

## Reconstruction

Le but général est de montrer les liens entre différents algorithmes de reconstruction et de souligner la connexion qui existe entre ces algorithmes et les singularités de la fonction qui mesure la distance d'un point de l'espace à l'échantillon. Pour simplifier, on se place en dimension 2 et on envisage le problème de la reconstruction d'une courbe lisse fermée à partir d'un échantillon de points.

Dans tout ce qui suit  $\mathcal{C}$  est donc une courbe lisse fermée et  $\mathcal{P}$  un échantillon de points sur  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathcal{O}$  le domaine borné par  $\mathcal{C}$ . Pour tout point  $x$  de  $\mathcal{C}$ , on note  $\text{lfs}(x)$  la distance de  $x$  à l'axe médian de  $\mathcal{C}$ .

Un échantillon  $\mathcal{P}$  de points de  $\mathcal{C}$  est un  $\epsilon$ -échantillon si tout point  $x$  de  $\mathcal{C}$  est à une distance au plus  $\epsilon \text{lfs}(x)$  d'un point de  $\mathcal{P}$ . On suppose ici que  $\mathcal{P}$  est un  $\epsilon$ -échantillon de  $\mathcal{C}$  pour un  $\epsilon$  suffisamment petit. On suppose aussi que  $\mathcal{P}$  est en position générale, c'est à dire ne contient aucun sous-ensemble de 3 points alignés ou de 4 points cocycliques.

On rappelle que la méthode du Delaunay restreint, exposée en cours, consiste à construire la triangulation de Delaunay,  $\text{Del}(\mathcal{P})$ , des points de  $\mathcal{P}$ , puis la triangulation de Delaunay restreinte,  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ . La triangulation de Delaunay restreinte  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  est constituée par les arêtes de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  dont l'arête de Voronoï duale intersecte  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{P}$  est un  $\epsilon$ -échantillon de  $\mathcal{C}$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit,  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  est homéomorphe à  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 1. Reconstruction par le Crust.** La méthode du crust consiste à construire le diagramme de Voronoï,  $\text{Vor}(\mathcal{P})$ , des points de  $\mathcal{P}$ , puis la triangulation de Delaunay  $\text{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$  de l'ensemble  $\mathcal{P} \cup \mathcal{V}$  où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des sommets du diagramme  $\text{Vor}(\mathcal{P})$ . Le crust est constitué par les arêtes de la triangulation  $\text{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{V})$  dont les deux sommets sont des points de  $\mathcal{P}$ .

- (a) Montrer que toute boule de Delaunay circonscrite à un triangle  $pqs$  de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  contient un point de l'axe médian de  $\mathcal{C}$  et a donc un rayon  $r \geq \frac{\text{lfs}(p)}{2}$ . En déduire que tout sommet de Voronoï de la cellule de  $p$  est à distance  $\geq \frac{\text{lfs}(p)}{2}$  de  $\mathcal{P}$ .
- (b) Montrer que toute arête de la triangulation restreinte  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  est une arête du crust.
- (c) Montrer que toute arête du crust est une arête de  $\text{Del}(\mathcal{P})$ .
- (d) Les arêtes du crust ne forment pas en général une variété. (i. e. un ensemble d'arêtes tel que tout sommet soit incident à exactement deux arêtes). Proposer une stratégie raisonnable pour extraire du crust une variété approximant

la courbe  $\mathcal{C}$ , sans avoir recours à un oracle capable de tester si une arête appartient ou non à  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ ,

**Exercice 2. Reconstruction par le *Power Crust*.** Soient  $\mathcal{R}$  l'ensemble des sommets d'une boîte englobante de  $\mathcal{P}$ . Les sommets de  $\mathcal{R}$  sont supposés suffisamment éloignés de  $\mathcal{P}$  pour que tous les sommets de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$  soient des sommets de  $\mathcal{R}$  mais aussi pour que tout triangle de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  soit un triangle  $\text{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$ . Voir figure 1.

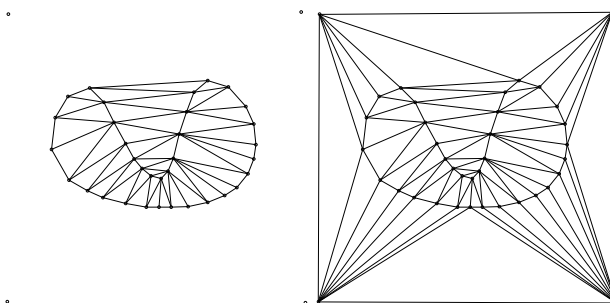


FIG. 1 – Triangulations de Delaunay  $\text{Del}(\mathcal{P})$  and  $\text{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$ .

- (a) On considère l'ensemble  $\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$  des sphères circonscrites aux triangles de  $\text{Del}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$  (sphères de Delaunay) et le diagramme de puissance,  $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$ , de ces sphères. Montrer que tout triangle de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  est une cellule du diagramme de puissance  $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$ .
- (b) L'algorithme du *power crust* classe les sommets de Voronoï du diagramme  $\text{Vor}(\mathcal{P})$  en deux sous ensembles : l'ensemble  $\mathcal{V}_i$  des sommets internes qui sont inclus dans  $\mathcal{O}$  et l'ensemble  $\mathcal{V}_e$  des sommets externes, i. e. non inclus dans  $\mathcal{O}$ . De même, on appelle *internes* les cellules du diagramme  $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$  associées aux sphères circonscrites à un triangle de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  dont le dual est un sommet de Voronoï interne de  $\text{Vor}(\mathcal{P})$ . Les autres cellules sont appelées *externes*. Le *power crust* est le bord de l'union des cellules internes de  $\Pi(\mathcal{S}(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}))$ .

Montrez que le *power crust* coïncide avec la triangulation Delaunay restreinte  $\text{Del}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ .

- (c) Finalement tout le problème de cette méthode réside dans la classification des sommets de  $\text{Vor}(\mathcal{P})$  en deux sous-ensembles  $\mathcal{V}_i$  et  $\mathcal{V}_e$ . Le résultat suivant est souvent utilisé pour classifier les sommets de Voronoï. Soit  $p$  un point de  $\mathcal{P}$ ,  $pq$  une arête de  $\text{Del}(\mathcal{P})$ ,  $t$  et  $t'$  les deux triangles de  $\text{Del}(\mathcal{P})$  incidents à  $pq$ , et  $v$  et  $v'$  les centres des sphères circonscrites à  $t$  et  $t'$  respectivement. Montrer que l'angle  $\widehat{vpv'}$  est un  $O(\epsilon)$  si  $v$  et  $v'$  sont des sommets de Voronoï de la même classe (interne ou externe)  $\pi - O(\epsilon)$  s'ils sont de classes différentes.

**Exercice 3. Reconstruction par la méthode du flux.**

La méthode s'intéresse à la fonction distance  $d(x)$  qui mesure la distance de  $x$  à  $\mathcal{P}$  :

$$d(x) = \min_{p \in \mathcal{P}} \|x - p\|$$

- (a) Montrer que la fonction  $d(x)$  est différentiable partout sauf sur les arêtes et aux sommets du diagramme de Voronoï, et calculer le gradient de  $d(x)$ .
- (b) Étudier le sens de variation de  $d(x)$  le long des arêtes de  $\text{Vor}(\mathcal{P})$ .
- (c) Montrer que les maxima de la fonction distance sont les sommets du diagramme de Voronoï qui sont inclus dans leur triangle dual.
- (d) La fonction  $d(x)$  n'est pas différentiable. Néanmoins on peut définir un champ de gradient généralisé  $\nabla(x)$  qui coïncide avec le gradient de  $d(x)$  partout où il est défini et dont les lignes intégrales sont les courbes de plus grande croissance de la distance. Pour définir le champ  $\nabla(x)$  on considère la boule maximale  $B(x, r(x))$  centrée en  $x$  dont l'intérieur ne contient pas de point de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\Gamma(x)$  l'ensemble des points de  $\mathcal{P}$  situés sur la sphère qui borne  $B(x, r(x))$ . Les points de  $\mathcal{P}$  étant supposés en position générale,  $\Gamma(x)$  est toujours de cardinal au plus égal à 3. Soit  $\gamma(x)$  le centre de la plus petite boule contenant  $\Gamma(x)$ .

$$\nabla(x) = \frac{x - \gamma(x)}{r(x)}.$$

On appelle *critiques* les points où le champ  $\nabla(x)$  s'annule. Montrer que  $x$  est un point critique si et seulement si  $x$  est inclus dans l'enveloppe convexe  $\text{conv}(\Gamma(x))$  des points  $\Gamma(x)$ . Localiser les points critiques dans le diagramme de Voronoï  $\text{Vor}(\mathcal{P})$  et la triangulation de Delaunay  $\text{Del}(\mathcal{P})$  et montrer que ces points critiques sont les minima, les points selle et les maxima de la fonction distance  $d(x)$ .

- (e) A partir du gradient  $\nabla(x)$ , on définit un flux  $\phi(t, x)$ . Le flux  $\phi(x, t)$  est une application de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  qui décrit des trajectoires suivant les lignes de plus grande pente de la fonction distance :

$$\phi(x, t) = x + \int_{u=0}^{u=t} \nabla(\phi(x, u)) du.$$

$\phi(x, t)$  est la position atteinte au temps  $t$  par un point partant de  $x$ . Un point  $x$  tel que  $\phi(x, t) = x$  pour tout  $t$  est un point fixe. Les points fixes sont les points critiques. L'ensemble  $\{\phi(x, t), t \in \mathbb{R}\}$  est l'orbite du point  $x$ . On peut montrer que la distance à  $\mathcal{P}$  est croissante le long d'une orbite et donc que le flux  $\phi$  n'a pas d'orbite fermée. Lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $\phi(x, t)$  part à l'infini ou se termine sur un point fixe. Pour tout point fixe  $y$ , on appelle *variété stable* de  $y$  et on note  $\text{St}(y)$  l'ensemble des points  $x$  dont l'orbite se termine en  $y$ . Décrire les variétés stables des minima, des points selles. et des maxima de la fonction distance.

- (f) Décrire un algorithme pour calculer les variétés stables des maxima.

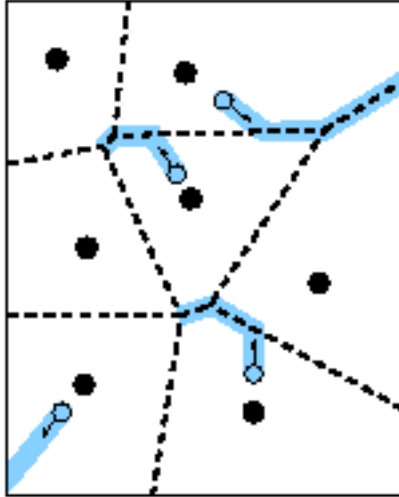


FIG. 2 – Quelques orbites du flux induit par un ensemble de 7 points.

- (g) L'algorithme de reconstruction par flux approxime  $\mathcal{O}$  par l'union des variétés stables des maxima internes à  $\mathcal{O}$ . Montrez que l'objet reconstruit par cette méthode est exactement le même que l'objet reconstruit par la méthode du power crust ou du Delaunay restreint.