MPRI 2ième année
Examen partiel du cours C2-14
Mercredi 30 novembre 2005

Partie II

Il est demandé aux étudiants de résoudre quatre exercices au choix parmi les six proposés ci dessous

Exercice 1 (**Triangulation sans angle obtus**)
Montrer que toute triangulation du plan qui n'a pas d'angle obtus est une triangulation de Delaunay.

Exercice 2 (**Triangulation d'un cube**)
Montrer que toute triangulation d'un cube en dimension 3 est formée de 5 ou 6 tétraèdres.
Indice Utilisez la formule d'Euler pour les triangulations 3d.

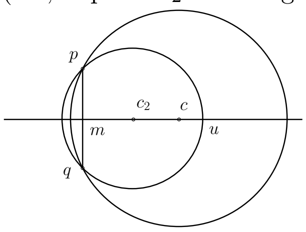
Exercice 3 (**Angles dièdres d'un tétraèdre**)
Étant donné un tétraèdre t, on note : r le rayon de sa sphère circonscrite, l la longueur de sa plus petite arête, V son volume, ρ le rapport $\frac{r}{l}$ et σ le rapport $\frac{V}{l^3}$. Montrer que tout tétraèdre vérifiant $\rho \leq \rho_0$ et $\sigma \geq \sigma_0$ a ses angles dièdres minorés par $\arcsin(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}\rho_0^3})$.

Exercice 4 (**Intersection d'un diagramme de Voronoï par un hyperplan**)
Montrer que l'intersection d'un diagramme de Voronoï en dimension d par un hyperplan est un diagramme de puissance de dimension $(d-1)$..
Aide On rappelle qu'un diagramme de puissance est défini par un ensemble de sphères $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Chaque cellule du diagramme est associée à l'une des sphères σ_i, et c'est le lieu de points dont la puissance par rapport à σ_i est plus petite que la puissance par rapport aux autres sphères. Cette définition est aussi parfaitement valable pour des sphères (imaginaires) dont le carré du rayon est négatif.

Exercice 5 (**Diagramme de Voronoï contraint**)
Soit (P, S) un PSLG (Planar straight line graph) : P est un ensemble de points du plan appelés *sites* et S un ensemble de segments dont les extrémités sont dans P. Deux segments de S ne s'intersectent pas sauf éventuellement en une extrémité commune. Dans ce qui suit, les segments de S sont considérés comme des obstacles à la visibilité. On définit un diagramme de Voronoï contraint en associant à chaque site p une cellule constituée par l'ensemble des points u qui sont visibles depuis p et plus proche de p que des autres sites q visibles depuis u.
- Montrer que ces cellules forment un diagramme, c'est à dire que l'union des

cellules fermées recouvre le plan.
- Le dual du diagramme de Voronoï contraint inclut une arête pq pour toute chaque paire de sites p et q dont les cellules partagent une arête. Montrer que les arêtes du diagramme dual constituent un sous ensemble des arêtes de la triangulation de Delaunay contrainte de (P, S).

Exercice 6 (**Une variante du raffinement de Delaunay : le raffinement décalé**)
Soit (P, S) un PSLG (voir définition ci-dessus) bornant un domaine fini Ω que l'on cherche à mailler. On suppose pour simplifier que toute paire de segments de S incidents à un même sommet de P forment des angles supérieurs à 90^o. Soit t un triangle et $\rho(t)$ le rapport du rayon de son cercle circonscrit à la longueur de sa plus petite arête. Soit $\beta \geq \sqrt{2}$ une constante. Un triangle t est dit mauvais si $\rho(t) > \beta$. Une arête de contrainte est dite "accrochée " si le plus petit cercle circonscrit à cette arête englobe un sommet. Le raffinement de Delaunay insère dans la triangulation des sommets additionnels, appelés sommets de Steiner, au centre des arêtes de contraintes accrochées et au centre du cercle circonscrit des mauvais triangles. La variante étudiée ici propose de se débarrasser des mauvais triangles en insérant dans la triangulation, non plus le centre du cercle circonscrit mais un centre décalé définit comme suit. Soit $t = pqr$ un mauvais triangle dont la plus petite arête est pq. On note c le centre du cercle circonscrit de t et c_1 son centre décalé. Si $\rho(pqc) \leq \beta$, $c_1 = c$. Sinon le centre décalé c_1 est le point de la médiatrice de pq, intérieur au cercle circonscrit de t et tel que $\rho(pqc_1) = \beta$, (i.e., le point c_2 sur la figure ci-dessous).



En notant T la triangulation courante et $T_{|\Omega}$ sa restriction au domaine Ω, l'algorithme peut être décrit comme suit :
- **Initialisation** T = triangulation de Delaunay contrainte de (P, S)
- **Raffinement** Appliquer les règles suivantes tant que l'une d'entre elles s'applique et par ordre de priorité : la règle 2 n'est appliquée que lorsque la règle 1 ne s'applique pas.

1. s'il y a une arête accrochée e,
   raffiner(e) i.e.
   insérer c = milieu(e) dans T
2. s'il y a un mauvais triangle $t \in T_{|\Omega}$,
   raffiner-sous-condition(t) i.e. :
   c_1 = centre décalé de t
   si c_1 accroche une arête e, raffiner(e).
   sinon insérer c_1 dans T

- On définit les notions de taille locale (ou "local feature size lfs") de rayon d'insertion et de parent, comme dans la preuve de l'algorithme de Ruppert (donnée en cours). Montrer que le rayon d'insertion de tout sommet p du maillage est minoré soit par $\mathrm{lfs}(p)$ soit par le rayon d'insertion d'un de ses ancêtres.
Aide On pourra reprendre la preuve donnée par Ruppert et ne modifier que ce qui doit l'être.
- En conclure que la variante utilisant les centres décalés termine.
- Quels sont, intuitivement, les avantages et les inconvénients de cette variante.