
TD10 – L'ordre qui ne tait rien

Exercice 1.

Terminaison

1. Soit $\Sigma = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Montrer que le système de réécriture défini sur Σ^* par la règle $u(i+1)v \rightarrow uiiv$ termine.
2. Soit la définition suivante de la fonction d'Ackermann :

$$Ack(0, n) = n + 1$$

$$Ack(m + 1, 0) = Ack(m, 1)$$

$$Ack(m + 1, n + 1) = Ack(m, Ack(m + 1, n)).$$

Montrer que l'évaluation de $Ack(m, n)$ termine pour tous m, n .

3. Montrer que le système de réécriture suivant est noëthérien :

$$\neg\neg x \rightarrow x$$

$$\neg(x \wedge y) \rightarrow (\neg\neg\neg x) \vee (\neg\neg\neg y)$$

$$\neg(x \vee y) \rightarrow (\neg\neg\neg x) \wedge (\neg\neg\neg y)$$

Exercice 2.

Lemme de König

 Montrer qu'un arbre infini à branchement fini admet un chemin infini.

Exercice 3.

Lemme de Higman

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur Σ^* la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme de Higman – Soit (x_i) une suite infinie de Σ^* . Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.

Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Pour la preuve, on suppose qu'il existe une suite mauvaise. On construit une suite (x_i) de la façon suivante :

- x_0 est un élément minimal qui commence une mauvaise suite ;
- x_i est un élément minimal à la position i d'une mauvaise suite qui commence par x_0, \dots, x_{i-1} .

1. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par la même lettre $a \in \Sigma$. On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = ax'_{\phi(i)}$.
2. Montrer que la suite $x_0, x_1, \dots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, x'_{\phi(2)}, \dots$ est bonne et conclure.