TD07 – Automates à pile et langages algébriques

Exercice 1.

✎ Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants.

$L_1 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = |u|_b\}$.
$L_2 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a \geq |u|_b\}$.
$L_3 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = 2|u|_b\}$.
$L_4 = \{\text{bin}(i)\#\overline{\text{bin}(i+1)},\ \text{où bin}(i) \text{ est l'écriture binaire de } i\}$.
$L_5 = \{a^i b^j c^k,\ i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$.

Exercice 2.

1. Montrer que si L est algébrique et R rationnel alors le langage $L \cap R$ est algébrique.

2. Donner deux langages algébriques dont l'intersection n'est pas algébrique.

Exercice 3.

✎ Montrer que tout langage algébrique sur l'alphabet $\{a\}$ est rationnel (on pourra montrer qu'il existe un N_0 et un p tels que pour tout mot w, si $|w| > N_0$ alors $w(a^p)^* \subseteq L$).

Exercice 4.
Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\text{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
– si $u = \varepsilon$, $\text{Mel}(u,v) = \{v\}$
– si $v = \varepsilon$, $\text{Mel}(u,v) = \{u\}$
– si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\text{Mel}(u,v) = x.\text{Mel}(u',v) \cup y.\text{Mel}(u,v')$.
Si L et L' sont deux langages, on définit $\text{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \text{Mel}(u,v)$.

1. On prend $\Sigma = \{a,b\}$ et l'on considère les deux langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\text{Mel}(L,L')$ est rationnel.

2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?

3. Soit $\Sigma = \{a,b,c\}$. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\text{Mel}(L,L')$ est algébrique.

4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?