

Diagrammes de Voronoi, triangulations et maillage

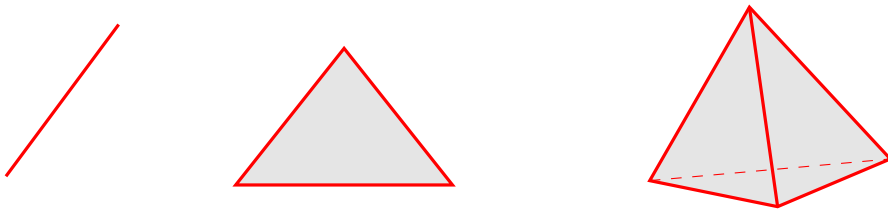
MPRI - 2006-2007 cours C2-14

1. Enveloppes convexes. Dualité. Algorithmes incrémentaux randomisés. Arrangement d'hyperplan
2. [Triangulations - Diagrammes de Voronoi - Triangulations de Delaunay](#)
3. Diagrammes de puissance, triangulations régulières et autres diagrammes
4. Triangulations contraintes et Delaunay contraintes
5. Maillages par raffinement de Delaunay des domaines plans
6. Maillages de domaine 3D - Qualité des maillages
7. Approximation de surfaces
8. Interpolation et reconstruction de surfaces

Triangulations

Simplexe

d -simplexe = env. conv. de $d + 1$ points indépendants



un d -simplexe est de dimension d

$S(T)$ = ensemble des sommets d'un d -simplexe
 $\forall S' \subset S(T)$, $\text{conv}(S')$ est une face du simplexe T

un d -simplexe a $\binom{d+1}{k+1}$ faces de dimension k .

Complexe

complexe simplicial \mathcal{C} : ensemble de simplexes, tel que

1. $\forall T \in \mathcal{C}$, faces de $T \in \mathcal{C}$
2. $\forall T, T' \in \mathcal{C}$, $T \cap T' = \emptyset$ ou une face commune

Dimension du complexe \mathcal{C} : dimension maximale des simplexes \mathcal{C}

Domaine du complexe \mathcal{C} : union des simplexes de \mathcal{C}

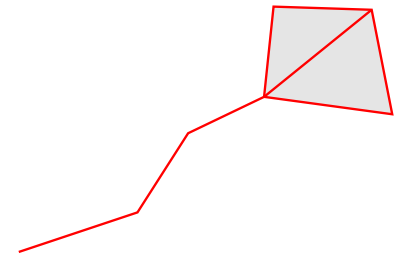
Complexe plongé \neq complexe abstrait

\mathcal{S} = ensemble d'objets

Complexe abstrait \mathcal{C} : ensemble de partie de \mathcal{S} tel que

1. si $T \in \mathcal{C}$, $\forall T' \subset T$, $T' \in \mathcal{C}$

complexe cellulaire : meme définition avec des cellules convexes



Complexe pur \mathcal{C} : tout simplexe de \mathcal{C} est une face d'un simplexe de dimension maximale

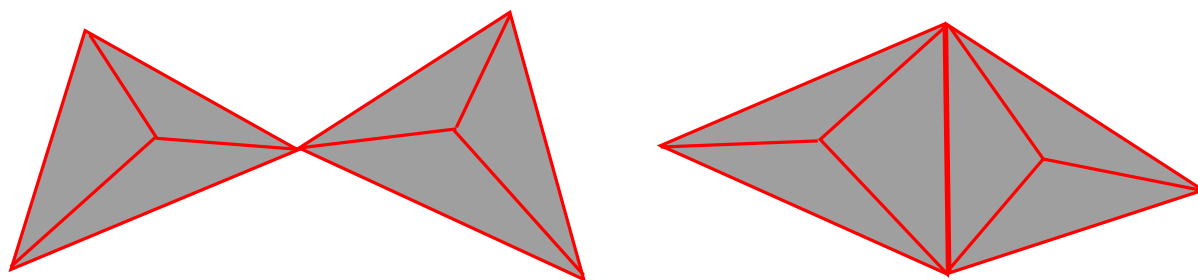
Face singulière :

F une k -face du complexe \mathcal{C}

Etoile de F dans \mathcal{C} : Complexe formé des faces de \mathcal{C} contenant F
+ leur sous-faces

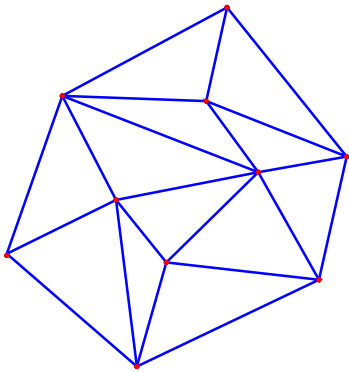
Coque de F dans \mathcal{C} : Complexe formé des faces de l'étoile de F
ne contenant pas F

F est singulière si la coque de F n'est ni une boule ni une sphère topologique

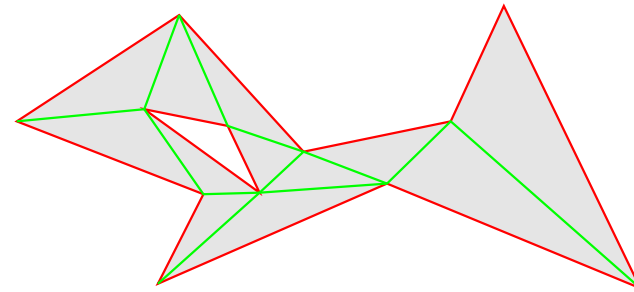


Triangulation

Triangulation : complexe pur, connexe et sans face singulière



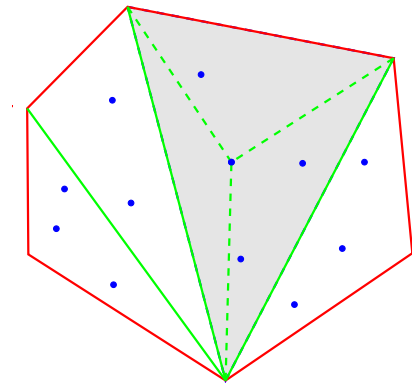
Triangulation d'un ensemble de points



Triangulation d'un polygone

Existence des triangulations d'un ensemble de points

Exemple : triangulations incrémentales en 3D



1. trianguler l'enveloppe convexe
2. pour chaque point interne P_i ,
localiser P_i dans un tétraèdre T
 \forall facette F_j de T , créer le tétra. $\text{conv}(P_i, F_j)$

Nombre triangulations d'un ensemble de points

En dimension 2 (voir Cours M. Pocchiola)

- nb de triangulations de $n + 2$ points en position convexe

$$\text{nth Catalan } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

- nb de triangulations de n points $O(59^n/n^6)$

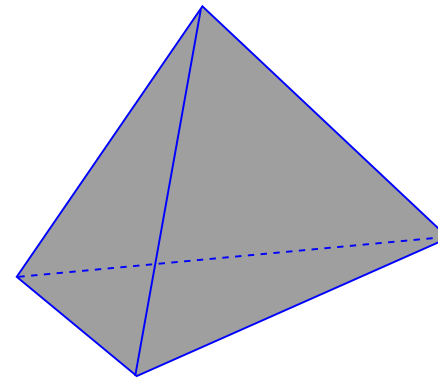
Combinatoire des 2-triangulations

Surface triangulée de genre h

n sommets, e arêtes, f facettes

formule d'Euler : $n - e + f = 2 - 2h$

incidences arêtes/facettes : $3f = 2e$



$$f = 2n - 4 + 4h$$

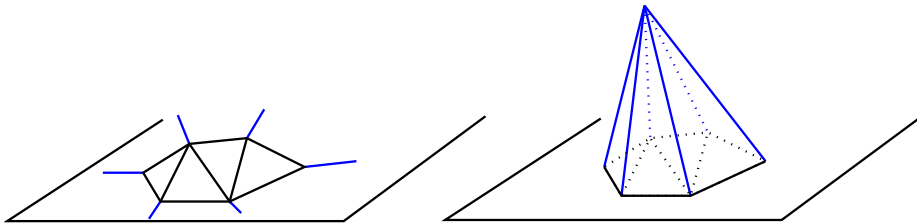
$$e = 3n - 6 + 6h$$

Combinatoire des 2-triangulations

2-disque topologique

(ex : triangulation d'un ens. de n points du plan avec n_c points sur l'enveloppe convexe)

n sommets, e arêtes, f facettes



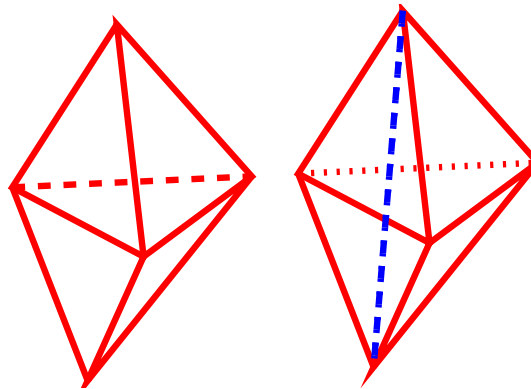
On se ramène à une 2-sphère triangulée avec N sommets, E arêtes, F facettes

$$\left. \begin{array}{l} N = n + 1 \\ E = e + n_c \\ F = f + n_c \\ F = 2N - 4 \\ E = 3N - 6 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} f = 2n - 2 - n_c \\ e = 3n - 3 - n_c \end{array}$$

Conséquence : En 2D, toutes les triangulations d'un ensemble de points donné ont le même nombre de facettes et d'arêtes

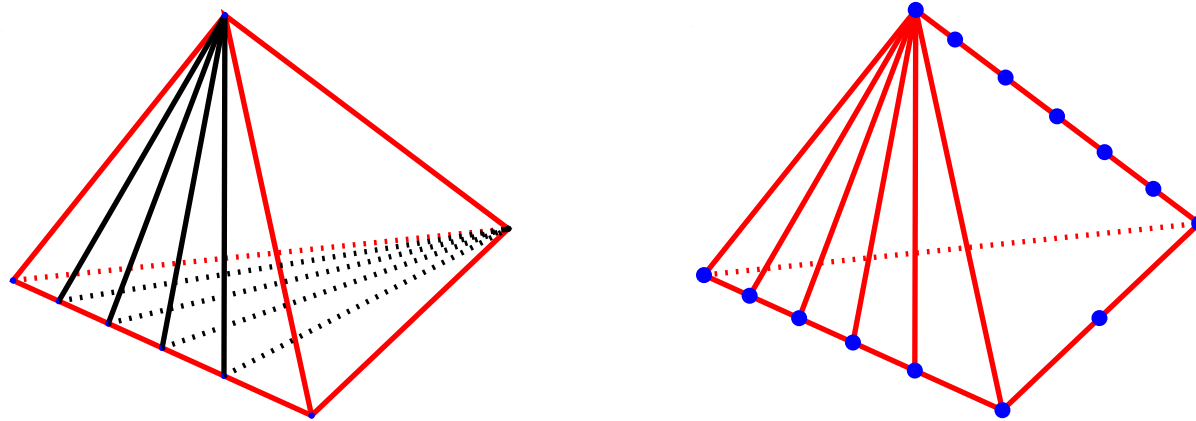
Combinatoire des triangulations d'un ens de points dans \mathbb{R}^3

En 3D, deux triangulations d'un même ensemble de points n'ont pas nécessairement le même nombre de faces



Combinatoire des triangulations d'un ens de points dans \mathbb{R}^3 (suite)

Une 3-triangulation à n sommets peut avoir $\Omega(n^2)$ faces

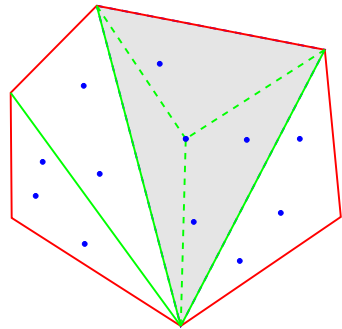


Un même ensemble de points peut admettre des triangulations linéaires et quadratiques

Combinatoire des triangulations d'un ens de points dans \mathbb{R}^3 (suite)

Si les points sont en **position générale**, il existe une triangulation **linéaire**

Triangulation incrémentale



1. trianguler l'env. conv.
(par étoilement a partir d'un sommet v)
2. pour chaque sommet interne P_i ,
localiser P_i dans un tétraèdre T
 \forall facette F_j de T , créer le tétra. $\text{conv}(P_i, F_j)$

n_e sommets sur env. conv., n_i sommets internes, f_e facettes sur env.conv.

Euler pour l'enveloppe convexe : $f_e = 2n_e - 4$

Triangulation de l'env. conv. : $t = 2n_e - 4 - \delta$ (δ degré de v)

Triangulation finale : $t = 2n_e - 4 - \delta + 3n_i = 3n - n_e - \delta - 4 \leq 3n - 11$

Combinatoire des triangulations d'un ens de points dans \mathbb{R}^3 (suite)

n, m, f, t nb de sommets, arêtes, facettes et tretraèdres

n_e, m_e, f_e nb de sommets, arêtes et facettes sur env. conv.

n_i, m_i, f_i nb de sommets, arêtes et facettes internes

Relation d'Euler : $n - m + f - t = 1$

Bord de l'env. conv. : $f_e = 2n_e - 4$

Incidences facettes/tétra : $4t = 2f - f_e$

$$t = m - n - n_e + 3$$

Bord de l'env. conv. : $m_e = 3n_e - 6$

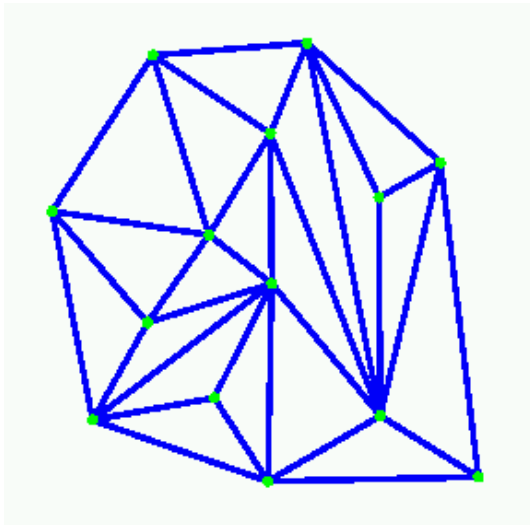
aretes/sommets internes : $4n_i \leq 2m_i$

$$3n_e - 6 + 2n_i \leq m = m_e + m_i \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

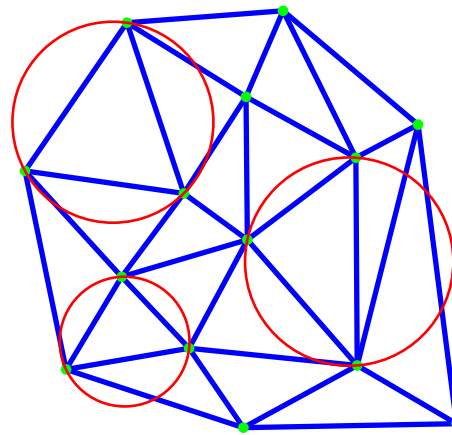
$$n - 3 \leq t \leq \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n_e + 3$$

**Diagrammes de Voronoi
Triangulations de Delaunay**

Triangulation de Delaunay



Triangulation
incrémentale



Triangulation
de Delaunay

Diagramme de Voronoï

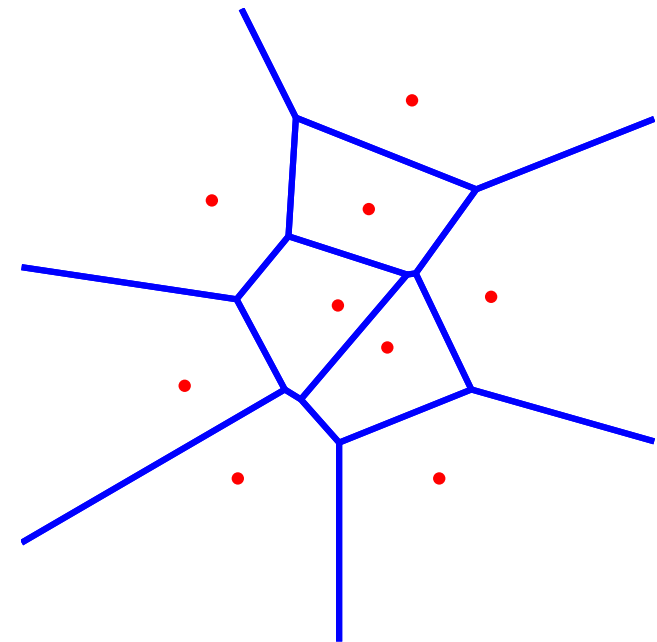
$E = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ ens. de points de \mathbb{R}^d

Complexe cellulaire $\text{Vor}(E)$

une cellule par point $V(p_i, E)$ ou $V(p_i)$

$$V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$$

$V(p_i)$ est convexe



Dualité : Diagramme de Voronoi - Triangulation de Delaunay

$E = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ ens. de points

Diagramme de Voronoi $\text{Vor}(E)$

Nerf de $\text{Vor}(E)$: complexe abstrait $\mathcal{N}(E)$

$$\mathcal{N}(E) = \{T \subset E / \bigcap_{p \in T} V(p) \neq \emptyset\}$$

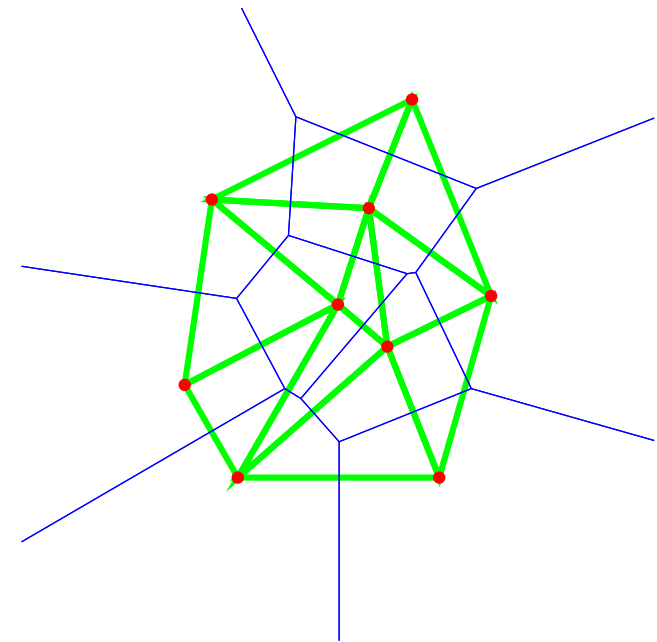
Complexe de Delaunay : $\text{CDel}(E)$

$$\forall T \in \mathcal{N}(E) \longleftrightarrow \text{conv}(T) \in \text{DDel}(E)$$

Triangulation de Delaunay $\text{Del}(E)$

$\text{Del}(E) = \text{CDel}(E)$ si E en position générale
triangler les régions convexes sinon

Objectif : montrer que $\text{Del}(E)$ est bien une triangulation de E

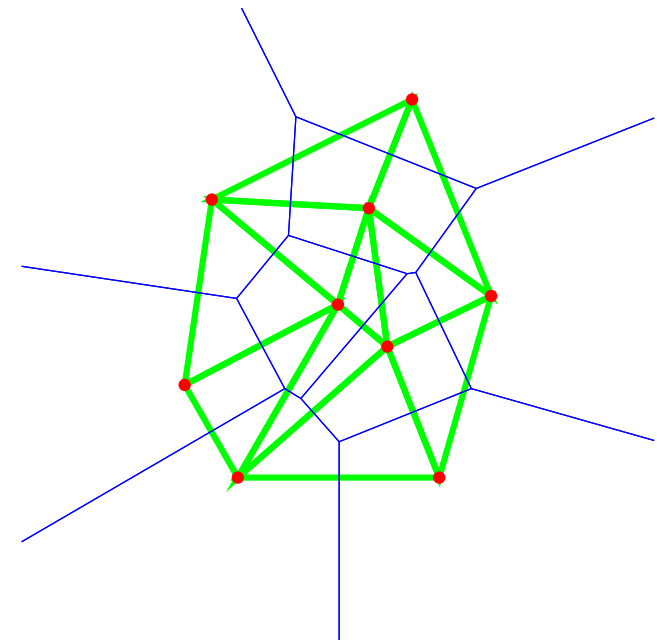


Caractérisation des faces de Delaunay

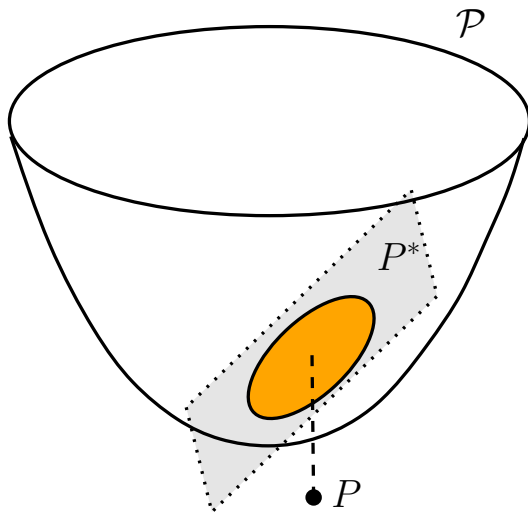
$E = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ ens. de points

Soit $T \subset E$ formé de points indépendants, $\text{conv}(T)$ est un simplexe de Delaunay ssi il existe une sphère (dite circonscrite) passant par tous les points de T et n'englobant aucun point de $E \setminus T$

Si E est en position générale, la triangulation de Delaunay $\text{Del}(E)$ est formée par tous les simplexes de Delaunay.



Dualité dans \mathbb{R}^{d+1}



Paraboloïde $\mathcal{P} : x_{d+1} = x^2$

eq. projective : $\mathbf{X}^t \Delta \mathbf{X} = 0$ $\Delta = \begin{bmatrix} I & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

polarité dans $\mathbb{P}^{d+1} : \mathbf{P} \longrightarrow \text{hyperplan } \mathbf{P}^* : \mathbf{P}^t \Delta \mathbf{X} = 0$
 dans $\mathbb{R}^{d+1} : P \longrightarrow P^* : x_{d+1} + p_{d+1} - 2p \cdot x = 0$

$$\begin{aligned}
 P \in \mathcal{P} &\iff P^* \text{ tangent à } \mathcal{P} \text{ en } P \\
 P \in Q^{*+} &\iff p_{d+1} + q_{d+1} \geq 2p \cdot q \iff Q \in P^{*+} \\
 P \in Q^* &\iff p_{d+1} + q_{d+1} = 2p \cdot q \iff Q \in P^*
 \end{aligned}$$

Diagrammes de Voronoi et polytopes



$$p \in \mathbb{R}^d \longrightarrow \phi(p) = \{p, p^2\} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$$\phi(p) \in \mathcal{P}$$

$$\xrightarrow{\text{polarite}} \phi(p)^* : x_{d+1} = 2p \cdot x - p^2$$

$$\phi(p)^* \text{ tangent à } \mathcal{P} \text{ en } \phi(p)$$

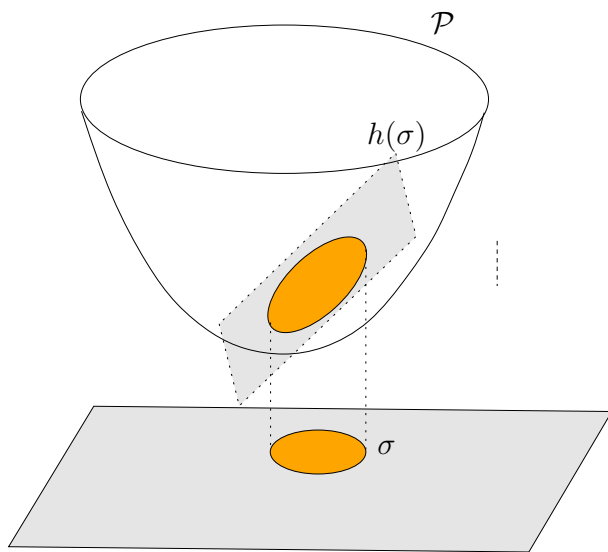
$$(x - p_i)^2 < (x - p_j)^2$$

$$\iff 2p_i \cdot x - p_i \cdot p_i > 2p_j \cdot x - p_j \cdot p_j$$

$$\iff \phi(p_i)^* \text{ au dessus de } \phi(p_j)^* \text{ en } x$$

Les faces de $\text{Vor}(E)$ sont les projetées
des faces de $\mathcal{V}(E) = \bigcap_i \phi^{*+}(p_i)$

Espace des sphères



σ sphere de \mathbb{R}^d $\rightarrow \phi(\sigma) \in \mathbb{R}^{d+1}$
 Eq : $x^2 - 2c \cdot x + s = 0$ $\rightarrow \phi(\sigma) = (c, s)$
 $\rightarrow \phi(\sigma)^*$ hyperplan dual
 d'eq. $x_{d+1} - 2c \cdot x + s = 0$

1. Si $\sigma = \{p\}$, $\phi(\sigma)^*$ est l'hyperplan tangent au paraboloïde \mathcal{P}
2. L'intersection de $\phi(\sigma)^*$ avec \mathcal{P} se projette sur $x_{d+1} = 0$ selon σ

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) = 0 &\iff x^2 - 2c \cdot x + s = 0 \iff \phi(x) \in \phi(\sigma)^* \\
 \sigma(x) < 0 &\iff x^2 - 2c \cdot x + s < 0 \iff \phi(x) \in \phi(\sigma)^{-} \\
 \sigma(x) > 0 &\iff x^2 - 2c \cdot x + s > 0 \iff \phi(x) \in \phi(\sigma)^{+}
 \end{aligned}$$

Triangulations de Delaunay et polytopes

$$E = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{D}(E) = \text{conv}^-(\{\phi(p_i)\})$$

p_0, \dots, p_k sont sommets d'une face Delaunay

$\Leftrightarrow \exists$ une sphère σ passant par les $k + 1$ points et n'englobant aucun des autres p_i

$\Leftrightarrow \phi(p_0), \dots, \phi(p_k) \in \phi(\sigma)^*$ et $\forall i, \phi(p_i) \in \phi(\sigma)^{*\dagger}$

$\Leftrightarrow \text{conv}(\phi(p_0), \dots, \phi(p_k))$ est une face de $\mathcal{D}(E)$

Th. Tout ensemble fini E de points a une triangulation de Delaunay
Celle-ci est unique si les points sont en position générale

Polytopes duaux dans \mathbb{R}^{d+1}

$$E = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

$$\text{conv}^-(E) = \text{env. inf. de } \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

$$\text{conv}^-(P_1, P_2, \dots, P_n) \longleftrightarrow P_1^{*+} \cap P_2^{*+} \cap \dots \cap P_n^{*+}$$

$$F^* \text{ (} d - k \text{)-face de } P_1^{*+} \cap P_2^{*+} \cap \dots \cap P_n^{*+}$$

$$H_F \text{ env. affine de } F : H_F = P_1^* \cap P_2^* \cap \dots \cap P_{k+1}^*$$

$$X \in F^*$$

$$j \in \{1, 2, \dots, k + 1\}, X \in P_j^* \iff P_j \in X^*$$

$$j \notin \{1, 2, \dots, k + 1\}, X \in P_j^{*+} \iff P_j \in X^{*+}$$

X^* hyperplan support $\text{conv}^-(E)$

$F = \text{conv}(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{k+1})$ face de $\text{conv}^-(E)$

Bijection entre les faces

$$F \text{ face de } \text{conv}^-(P_1, P_2, \dots, P_n) \longleftrightarrow F^* \text{ face de } P_1^{*+} \cap P_2^{*+} \cap \dots \cap P_n^{*+}$$

$$\dim(F) = k \longleftrightarrow \dim(F^*) = d - k$$

$$F \subset G \iff G^* \subset F^*$$

Dualité dans l'espace des sphères

$$E = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{D}(E) = \text{conv}^-(\{\phi(p_i)\})$$

$$\mathcal{V}(E) = \bigcap_i \phi(p_i)^{*\dagger}$$

$$\mathcal{V}(E) = \phi(p_1)^{*\dagger} \cap \dots \cap \phi(p_n)^{*\dagger} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{D}(E) = \text{conv}^-(\{\phi(p_1), \dots, \phi(p_n)\})$$



Diagramme de Voronoi



\longleftrightarrow Triangulation de Delaunay

Caractérisation locale des triangulations de Delaunay

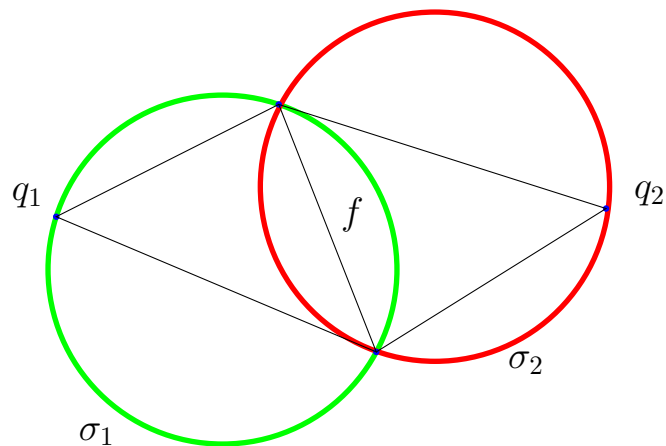
Arête localement Delaunay :

une arête e incidente à deux triangles t_1 et t_2

σ_1 (σ_2) cercle circonscrit à t_1 (t_2)

$$q_1 \notin \sigma_2 \iff q_2 \notin \sigma_1 \iff \hat{q}_1 + \hat{q}_2 < \pi$$

e localement Delaunay ssi $q_1 \notin \sigma_2$



$$\sigma_1(q_2) > 0$$

$$\iff$$

$$\sigma_2(q_1) > 0$$

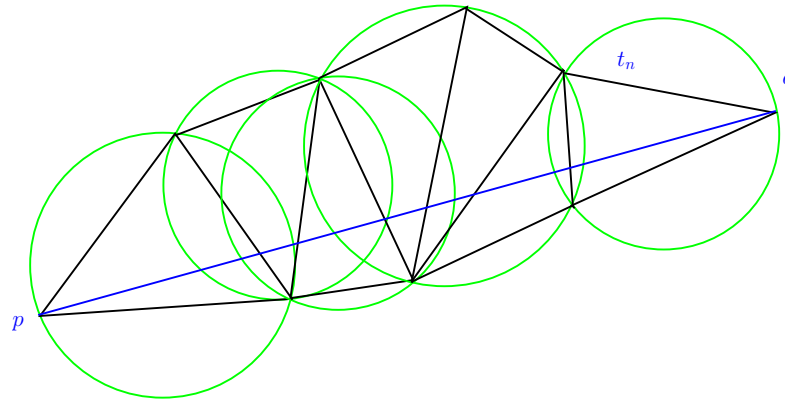
Théorème Une triangulation dont toutes les arêtes sont localement Delaunay est une triangulation de Delaunay

Preuve 1

$\phi(q_2) \in \phi(\sigma_1)^{*\dagger}$ et $\phi(q_1) \in \phi(\sigma_2)^{*\dagger}$

+ théorème sur les fonctions localement convexes à support convexe

Preuve 2



p un sommet, t_n un triangle et q un point $\in t_n$

$t_1, t_2 \dots t_n$ triangle traversés par pq

$\sigma_i(p)$ puissance du point p par rapport à σ_i circonscrit à t_i

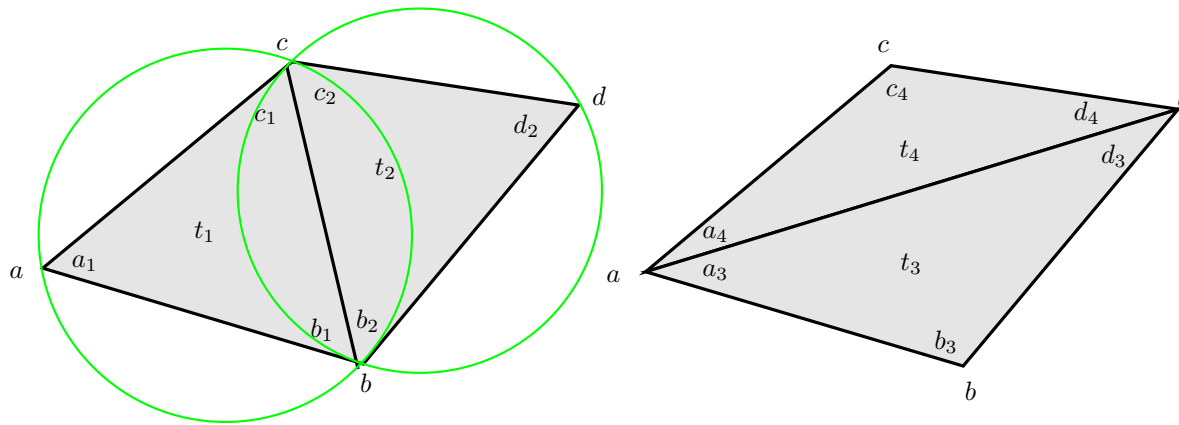
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1(p) \leq \sigma_2(p) \leq \dots \leq \sigma_n(p) \\ \sigma_1(p) = 0 \end{array} \right\} \implies 0 \leq \sigma_n(p) \quad (1)$$

Optimalité angulaire des triangulations de Delaunay 2D

Vecteur angulaire d'une triangulation $T(E)$

$$\text{ang}(T(E)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3t}), \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{3t}$$

Optimalité : Etant donné un ensemble fini E de points du plan, la triangulation dont le vecteur angulaire est maximal pour l'ordre lexicographique est une triangulation de Delaunay de E



Preuve.

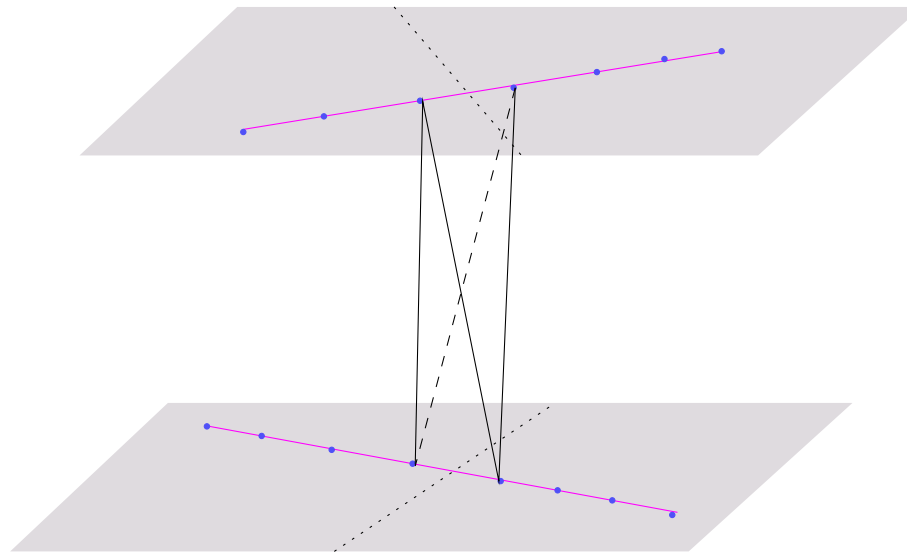
si (t_1, t_2) est la paire régulière,
 tout angle de (t_1, t_2) est minoré par un angle de (t_3, t_4)
 $\Rightarrow \text{ang}(t_1, t_2) \geq \text{ang}(t_3, t_4)$

$$a_1 = a_3 + a_4 \text{ et } d_2 = d_3 + d_4,$$

Si (t_1, t_2) est régulière, $c_1 \geq d_3$, $b_1 \geq d_4$, $b_2 \geq a_4$, $c_2 \geq a_3$

Soit $T_M(E)$ la triangulation de E qui maximise le vecteur angulaire.
 Si $T_M(E)$ n'est pas Delaunay, il existe une arête non localement Delaunay
 dont le flip augmente le vecteur angulaire.

Complexité des diagrammes de Voronoï et des triangulations de Delaunay



cas le pire = $\Theta\left(n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}\right)$ (Th. de la borne sup. [Mc Mullen 1970])

Algorithmique
des diagrammes de Voronoi
et
triangulations de Delaunay

Représentation des triangulations

Une possibilité (implantée CGAL) :

Rep. basée sur d -faces et sommets.

Pas de représentation explicite des faces de dimension intermédiaire.

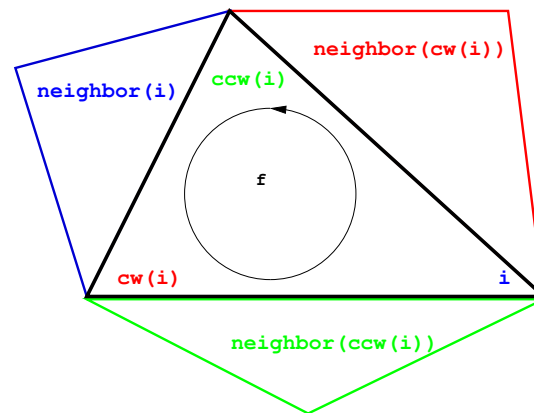
Vertex

Face* *v_face*

Face

Vertex* *vertex[3]*

Face* *neighbor[3]*



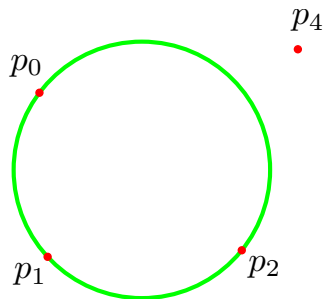
Algorithmique Voronoi - Delaunay

Bornes inférieures :

complexité $\Omega(n \log n + n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil})$

degré algébrique $d + 2$

Le prédicat de base



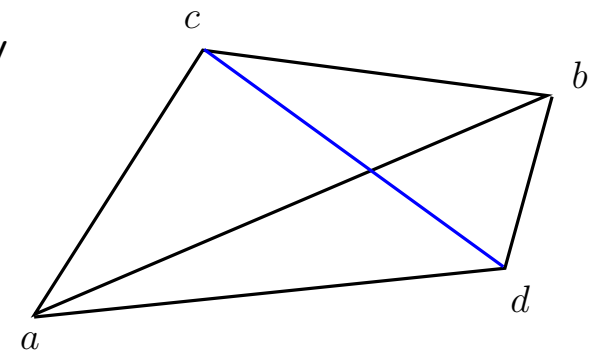
$\text{incircle}(p_i, p_j, p_k, p_l) =$

sign of

1	1	1	1
x_i	x_j	x_k	x_l
y_i	y_j	y_k	y_l
$x_i^2 + y_i^2$	$x_j^2 + y_j^2$	$x_k^2 + y_k^2$	$x_l^2 + y_l^2$
1	1	1	
x_i	x_j	x_k	
y_i	y_j	y_k	

Un algorithme par bascule d'arêtes (plan)

1. Trianguler E
2. Créer une liste Q des arêtes non localement Delaunay
3. **Tant que** $Q \neq \emptyset$
 - extraire une arête $[ab]$ de Q
 - basculer $[ab]$ en $[cd]$
 - mise à jour de Q :
 - ôter $[ab]$
 - ± arêtes du quadrilatère $[adbc]$

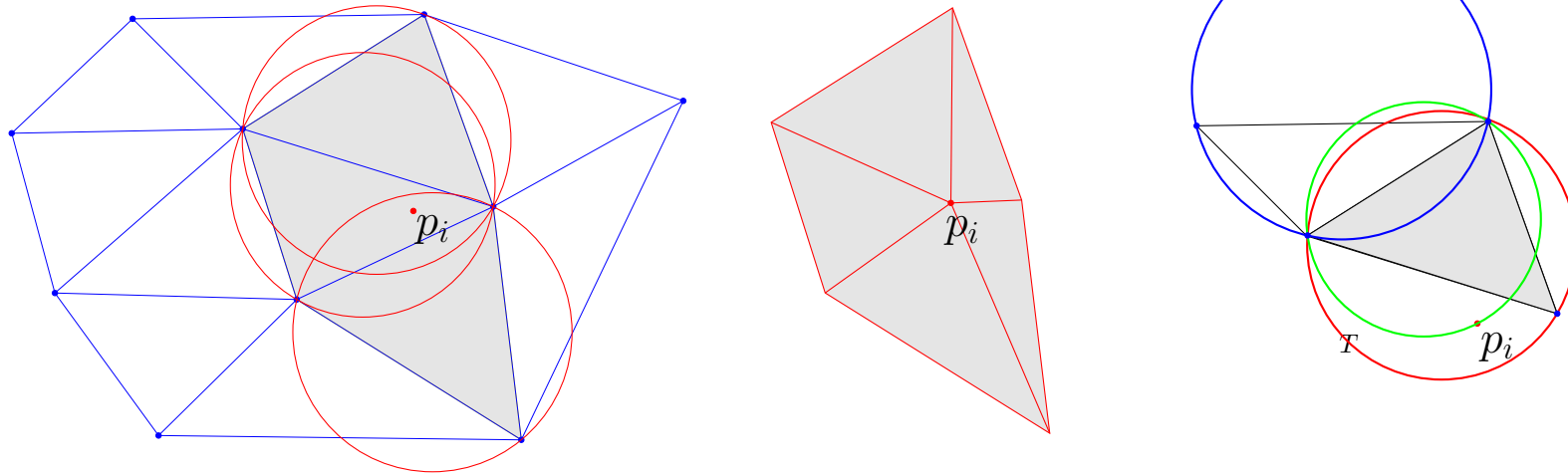


Complexité : $\Theta(n^2)$

Algorithme incrémental

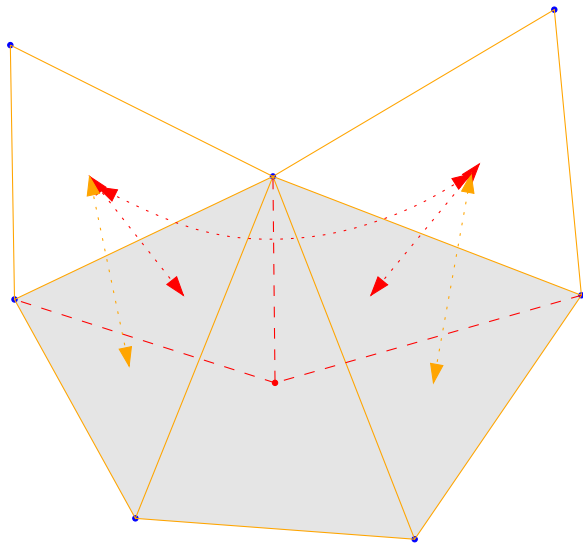
Insertion d'un nouveau point p_i :

1. Localisation : trouver tous les triangles en conflit avec p_i
i.d. dont le cercle cc inclut p_i
2. Mise à jour : construire les nouveaux triangles



Très simple, n'utilise que le prédicat `incircle`,
se généralise en toutes dimensions

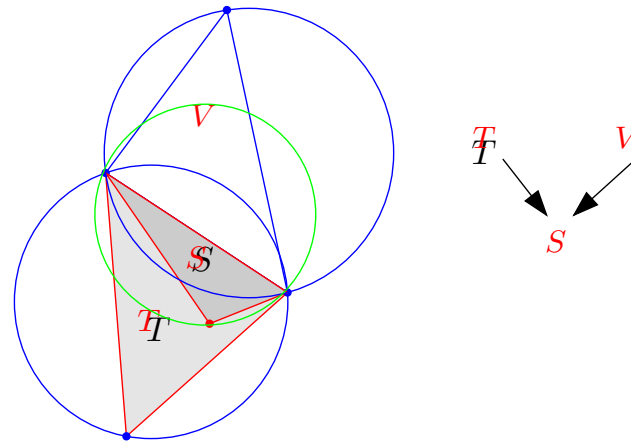
Mise à jour du graphe d'adjacence



Coût de la mise à jour = $O(\# \text{ triangles créés ou détruits})$
= $O(\# \text{ triangles créés})$

Localisation : l'arbre de Delaunay

mémoire l'historique de la construction

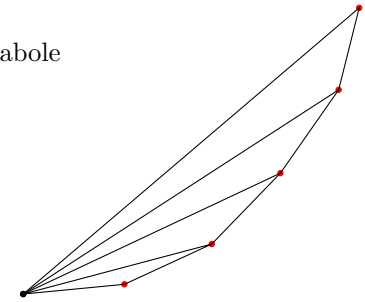


Les conflits sont trouvés par un parcours de l'arbre

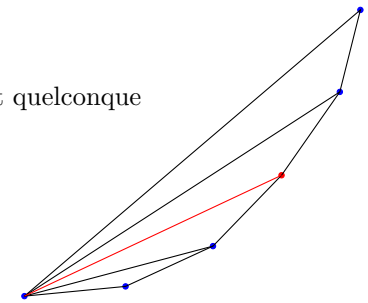
Analyse dans le cas le pire

Ordre défavorable \longrightarrow coût $\Theta(n^2)$

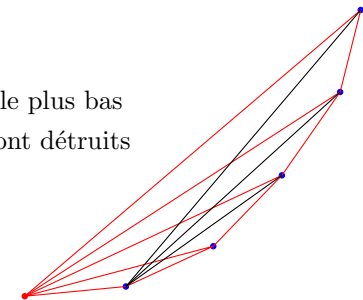
n points sur une parabole



insertion d'un point quelconque
un triangle détruit



insertion du point le plus bas
tous les triangles sont détruits



Randomisation

Hypothèses de l'analyse randomisée

- ordre d'insertion des points : toutes les permutations sont supposées équiprobables.
- aucune hypothèse n'est faite sur la distribution spatiale des points

Résultat déterministe

- calcule la triangulation de Delaunay des points donnés
- le temps de calcul dépend des choix aléatoires et est analysé *en moyenne*

L'algorithme randomisé construit la triangulation de Delaunay de n points du plan en temps $O(n \log n)$ et utilise un espace mémoire $O(n)$

Analyse randomisée de la mise à jour de la triangulation et de la taille de l'arbre de Delaunay

E	ens. de points
$R \subset E$	sous-ens. aléatoire de taille r
$\mathcal{T}(E)$	ens des triangles définis par les points de E
$P_r(t)$	proba pour que le triangle $t \in \mathcal{T}(E)$ soit dans $\text{Del}(R)$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(E)} P_r(t) = \text{Esp}(|\text{Del}(R)|) = O(r)$$

Probabilité pour que $t \in \mathcal{T}(E)$ soient créé par l'algo à l'étape r : $\frac{3}{r}P_r(t)$

Esp(nb triangles créés à l'étape r) : $\sum_{t \in \mathcal{T}(E)} \frac{3}{r}P_r(t) = O(1)$

Esp(nb total triangles créés et supprimés) = $O(n)$

Esp(coût des mises à jours) = $O(n)$

E(nb de noeuds et d'arcs de l'arbre de Delaunay) = $O(n)$

Analyse randomisée du coût des localisations

$|\sigma(t)|$ nb de points de E en conflit avec t

Esp(nb de noeuds de l'arbre en conflits avec p_n)

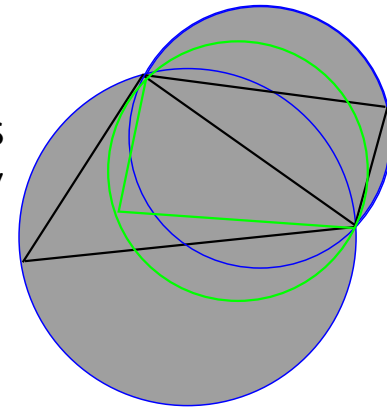
$$\begin{aligned} &= \sum_{t \in T(E)} \sum_{r=1 \dots n-1} P_r(t) \frac{3}{r} \frac{|\sigma(t)|}{(n-r)} \\ &= \sum_{r=1 \dots n-1} \frac{3}{r} \sum_{t \in T(E)} P_r(t) \frac{|\sigma(t)|}{(n-r)} \\ &= \sum_{r=1 \dots n-1} \frac{3}{r} \text{Esp}(\text{nb. triangles détruits á l'étape } (r+1)) \\ &= \sum_{r=1 \dots n-1} \frac{O(1)}{\binom{r}{r}} = O(\log n) \end{aligned}$$

Coût de la localisation \neq du nombre de noeuds de l'arbre en conflit avec p_n
(nb de fils d'un noeud n'est pas borné)

Analyse randomisée du coût des localisations (suite)

birégions :

- union des disques circonscrits à 2 triangles adjacents
- en bijection avec les arêtes de l'arbre de Delaunay précédent
- déterminées par 4 points

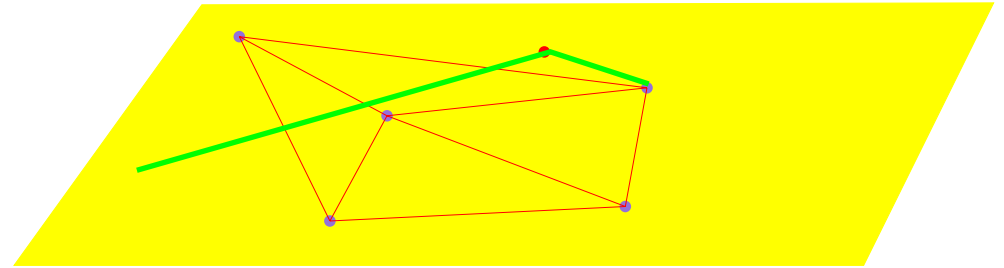


Arbre des birégions

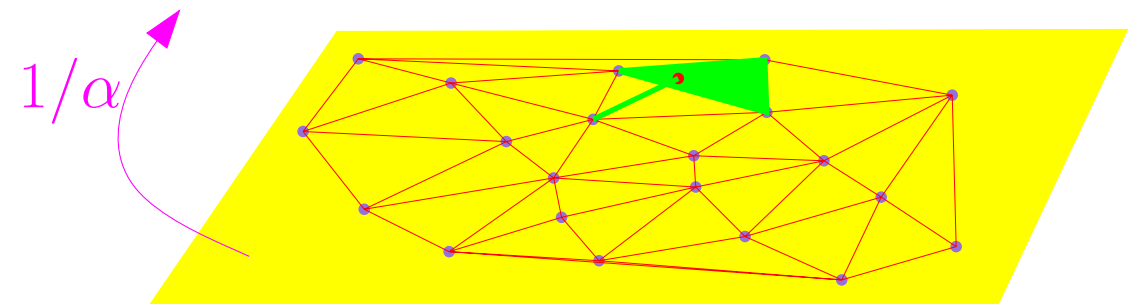
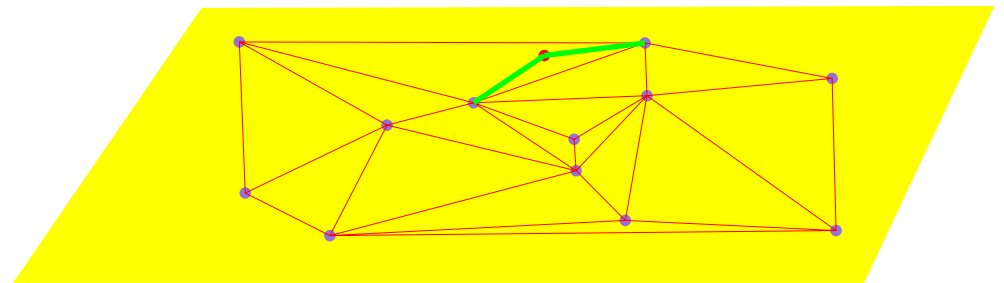
- chaque birégions est accroché à 1 ou 2 birégions
- chaque noeud de l'arbre des birégions a un nombre borné de fils.

Esp(nb d'arêtes visitées à l'étape n) : $O(\log n)$
Esp(coût des localisations) : $O(n \log n)$

Structure de Localisation
Hierarchie de Delaunay



Location structure



Structure de Localisation

Hierarchie de Voronoi

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \dots \subset \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$$

\mathcal{S}_l échantillonné avec proba $\beta \rightarrow \mathcal{S}_{l-1}$

nb de cellules traversées l'étage l
 $\leq k$ si l'objet le \dagger proche dans \mathcal{S}_{l-1}
est le k -ième dans \mathcal{S}_l

en moyenne

$$\leq \sum_{k=1}^{n_l} k(1 - \beta)^{k-1} \beta$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_l} k(1 - \beta)^{k-1} = \frac{1}{\beta}$$

