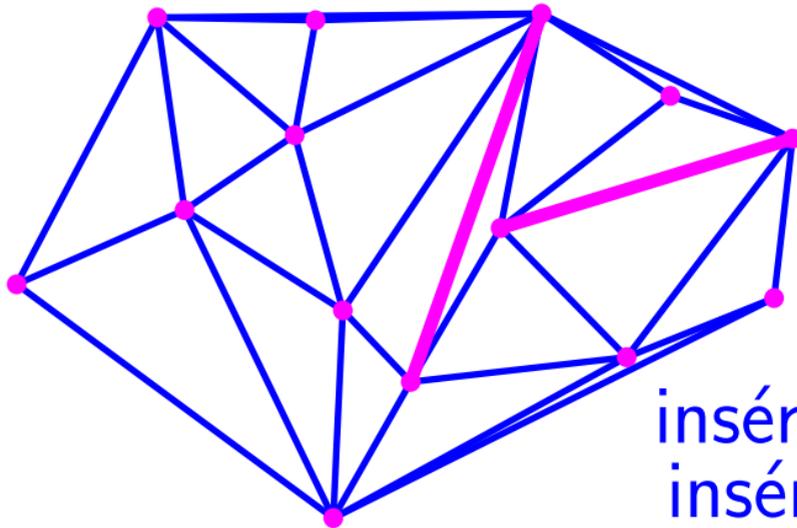
insérer les extrémités  
insérer la contrainte

# Delaunay contraint

trianguler un domaine en respectant un bord donné

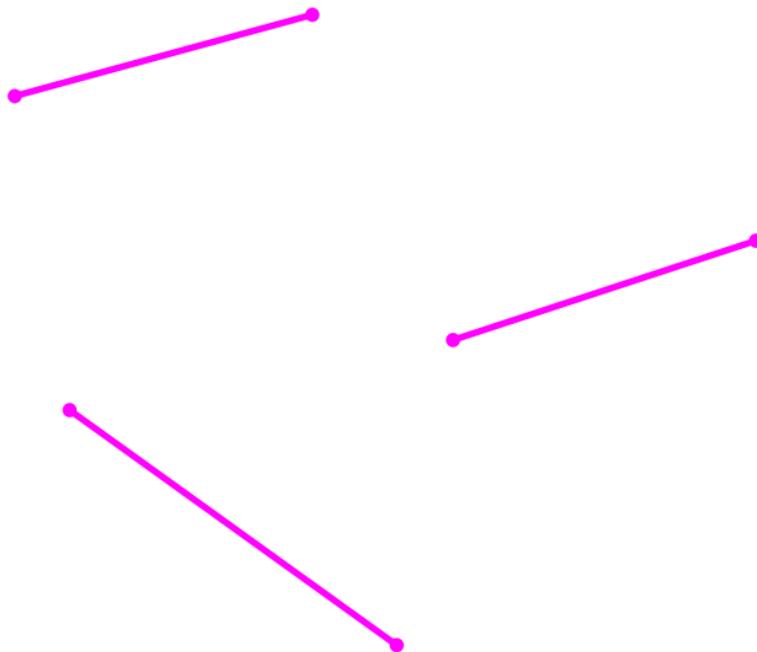
## Algorithme

incrémental

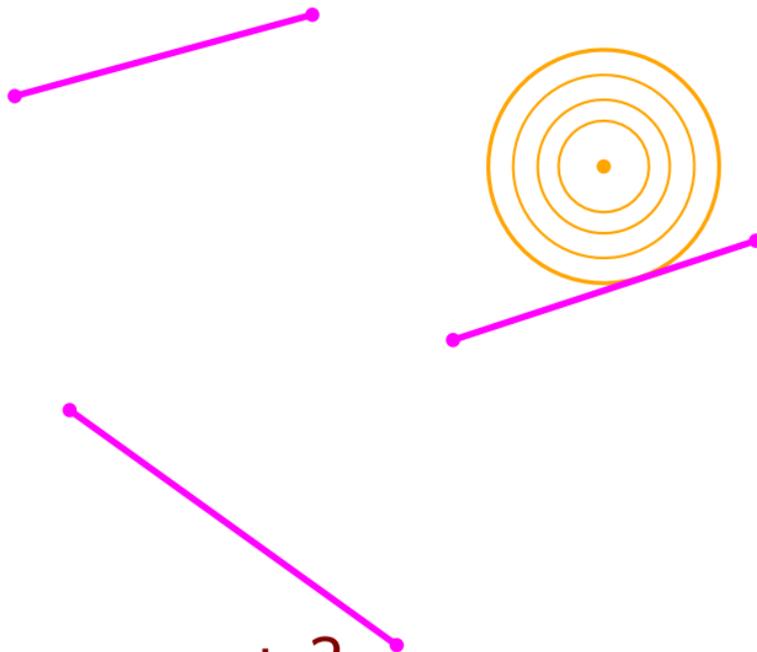


insérer les extrémités  
insérer la contrainte

# Encore des segments

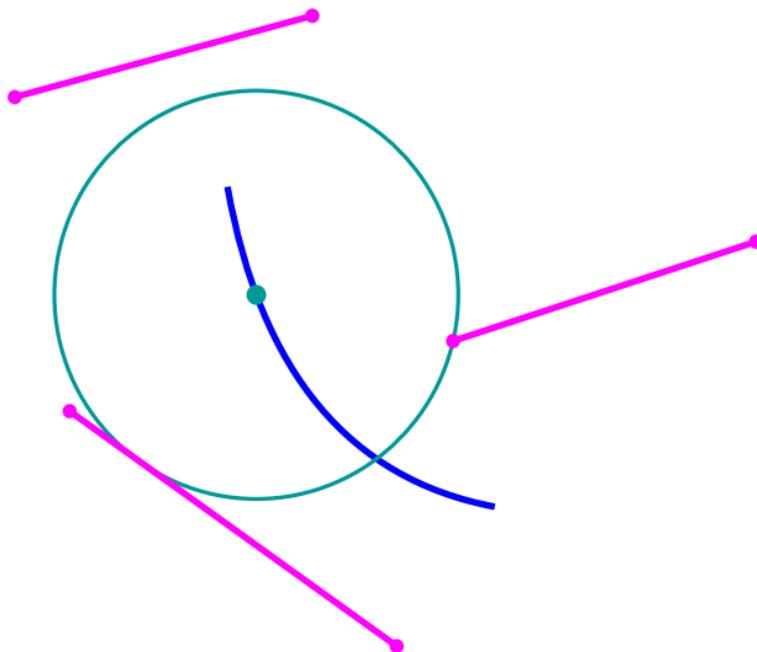


# Encore des segments



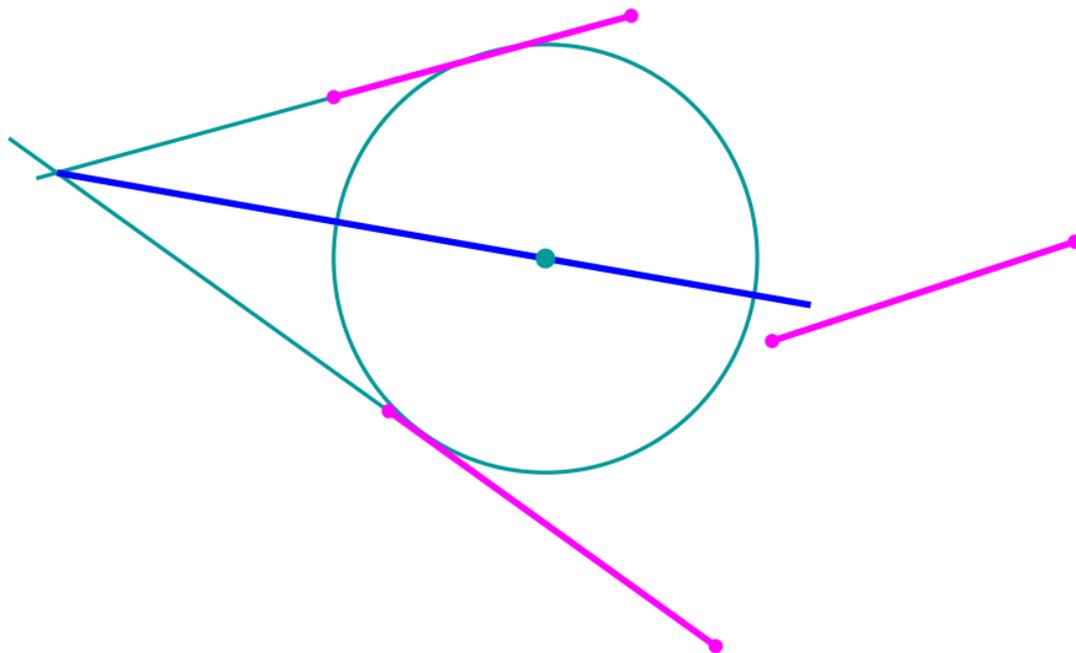
plus proche segment ?

# Encore des segments



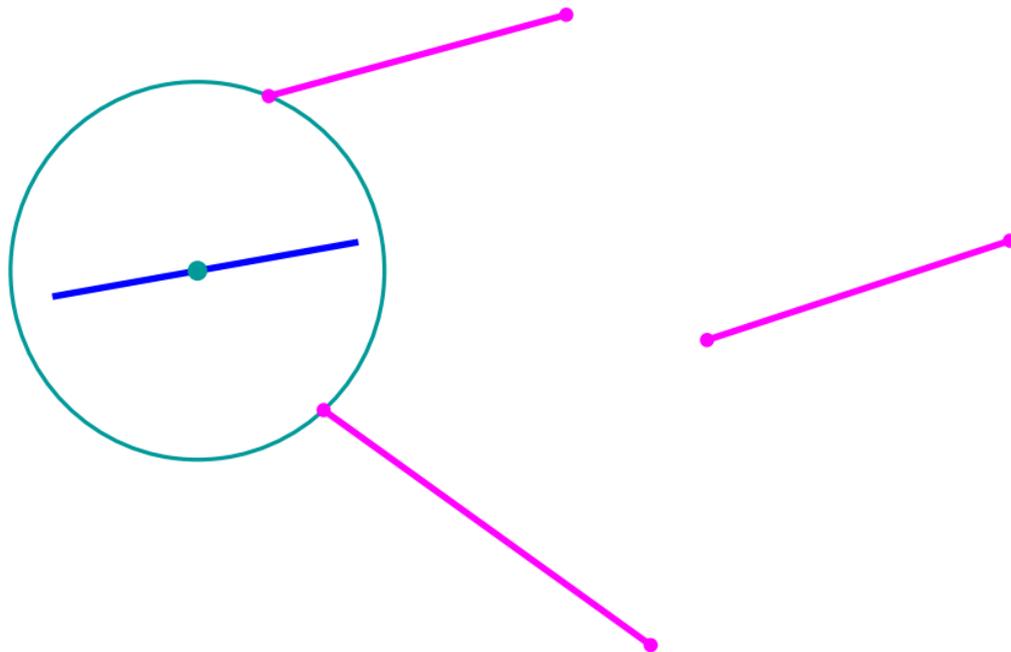
bissecteur parabolique

# Encore des segments



bissectrice

# Encore des segments



médiatrice

Encore des segments

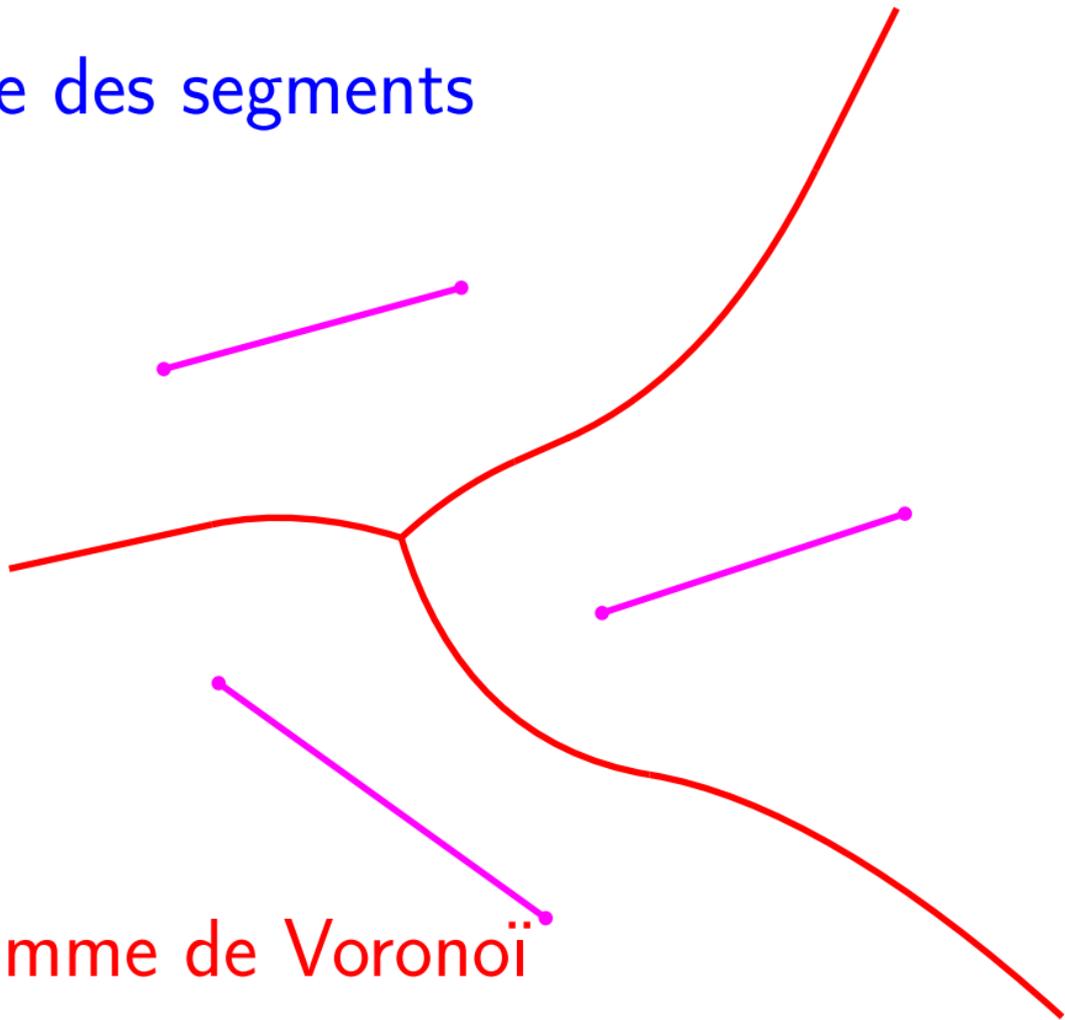
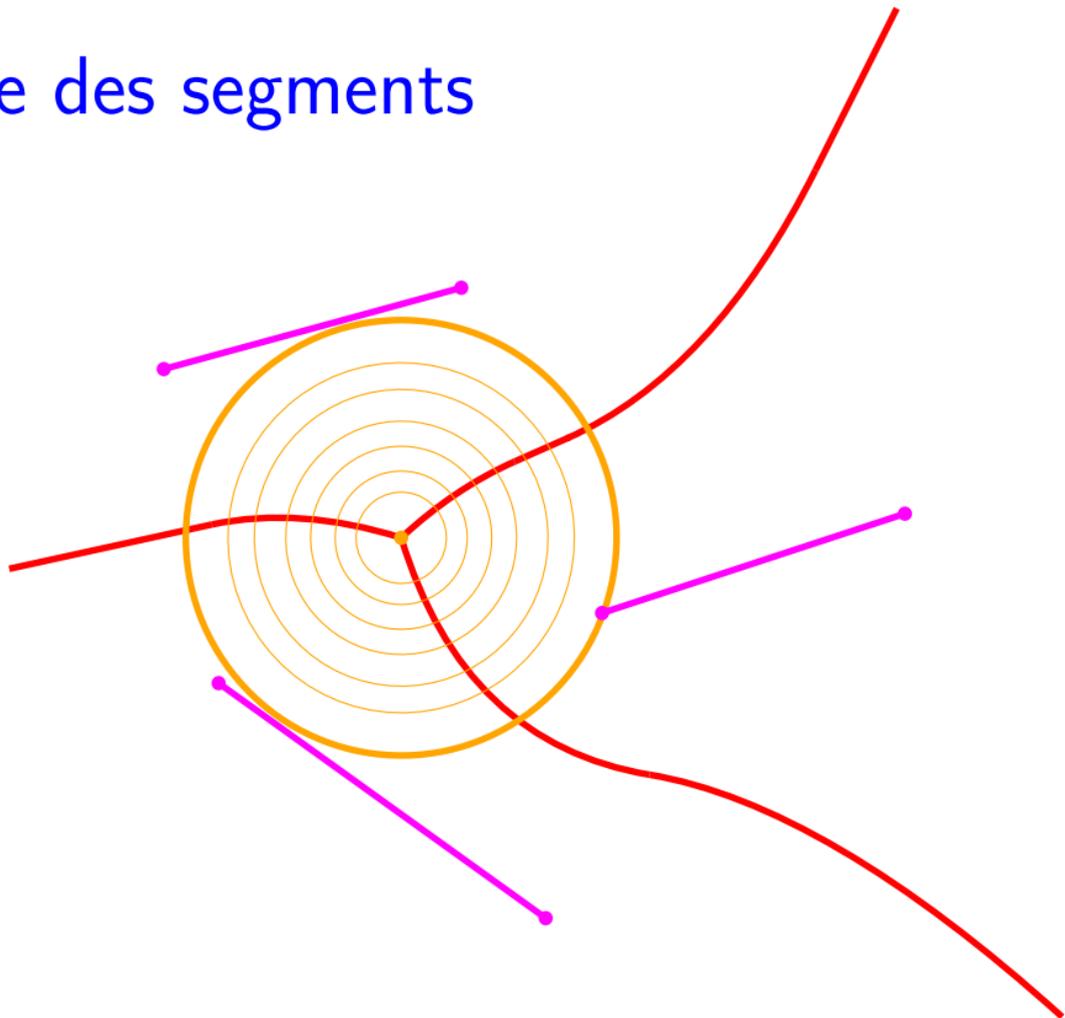
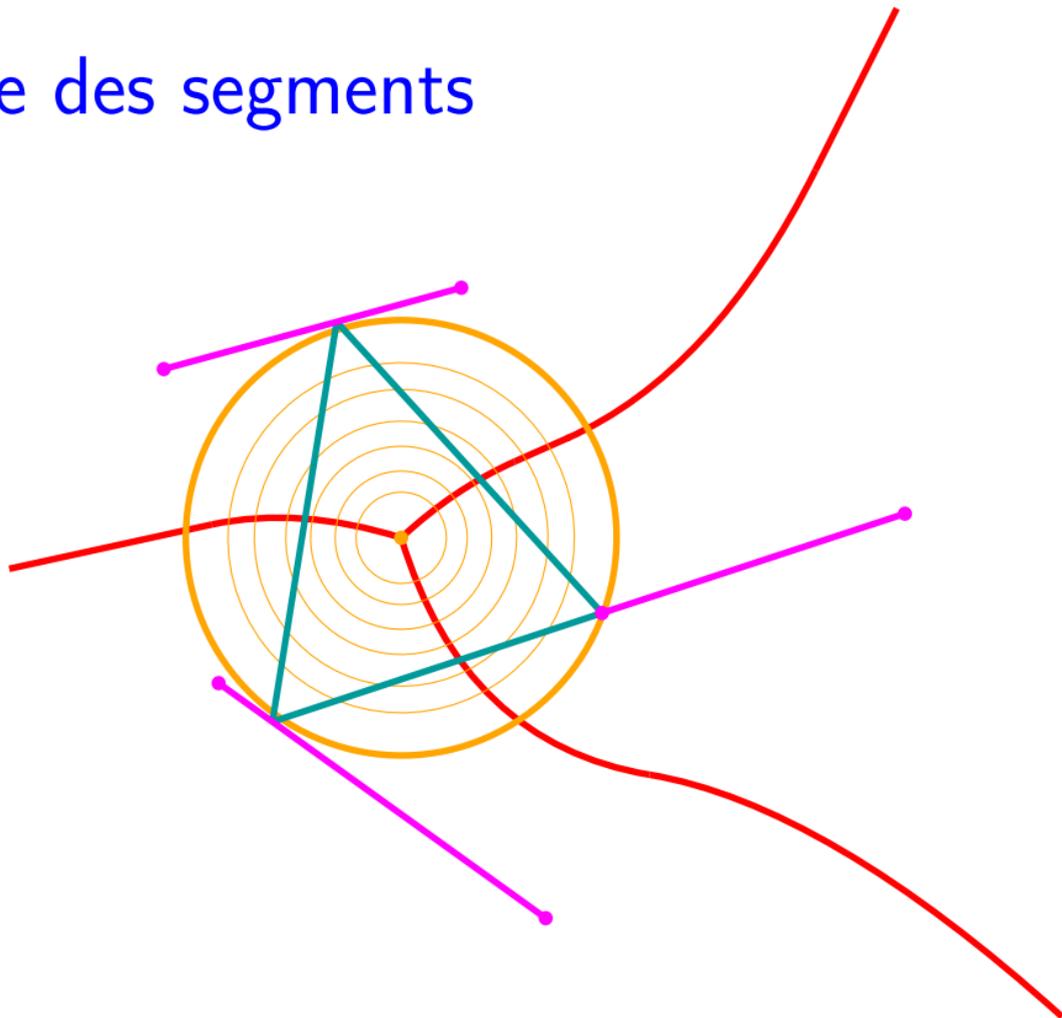


diagramme de Voronoï

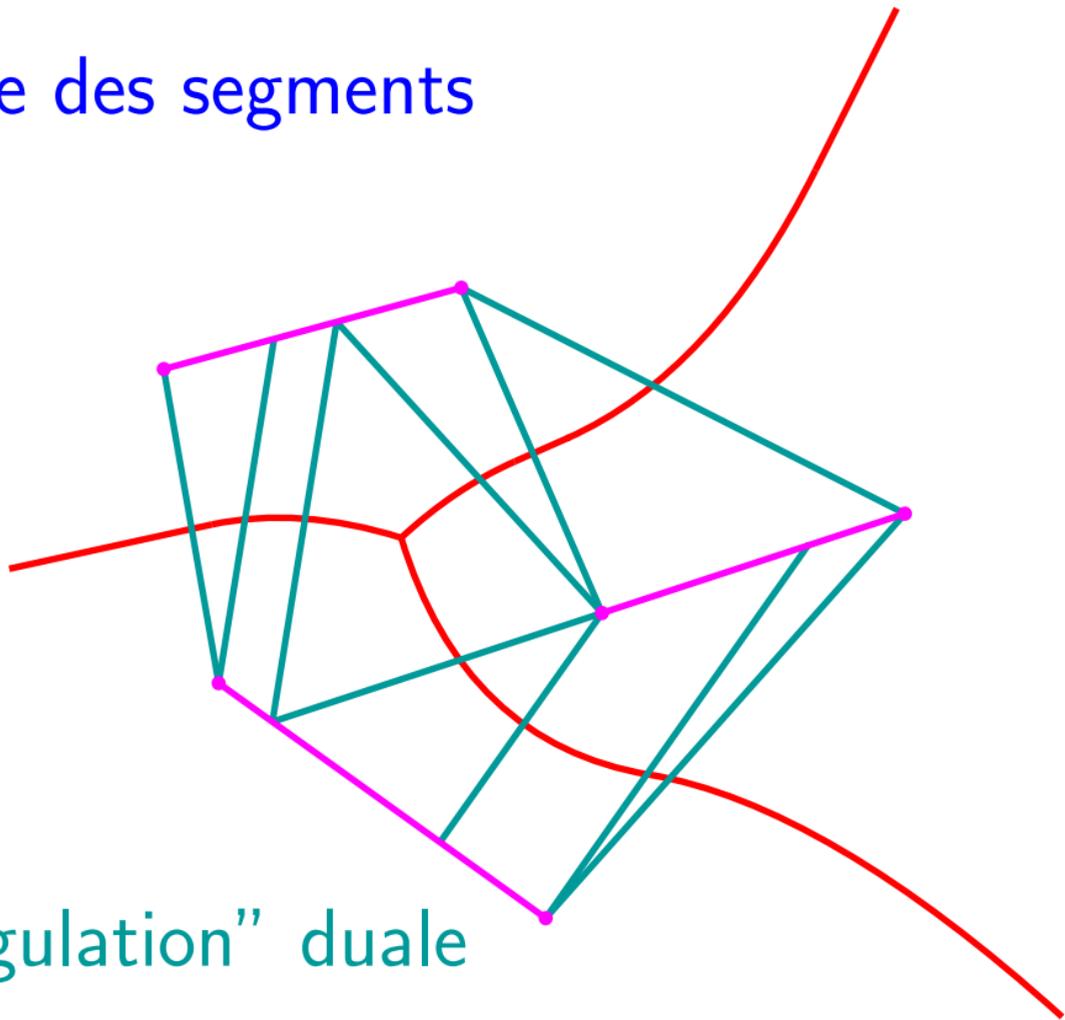
# Encore des segments



# Encore des segments

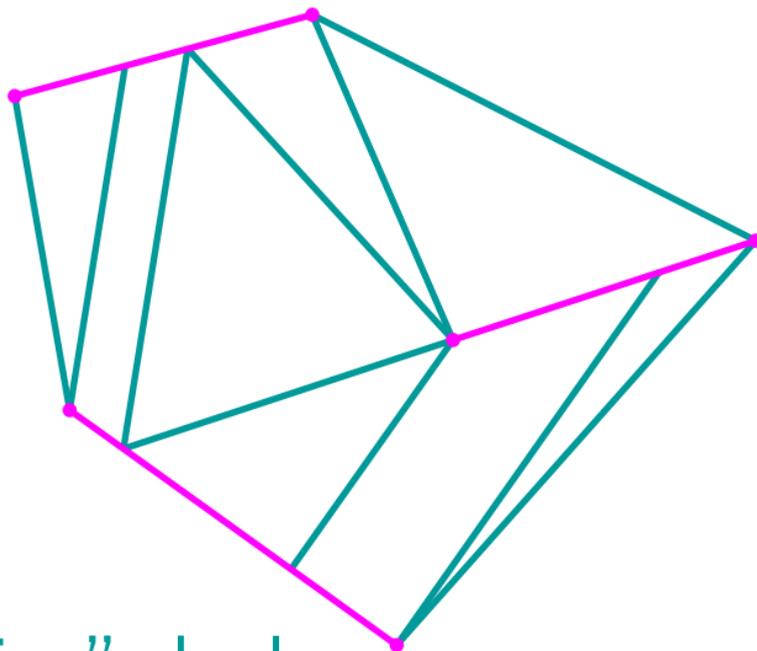


Encore des segments



“triangulation” duale

# Encore des segments



“triangulation” duale

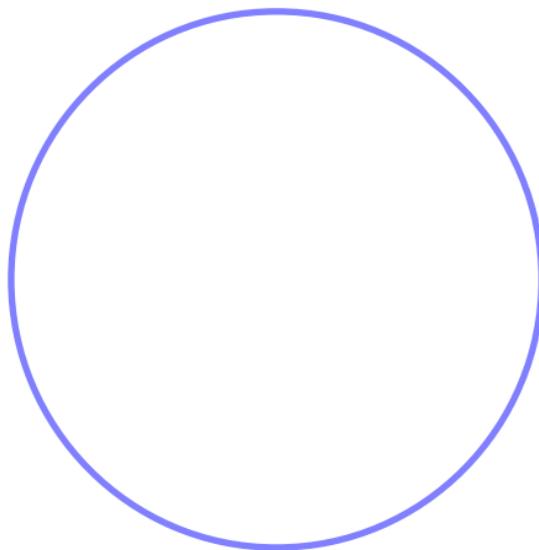
Autre chose que des segments

Autre chose que des segments

des cercles (points à poids additifs)

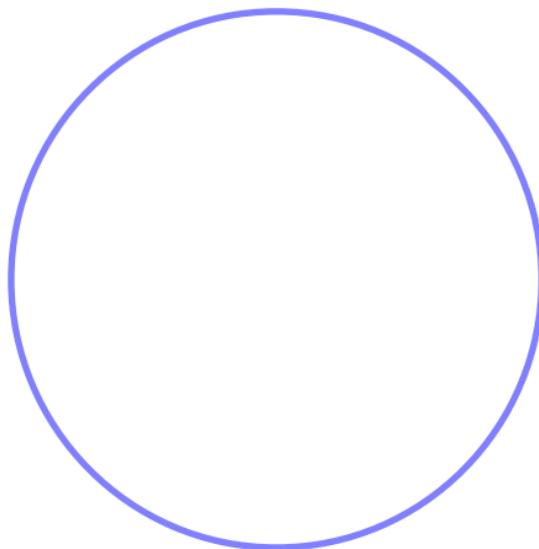
Autre chose que des segments

des cercles (points à poids additifs)



Autre chose que des segments

des cercles (points à poids additifs)



bisecteur hyperbolique

# poids multiplicatifs

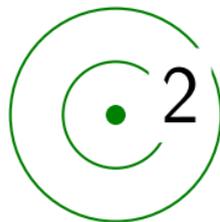
•  
1

• 2

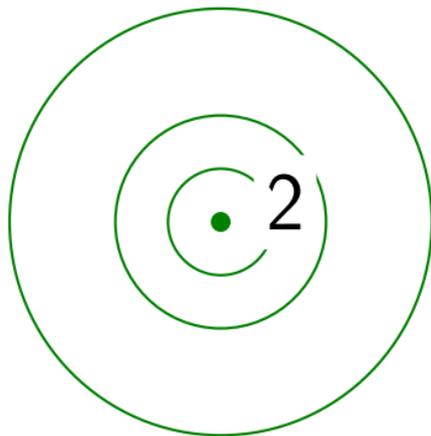
# poids multiplicatifs



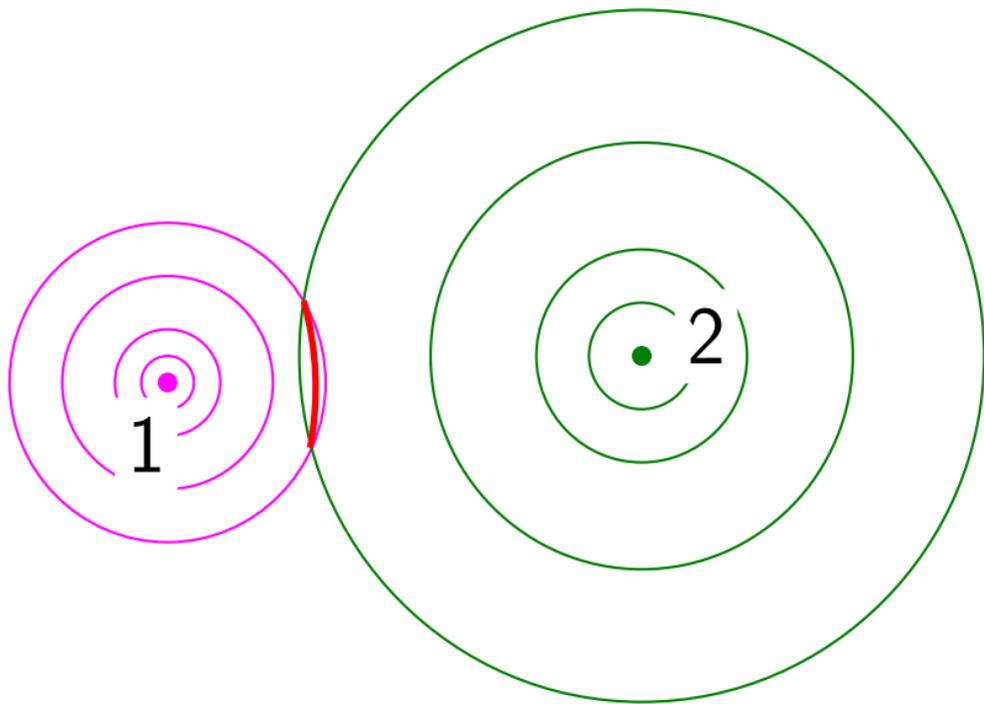
# poids multiplicatifs



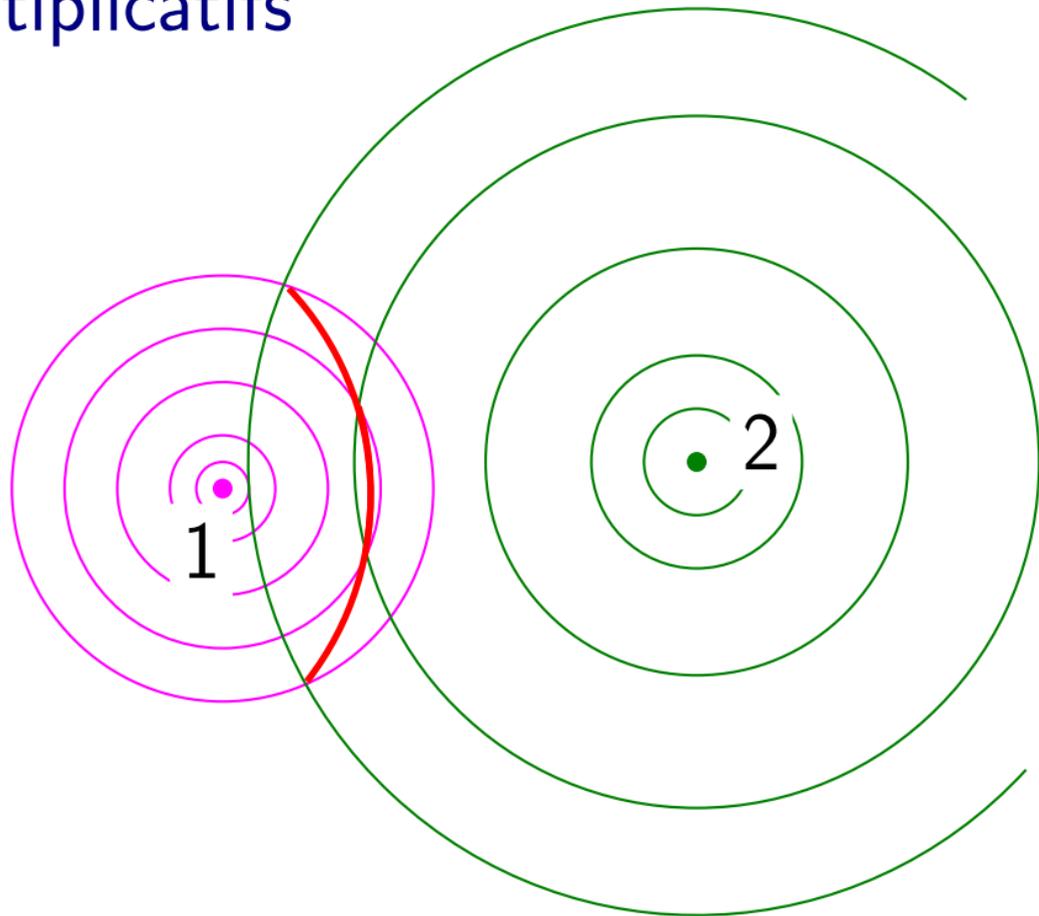
# poids multiplicatifs



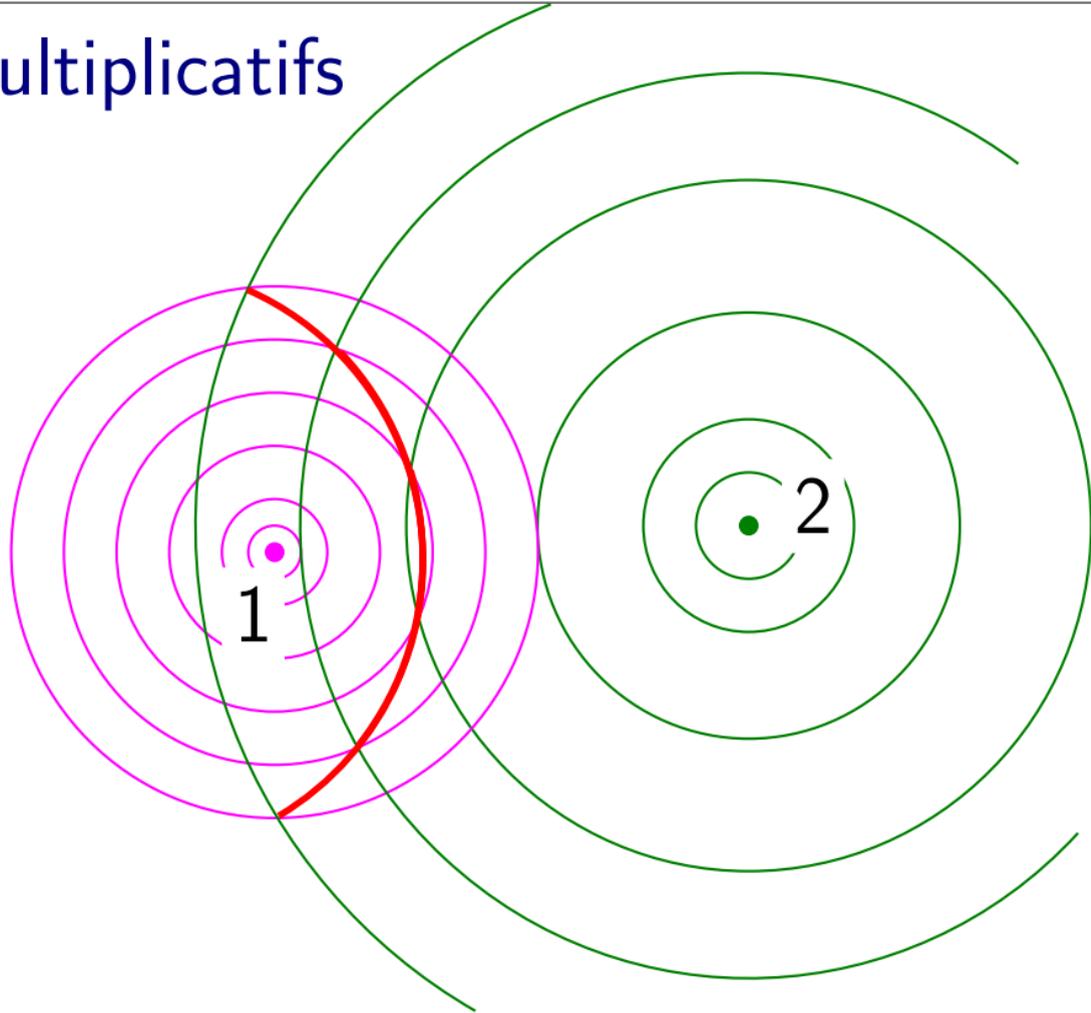
# poids multiplicatifs



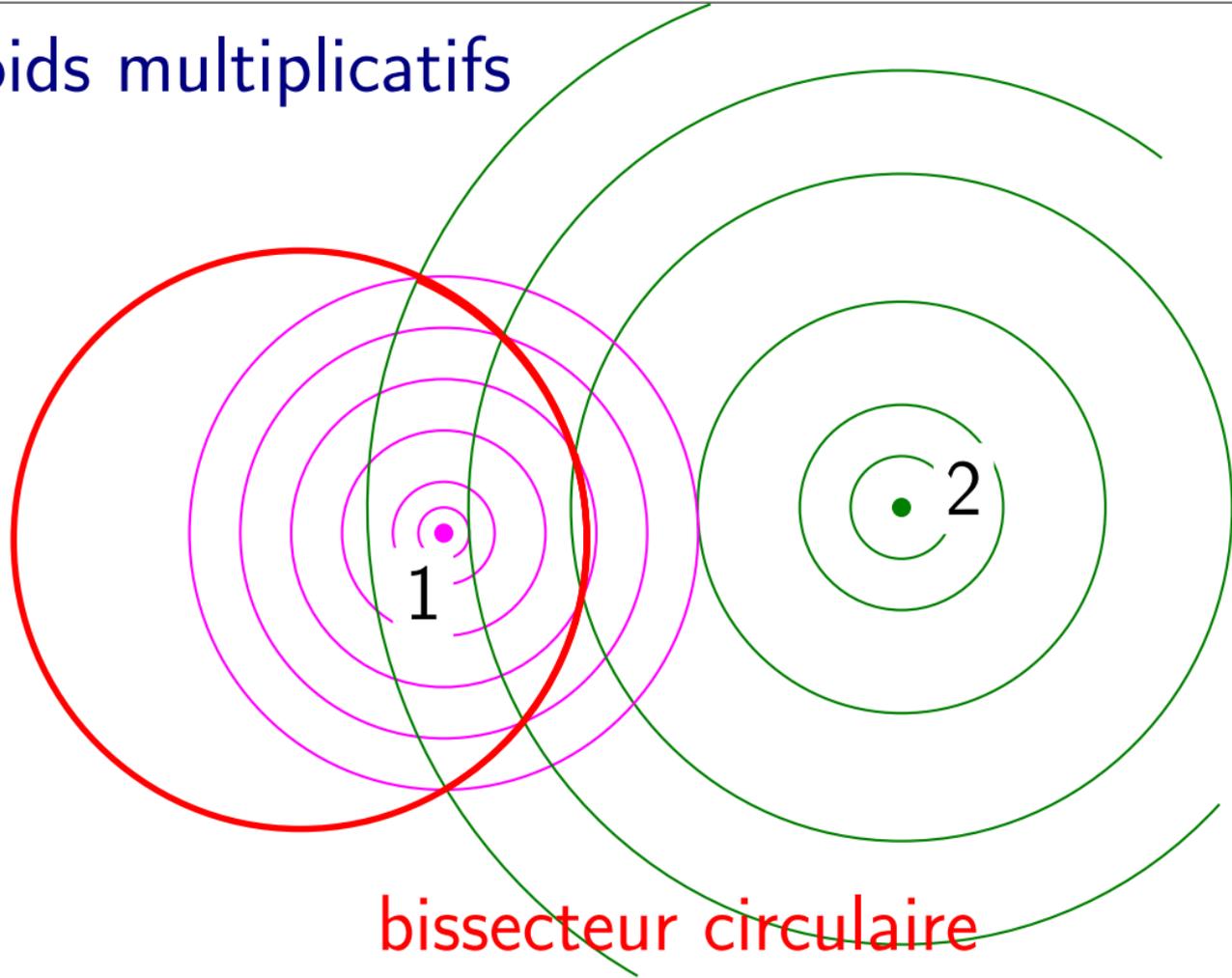
# poids multiplicatifs



poids multiplicatifs

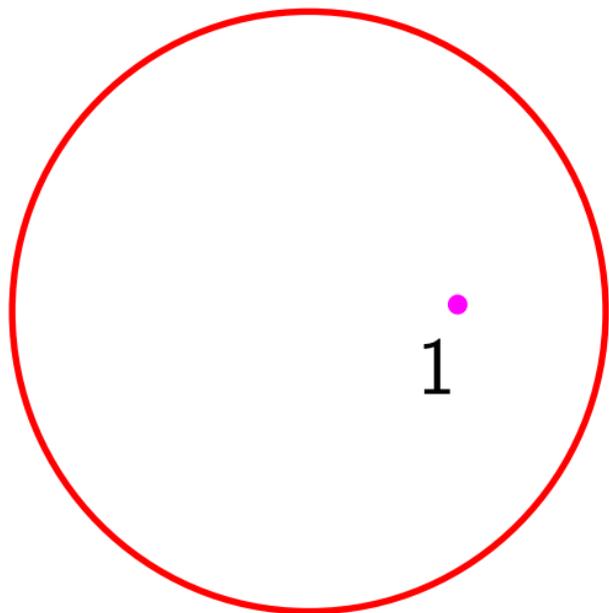


poids multiplicatifs



bissecteur circulaire

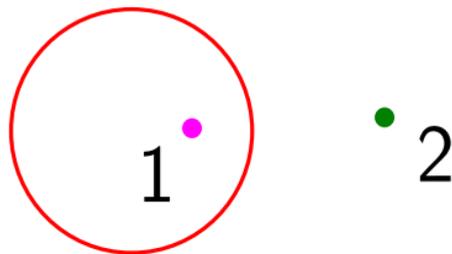
poids multiplicatifs



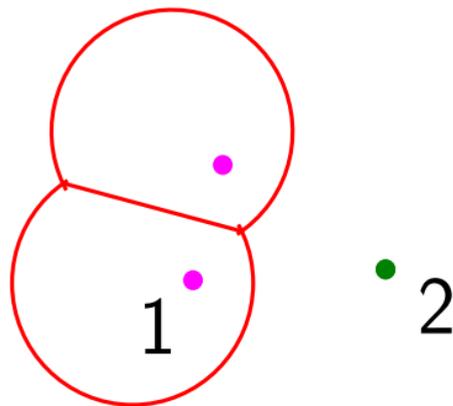
• 2

bissecteur circulaire

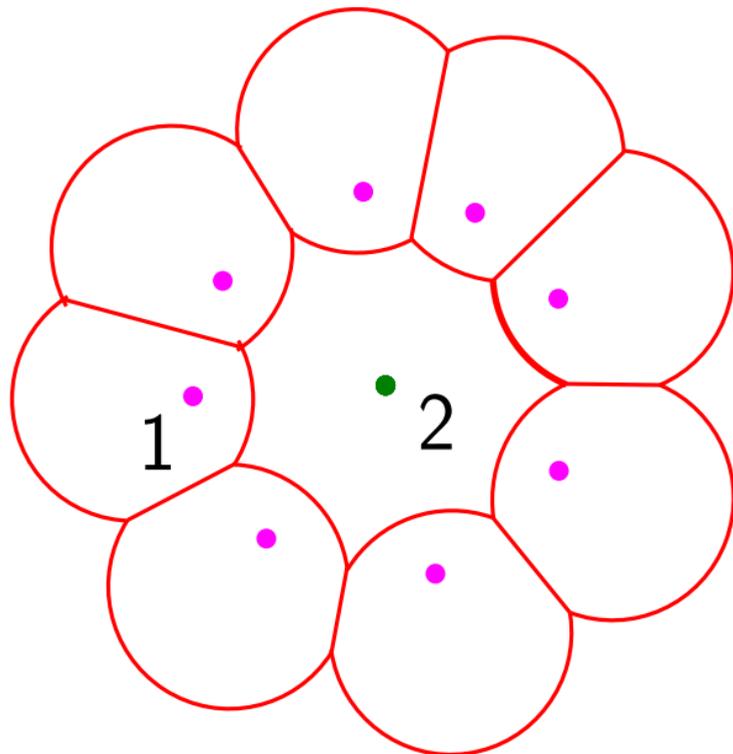
# poids multiplicatifs



# poids multiplicatifs



# poids multiplicatifs



région non connexe

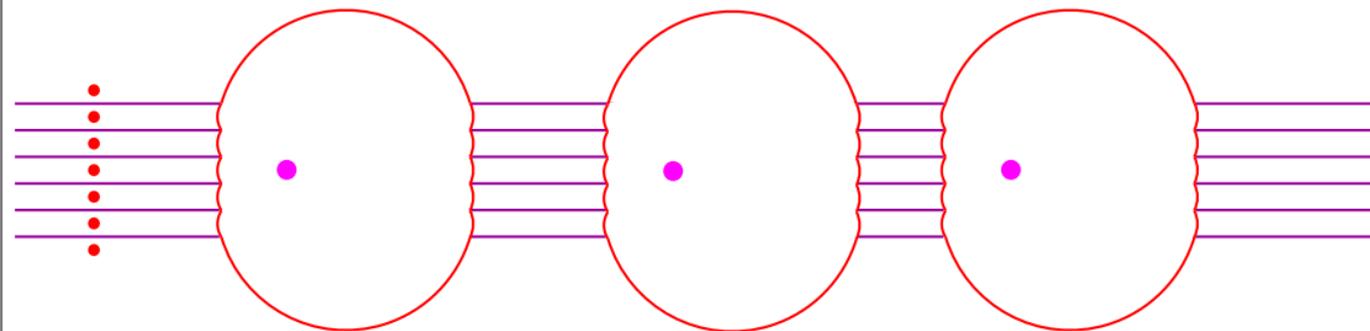
# poids multiplicatifs



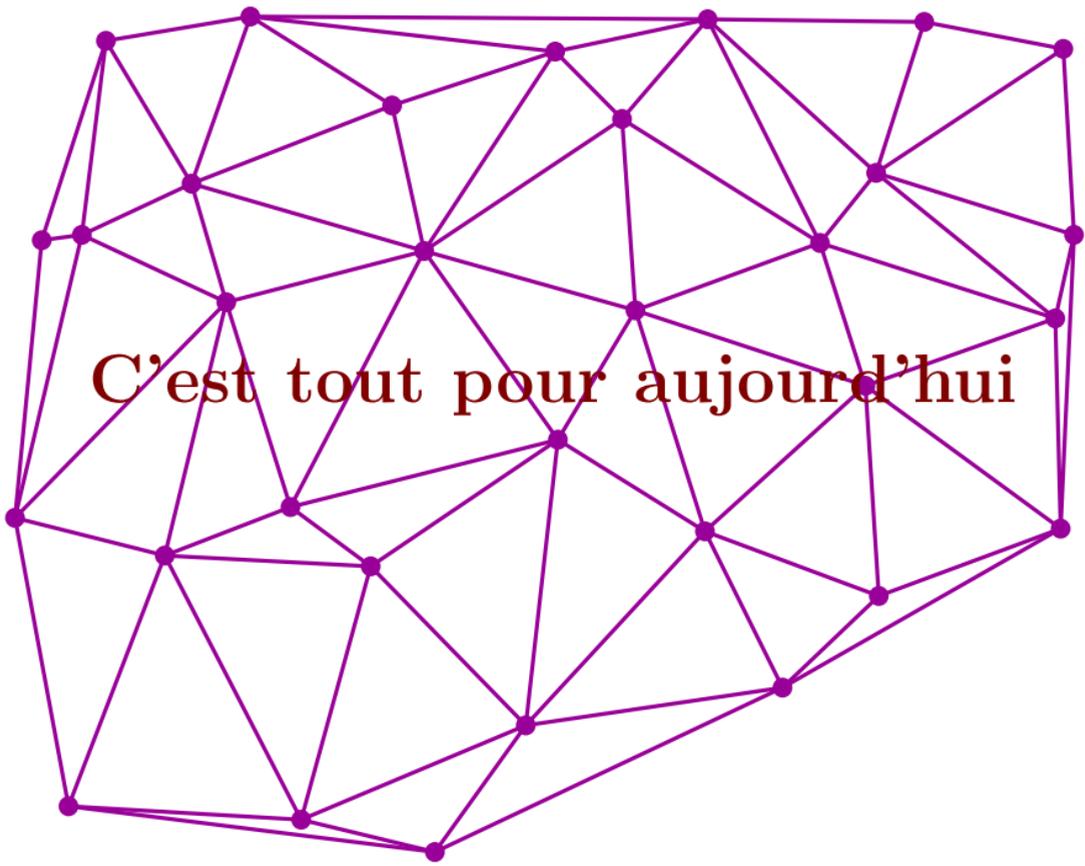
# poids multiplicatifs



poids multiplicatifs



taille quadratique



**C'est tout pour aujourd'hui**