

Chapitre 12

Planification de trajectoires

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de planification de trajectoires appelé le problème du «déménageur de piano». La première section explique la nature du problème et donne les notations et définitions nécessaires. Dans la deuxième section, un algorithme pour le calcul du mouvement de translation d'un segment dans un environnement polygonal est présenté; cet algorithme est dû à Schwartz et Sharir. Dans la dernière section, nous étudions le déplacement d'un disque dans un environnement polygonal et présentons un algorithme, dû à Ó'Dúnlaing et Yap, utilisant les diagrammes de Voronoï de segments.

Introduction

Le problème du «déménageur de piano» est un problème fondamental de la robotique. On peut le formuler de la façon suivante : soit un piano (ou un robot) et des obstacles; étant données deux positions permises du piano, existe-t-il un mouvement de ce piano entre ces deux positions sans collision avec les obstacles, et si oui, donner un tel mouvement. Les études faites sur ce sujet sont nombreuses et font appel à des outils mathématiques appartenant à des domaines variés tels que la géométrie classique, la topologie, la géométrie algébrique, l'algèbre et la combinatoire. Dans son aspect le plus général, le robot n'est pas un corps rigide, mais est constitué d'éléments possédant un certain nombre de degrés de liberté. Des solutions théoriques existent mais qui ne sont pas efficaces. Une approche heuristique du problème en intelligence artificielle a été faite, et a donné lieu à des solutions qui sont implémentées et utilisées. Nous nous intéresserons ici à l'aspect algorithmique du problème, c'est-à-dire à la recherche de solutions exactes.

Nous avons limité notre choix à la présentation de deux problèmes de base classiques, qui font appel dans leur résolution à l'algorithmique géométrique et plus

généralement à divers outils algorithmiques développés dans cet ouvrage. Nous avons choisi deux approches différentes pour les deux problèmes, ce qui permet d'avoir un aperçu des différentes techniques utilisées pour résoudre ce genre de questions.

Notations et définitions

Le plan contient un certain nombre d'obstacles, et l'*espace libre du plan*, \mathcal{E} , est constitué des points extérieurs aux obstacles. L'objet \mathcal{X} à déplacer est une partie de \mathbb{R}^2 de forme variable : polygone, disque, segment...

Etant donné un objet \mathcal{X} , une *position* de \mathcal{X} est l'image de \mathcal{X} dans un déplacement (appelé encore isométrie directe) du plan. Or tout déplacement p du plan peut se caractériser comme la composée d'une rotation d'origine O et d'angle de mesure $\theta \in [0, 2\pi[$ et d'une translation. Un repère orthonormé étant choisi, une position de l'objet \mathcal{X} , soit $p(\mathcal{X})$, où p est un déplacement, sera déterminée par un triplet $p = (x, y, \theta)$ de $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$, où θ caractérise la rotation et (x, y) la translation. Il n'y a pas, en général, bijection entre l'ensemble des positions d'un objet et l'ensemble des déplacements du plan; plus précisément lorsque l'objet possède certaines propriétés de symétrie, plusieurs déplacements correspondent à la même position. Par exemple (figure 0.1), le segment \mathcal{X} a la même image par les déplacements $(x, y, 0)$ et (x', y', π) .

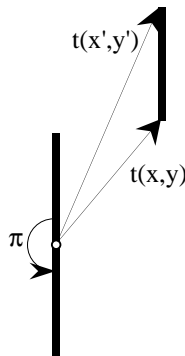


Figure 0.1: La translation $t(x, y)$ définit la même position que la rotation d'angle plat suivie de $t(x', y')$.

Il reste néanmoins que la donnée du déplacement détermine de manière unique la position de l'objet, ce qui justifie cette représentation.

Une position $p(\mathcal{X})$ est *libre* si $p(\mathcal{X}) \subset \mathcal{E}$, *semi-libre* si $p(\mathcal{X})$ « touche » un ou plusieurs obstacles i.e. n'a de points communs avec les obstacles que sur leur frontière (fig.0.2).

La figure 0.2 montre des positions différentes d'un objet qui est un segment, dont certaines sont libres, d'autres semi-libres, d'autres ni libres ni semi-libres. On

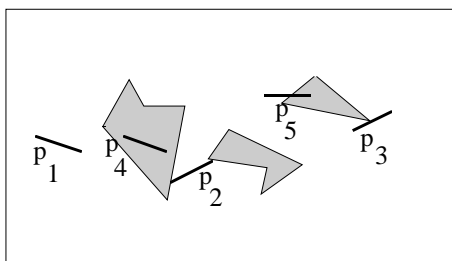


Figure 0.2: p_1 est libre, p_2 et p_3 sont semi-libres, p_4 et p_5 ne le sont pas.

notera \mathcal{L} et \mathcal{SL} l'ensemble des positions libres et semi-libres de \mathcal{X} dans \mathcal{E} . Grâce à la représentation de la position d'un objet par un déplacement, on a :

$$\mathcal{L}, \mathcal{SL} \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$$

Notons que \mathcal{L} et \mathcal{SL} sont des ensembles dépendant à la fois de l'environnement \mathcal{E} et de l'objet \mathcal{X} .

Etant données deux positions p_0 et p_1 de \mathcal{X} , on appelle *mouvement de \mathcal{X} de la position p_0 vers la position p_1* une application continue $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$ telle que $m(0) = p_0$ et $m(1) = p_1$. Soient p_0 et p_1 deux positions libres. Le mouvement est *libre* (resp. *semi-libre*) si pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la position $m(\alpha)$ est une position libre (resp. semi-libre). Le mouvement m est un *mouvement de translation* s'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $m(\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \{\theta\}$.

Dans les cas particuliers auxquels nous allons nous intéresser, ces définitions générales vont se simplifier.

12.1 Translation d'un segment

12.1.1 Présentation du problème

Nous supposons ici que l'objet \mathcal{X} est un segment de longueur l , les obstacles des polygones simples, et que les mouvements autorisés sont des mouvements de translation.

L'ensemble des *obstacles* est constitué d'un nombre fini de polygones simples d'intérieur non vide, d'intersection finie deux à deux (c'est-à-dire pouvant se «toucher» mais non se chevaucher). Si les obstacles partagent des morceaux de frontière de longueur non nulle, on peut toujours redéfinir les obstacles (en les fusionnant) de manière à ce que les hypothèses que nous faisons soient vérifiées.

Pour rendre le traitement des données homogène, nous supposerons que le plan est limité à un rectangle R suffisamment grand pour qu'il ne modifie pas la nature du problème; pour cela il suffit que ses côtés soient par exemple à une distance strictement supérieure à l de tous les sommets des polygones constituant

les obstacles (l est la longueur du segment à déplacer). Ainsi, R est ajouté à l'ensemble des obstacles mais la partie « interdite » est la région extérieure à R . Dorénavant, l'espace libre \mathcal{E} est l'ensemble des points intérieurs à R et extérieurs aux autres obstacles (figure 0.2).

Puisque l'objet est un segment et que nous limitons les déplacements à des translations, une position p de \mathcal{X} est caractérisée plus simplement encore par un triplet $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[$, où (x, y) représente le couple de coordonnées de l'extrémité P de p la plus basse, (et la plus à gauche si p est horizontal) Q étant l'autre extrémité, et θ est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{PQ}, \vec{i})$ (figure 1.1); par définition de P , il est clair que θ est strictement inférieur à π .

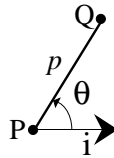


Figure 1.1: P et θ caractérisent p .

On note alors \mathcal{L} , \mathcal{SL} , \mathcal{L}_θ , \mathcal{SL}_θ respectivement l'ensemble des positions libres, semi-libres, libres d'orientation θ , semi-libres d'orientation θ de \mathcal{X} dans \mathcal{E} . On a bien sûr :

$$\mathcal{L}, \mathcal{SL} \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \pi[\quad \mathcal{L}_\theta, \mathcal{SL}_\theta \subset \mathbb{R}^2 \times \{\theta\}$$

On identifiera donc \mathcal{L}_θ et \mathcal{SL}_θ à des parties de \mathbb{R}^2 et même plus précisément à des parties de \mathcal{E} . Dans ce cadre restreint, un mouvement de la position p_0 à la position p_1 d'un segment \mathcal{X} devient une application continue $m : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{\theta\}$ telle que $m(0) = p_0$ et $m(1) = p_1$. Le problème que nous allons résoudre se formule comme suit :

Données : L'ensemble \mathcal{S} des segments constituant les côtés des obstacles, avec pour chaque segment la donnée de son successeur et de son prédécesseur dans le contour direct de l'obstacle auquel il appartient, et la longueur l du segment \mathcal{X} .

Questions : Pour une valeur donnée $\theta \in [0, \pi[$:

- (1) Déterminer si une position p d'orientation θ est libre, c'est-à-dire appartient à l'ensemble \mathcal{L}_θ
- (2) Etant données deux positions libres p_0 et p_1 , déterminer s'il existe un mouvement m de \mathcal{X} de la position p_0 à la position p_1 , et si oui en calculer un.

12.1.2 Présentation de l'algorithme

Nous supposons pour l'instant et pour simplifier l'exposé de l'algorithme, que l'ensemble des sommets ne contient pas trois points distincts alignés verticalement

et que les obstacles sont disjoints, et verrons ensuite comment l'algorithme que nous fournissons s'étend au cas général.

Nous prenons pour l'instant $\theta = \pi/2$, nous verrons ensuite comment en déduire le résultat pour une valeur de θ quelconque.

L'algorithme repose sur un principe de balayage du plan par une droite verticale. Donnons-en tout d'abord les grandes lignes :

Soit S l'ensemble des sommets des obstacles. On fait passer par chaque sommet une droite verticale en ne conservant que les morceaux de droite contenus dans l'espace libre \mathcal{E} . On décompose ainsi l'espace libre \mathcal{E} en cellules trapézoïdales (éventuellement dégénérées en triangles) dont les côtés parallèles sont verticaux. Dans l'exemple de la figure 1.2, il y a trois obstacles (grisés) et le rectangle clôturant la scène. L'espace libre \mathcal{E} est formé des points intérieurs au rectangle et extérieurs aux obstacles. Les polygones sont délimités par seize segments étiquetés de a à o . La décomposition indiquée fournit quinze cellules trapézoïdales numérotées de 1 à 15.

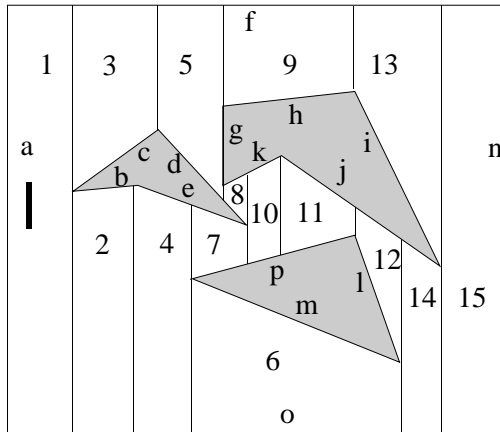


Figure 1.2: *Partitionnement de l'espace libre en cellules.*

Deux cellules sont *voisines* si elles partagent un segment de frontière de longueur non nulle. Nous définissons ainsi un graphe $G_{\pi/2}$ appelé *graphe des cellules* dont les sommets sont les cellules que l'on vient de définir, deux cellules étant reliées par une arête si elles sont voisines. La figure 1.3 donne le graphe $G_{\pi/2}$ associé aux données de la figure 1.2.

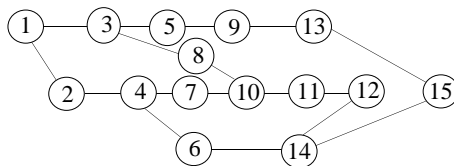


Figure 1.3: *Le graphe $G_{\pi/2}$ associé à l'exemple de la figure précédente.*

Le graphe $G_{\pi/2}$ ainsi calculé est indépendant de la longueur l du segment \mathcal{X} . Dans une deuxième étape, on émonde chaque cellule C en retranchant une « bande » de hauteur l à sa partie supérieure, on obtient ainsi une nouvelle collection de cellules C' . La figure 1.4 montre que la cellule 8 de la figure 1.2 a disparu, les cellules 11 et 12 ne sont plus voisines, les cellules 7, 11, 12 sont devenues des triangles.

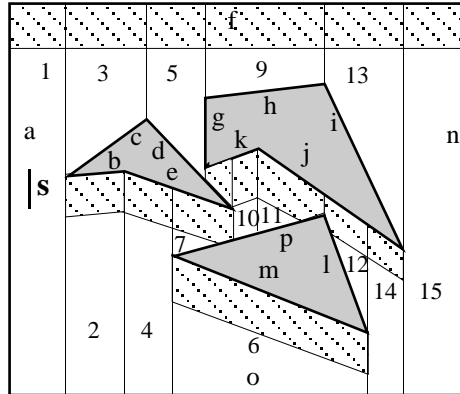


Figure 1.4: *Emondage des cellules.*

Le graphe obtenu en mettant à jour les relations de voisinage du graphe $G_{\pi/2}$ est noté $G_{\pi/2}(l)$ (figure 1.5).

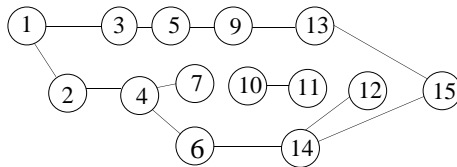


Figure 1.5: *Le graphe $G_{\pi/2}(l)$ obtenu après émondage.*

Nous démontrerons qu'il existe un mouvement libre d'une position p_0 à une position p_1 si et seulement si les cellules contenant respectivement p_0 et p_1 sont dans la même composante connexe du graphe $G_{\pi/2}(l)$. Ainsi, un problème topologique se trouve ramené à un problème combinatoire simple.

Nous donnons maintenant un certain nombre de résultats qui justifieront la validité de l'algorithme utilisé. Ensuite, nous exposerons l'algorithme détaillé ainsi que l'évaluation de sa complexité.

Nous commençons par donner la définition précise de la décomposition en cellules, et du graphe $G_{\pi/2}(l)$, et prouvons que l'existence d'un mouvement de translation se ramène à l'existence d'une chaîne dans ce graphe.

Soit $p \in \mathcal{L}_{\pi/2}$ une position libre de \mathcal{X} , (rappelons que la position p est représentée par un point qui est son extrémité inférieure) et soit Δ la droite verticale passant par p . En faisant glisser le segment \mathcal{X} le long de Δ à partir de p tout en restant dans $\mathcal{L}_{\pi/2}$, \mathcal{X} atteint deux positions extrémales p_{inf} et p_{sup} qui sont des positions

semi-libres. Plus précisément, la composante connexe du **point** p dans $\Delta \cap \mathcal{L}$ est un intervalle ouvert $]p_{inf}, p_{sup}[$ tel que chaque position p_{inf} et p_{sup} «touche» un ou deux segments de \mathcal{S} .

Si le point p_{sup} (resp. p_{inf}) appartient à un seul segment de \mathcal{S} , on note ce segment $Sup(p)$ (resp. $Inf(p)$). Sinon, p_{sup} (resp. p_{inf}) est un sommet commun à deux segments de \mathcal{S} . Si ces deux segments sont d'un même côté (au sens large) par rapport à Δ , on note $Sup(p)$ (resp. $Inf(p)$) celui qui est le plus bas (resp. le plus haut); dans le cas contraire, on note $Sup(p)$ (resp. $Inf(p)$) celui qui est à gauche de Δ . La figure 1.6 indique comment est déterminé $Sup(p)$ en cas d'ambiguïté, selon les cas de figure (l'intérieur des obstacles est en gris).

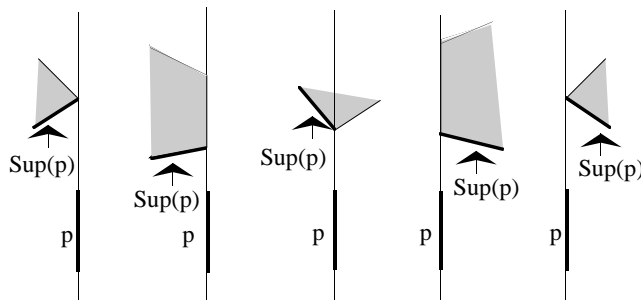


Figure 1.6: Choix du segment $Sup(p)$ selon la position de p .

Ainsi à chaque position libre p est associé un couple $(Inf(p), Sup(p))$ de deux segments de \mathcal{S} .

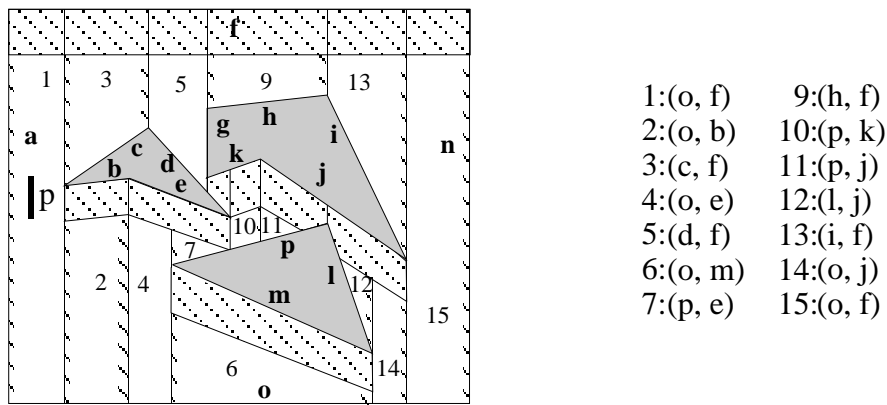
Deux positions libres p et p' sont *équivalentes* si $Inf(p) = Inf(p')$ et $Sup(p) = Sup(p')$. Ainsi $\mathcal{L}_{\pi/2}$ (considéré comme une partie de \mathbb{R}^2) est partitionné en *cellules* qui sont *les composantes connexes* des classes de la relation d'équivalence que nous venons de définir. La figure 1.7 donne cette partition sur l'exemple utilisé avec, pour chaque cellule, le couple de segments (Sup, Inf) associé. Les hachures précisent à quelle cellule la frontière appartient, la convention étant que la frontière appartient à la cellule du côté hachuré.

Lemme 1.1. Soit \vec{u} le vecteur $(0, l)$. Une cellule C est un trapèze $(d_-(C), d_+(C), g_+(C), g_-(C))$ (éventuellement dégénéré en triangle), dont les côtés parallèles $[d_-(C), d_+(C)]$ à droite et $[g_-(C), g_+(C)]$ à gauche sont verticaux, et vérifient :

- $(d_-(C) \text{ ou } t_{\vec{u}}(d_+(C)) \in S)$ et $(g_-(C) \text{ ou } t_{\vec{u}}(g_+(C)) \in S)$
- $[g_-(C), d_-(C)]$ est une partie d'un segment de \mathcal{S} , de même pour $t_{\vec{u}}([g_+(C), d_+(C)])$ ($g, d, -, +$ sont mis respectivement pour gauche, droit, inférieur, supérieur).

Preuve. Cela découle immédiatement de la définition d'une cellule . ■

Notons que les cellules de $\mathcal{L}_{\pi/2}$ ne sont en général ni ouvertes ni fermées. En effet ce sont exactement les cellules C' décrites plus haut et qui constituent les sommets

Figure 1.7: Les cellules de $\mathcal{L}_{\pi/2}$.

du graphe $G_{\pi/2}(l)$. Par définition, les côtés non verticaux n'appartiennent pas aux cellules car ils correspondent à des positions semi-libres, et en ce qui concerne les côtés verticaux cela varie selon que les points $d_-(C), d_+(C), g_+(C), g_-(C)$ appartiennent ou non à S , et la réponse se déduit simplement selon les cas (la figure 1.8 donne un exemple).

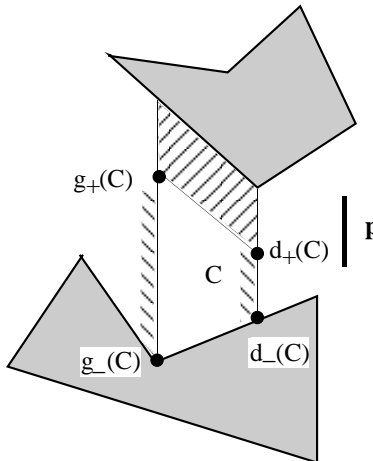


Figure 1.8: Une cellule.

Deux cellules sont dites *voisines* si leurs frontières partagent un segment de longueur non nulle. Notons que ce segment est nécessairement vertical.

Lemme 1.2. *Si deux cellules sont voisines, il existe un intervalle ouvert (vertical) appartenant à leur frontière commune et à $\mathcal{L}_{\pi/2}$.*

Preuve. Cela découle du fait que les côtés verticaux (extrémités exclues) d'une cellule sont inclus dans $\mathcal{L}_{\pi/2}$. ■

Le graphe $G_{\pi/2}(l)$ est donc défini ainsi : ses sommets sont les cellules précédemment définies, et deux sommets sont adjacents si et seulement si les cellules correspondantes sont voisines. Le calcul direct de ce graphe est difficile, nous verrons qu'il est plus simple de calculer d'abord le graphe $G_{\pi/2}$, puis d'en déduire $G_{\pi/2}(l)$.

La proposition suivante traduit la condition topologique d'existence d'un mouvement de translation en une propriété combinatoire du graphe $G_{\pi/2}(l)$.

Proposition 1.3. *Soient p et p' deux positions libres et $C(p), C(p')$ les cellules auxquelles elles appartiennent respectivement. Il existe un mouvement de translation de p vers p' si et seulement si $C(p)$ et $C(p')$ appartiennent à la même composante connexe du graphe $G_{\pi/2}(l)$.*

Preuve.

La condition est suffisante.

Soient p et p' deux positions libres, et $C(p)$ et $C(p')$ leurs cellules appartenant à la même composante connexe de $G_{\pi/2}(l)$. On examine successivement trois cas.

- Supposons d'abord que $C(p) = C(p')$.

Posons $p = (x, y)$ et $p' = (x', y')$. Le segment $[p, p']$ est contenu dans $C(p)$. Alors l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à tout réel α de $[0, 1]$ fait correspondre $(x + \alpha(x' - x), y + \alpha(y' - y))$ est un mouvement libre de translation de \mathcal{X} de la position p vers la position p' . En effet cela provient du fait qu'un trapèze est convexe et donc que le segment $[p, p']$ est tout entier contenu dans la cellule $C(p)$ (ici, p et p' sont considérés en tant que points).

On montre de même que si p' appartient à la frontière de $C(p)$ ou si p appartient à la frontière de $C(p')$ alors la même formule définit un mouvement libre de translation de p vers p' .

- Supposons que $C(p)$ et $C(p')$ sont des cellules voisines.

Utilisant le lemme 1.2, soit t une position libre appartenant à la frontière commune de $C(p)$ et $C(p')$. Alors, grâce à l'étude des cas précédents, il existe un mouvement libre de p vers t et un mouvement libre de t vers p' . Il suffit de composer les deux mouvements pour obtenir le résultat.

- Il reste à examiner le cas général. Puisque les sommets de $G_{\pi/2}(l)$ correspondant à $C(p)$ et $C(p')$ appartiennent à la même composante connexe de $G_{\pi/2}(l)$, il existe dans $G_{\pi/2}(l)$ une chaîne $(C_0 = C(p), C_1, \dots, C_k = C(p'))$. Soit t_i une position libre appartenant à la frontière commune de C_i et C_{i+1} pour $i = 0, \dots, k-1$. Il existe des mouvements libres de p à t_0 , de t_i à t_{i+1} pour $i = 0, \dots, k-1$ et de t_{k-1} à p' , et il suffit de composer ces mouvements dans l'ordre pour obtenir un mouvement libre de translation de p vers p' .

Cela termine la preuve dans un sens.

Réciproquement, supposons qu'il existe un mouvement libre m de \mathcal{X} de la position p vers p' . Soit Γ la «trajectoire» du point le plus bas dans le mouvement m , cette trajectoire a pour extrémités p et p' . La trace des cellules sur Γ décompose Γ en courbes adjacentes dont la suite des extrémités est notée $(p_0 = p, p_1, \dots, p_k = p')$, de telle sorte que dans le mouvement m , lorsque l'objet passe par la position p_i , sa position change de cellule et passe à une cellule voisine. Ainsi la suite des cellules par lesquelles passe la position de l'objet dans le mouvement m forme une chaîne de $G_{\pi/2}(l)$, et p et p' sont dans la même composante connexe. ■

Nous sommes maintenant en mesure de décrire l'algorithme de prétraitement, i.e. la construction des graphes $G_{\pi/2}$ et $G_{\pi/2}(l)$ et de résoudre le problème posé.

12.1.3 Prétraitement des données

Construction du graphe des cellules $G_{\pi/2}$

L'algorithme utilisé est un algorithme de balayage. On appelle *événement d'abscisse α* , que l'on note $e(\alpha)$, l'ensemble des segments de \mathcal{S} ayant une extrémité au moins d'abscisse α . Grâce aux hypothèses faites (voir 12.1.1), chaque événement contient au moins 2 et au plus 4 segments. Les événements sont *simples* (2 ou 3 segments) (fig.1.9 (a)) ou *doubles* (4 segments) (figure 1.9 (b)).

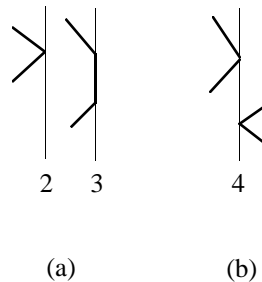
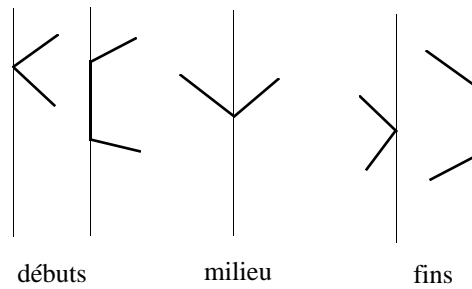
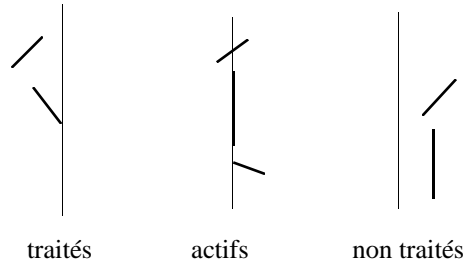


Figure 1.9: *Événements (a) simples ou (b) double.*

Un événement simple $e(\alpha)$ est *un début, un milieu ou une fin* selon que les segments de $e(\alpha)$ sont à droite, de part et d'autre, ou à gauche de la droite d'équation $x = \alpha$ (figure 1.10).

Les événements sont triés par ordre croissant d'abscisse. Le plan est balayé de gauche à droite par une droite verticale Δ . Dans une position donnée de Δ , on peut classer les segments de \mathcal{S} en trois classes : un segment est *traité* s'il est situé à gauche au sens large de Δ , et s'il a au moins un point strictement à gauche de Δ , *non traité* s'il est à droite strictement de Δ , *actif* sinon (figure 1.11).

Les notions analogues sont définies pour les cellules. Un événement est traité si son abscisse est inférieure ou égale à celle de Δ . Au cours du balayage, trois structures de données sont maintenues :

Figure 1.10: *Débuts, milieu et fins.*Figure 1.11: *Segments traités, actifs, non traités.*

- la liste L des événements non traités;
- la liste \mathcal{V} des segments actifs triée par ordre croissant de l'ordonnée du point d'intersection avec Δ ;
- le graphe partiel de $G_{\pi/2}$ des cellules traitées ou actives.

Etant donnés deux segments consécutifs dans \mathcal{V} (sans prendre en compte les segments verticaux), la région située entre ces deux segments au voisinage droit de Δ est soit intérieure à un obstacle, soit intérieure à une cellule C située entre ces deux segments. Dans ce dernier cas, les deux sommets gauches de C , $g_-(C)$ et $g_+(C)$ ont déjà été calculés lors d'une position antérieure de Δ , ainsi que les cellules voisines de C situées à gauche de C . Ces informations sont ajoutées respectivement dans la structure \mathcal{V} et dans $G_{\pi/2}$. Nous précisons plus tard comment réaliser l'implémentation de ces structures. Lorsque la droite Δ passe par la position verticale correspondant au côté droit de la cellule c , ses deux extrémités droites $d_-(c)$, $d_+(c)$ sont calculées, ainsi que les cellules voisines situées à droite de c , ainsi la cellule c est traitée.

L'algorithme ci-dessous calcule le graphe $G_{\pi/2}$.

procédure GRAPHE-DES-CELLULES($G_{\pi/2}$);

- (1) trier les événements par abscisses croissantes : $L = (e_1, \dots, e_p)$;
- (2) initialiser \mathcal{V} et $G_{\pi/2}$;
- (3) pour i de 1 à p faire
- (4) supprimer e_i dans L et mettre à jour \mathcal{V} et $G_{\pi/2}$

finpour.

Précisons ce que sont l'initialisation et la mise à jour en fonction du type de l'événement considéré :

Initialisation de \mathcal{V} : Soient p_0 et p_1 les segments horizontaux respectivement inférieur et supérieur du rectangle R et p_0 et p_1 leur extrémité gauche. Alors G est initialisé avec un seul sommet C_0 tel que $g_-(C_0) = p_0$ et $g_+(C_0) = p_1$, et $\mathcal{V} = (p_0, p_1)$.

Mise à jour de \mathcal{V} et $G_{\pi/2}$:

Nous étudions seulement les événements simples, le cas des événements doubles s'en déduisant simplement.

- L'événement e_i est une *fin*, il y a quatre types de fins notés f_1, f_2, f_3, f_4 (figure 1.12).

* de type f_1 : On a $e_i = \{s, s'\}$. Soit s_- le prédécesseur de s et s'_+ le successeur de s' dans L . Soient C_i la cellule située entre s_- et s , et C_j celle située entre s' et s'_+ . On achève le traitement de C_i en posant $d_-(C_i) = \Delta \cap s_-$, $d_+(C_i) = P$, et celui de C_j en posant $d_-(C_j) = P$, $d_+(C_j) = \Delta \cap s'_+$. On ajoute au graphe $G_{\pi/2}$ une nouvelle cellule C_k adjacente à C_i et C_j et on calcule $g_-(C_k) = d_-(C_i)$, $d_+(C_k) = d_+(C_j)$. Enfin, on supprime s et s' dans L .

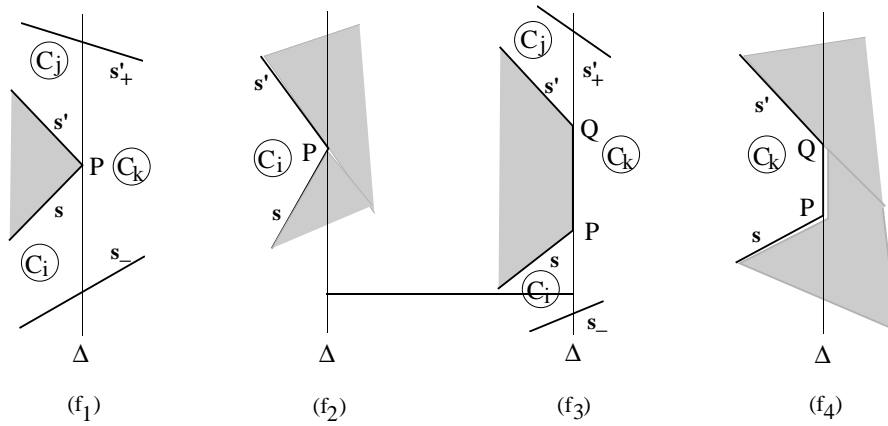
* de type f_2 : On a $e_i = \{s, s'\}$. Le traitement de la cellule C_i est achevé en posant $d_-(C_i) = d_+(C_i) = P$. On supprime s et s' dans L .

* de type f_3 : On a $e_i = \{s, t, s'\}$. Soit s_- le prédécesseur de s et s'_+ le successeur de s' dans L . Soient C_i la cellule située entre s_- et s , et C_j celle située entre s' et s'_+ . On achève le traitement de C_i en posant $d_-(C_i) = \Delta \cap s_-$, $d_+(C_i) = P$, et celui de C_j en posant $d_-(C_j) = Q$, $d_+(C_j) = \Delta \cap s'_+$. On ajoute au graphe $G_{\pi/2}$ une nouvelle cellule C_k adjacente à C_i et C_j et on calcule $g_-(C_k) = d_-(C_i)$, $d_+(C_k) = d_+(C_j)$. On supprime s, t et s' dans L .

On laisse le soin au lecteur de traiter le cas f_4 qui est voisin du cas f_2 .

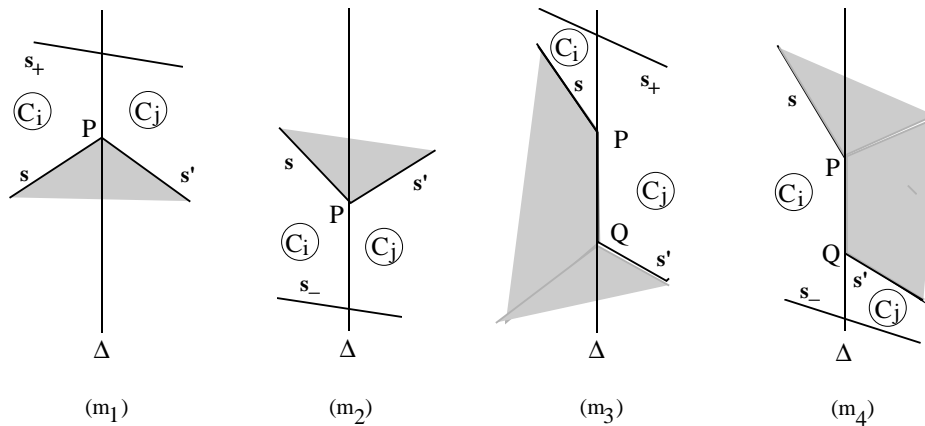
- L'événement e_i est un *milieu*, il y a quatre types de milieux, notés m_1, m_2, m_3, m_4 (figure 1.13).

* de type m_1 : Soit s_+ le successeur de s dans L , et C_i la cellule située entre s et s_+ . On remplace s par s' dans L , et on termine le traitement de C_i par

Figure 1.12: *L'événement en cours est une fin.*

$d_-(C_i) = P$, $d_+(C_i) = \Delta \cap S_+$, enfin on crée une nouvelle cellule C_j adjacente à C_i en posant $g_-(C_j) = P$, $g_+(C_j) = d_+(C_i)$.

On laisse au lecteur le soin d'examiner les autres cas m_2 , m_3 , m_4 qui se traitent de manière similaire.

Figure 1.13: *L'événement en cours est un milieu.*

- L'événement e_i est un *début*, il y a quatre types de débuts, notés d_1, d_2, d_3, d_4 (figure 1.14). On laisse le soin au lecteur de traiter ce cas en s'inspirant de ce qui a été fait précédemment et de la figure 1.14.

En vue d'évaluer l'algorithme proposé, précisons tout d'abord quelles structures de données sont utilisées pour implémenter l'algorithme. Les opérations effectuées sur la liste L justifient l'emploi d'une structure de tas. Les régions sont numérotées par ordre croissant d'apparition dans le balayage. Le graphe $G_{\pi/2}$ est représenté par une liste d'adjacence, chaque cellule étant représentée par un enregistrement contenant ses quatre sommets. La liste \mathcal{V} est gérée par une structure d'arbre binaire équilibré (AVL par exemple), chaque nœud représentant un segment s contient un pointeur sur son successeur s_+ et son prédécesseur s_- ainsi que (dans

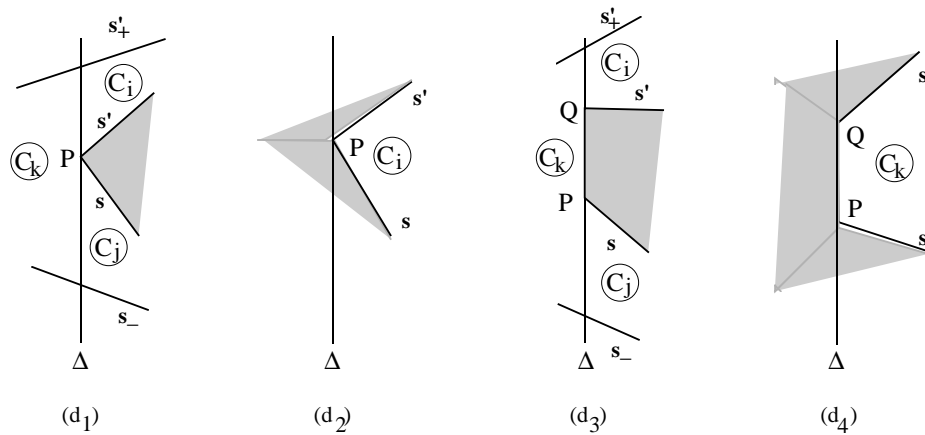


Figure 1.14: L'événement en cours est un début.

le cas où il n'est pas vertical) un pointeur dans la liste d'adjacence de $G_{\pi/2}$ vers la cellule incidente à s .

Grâce à ce choix de structures de données, on déduit :

Proposition 1.4. Si $\text{Card}(\mathcal{S}) = n$, le calcul du graphe $G_{\pi/2}$ par la procédure $\text{GRAPHE-DES-CELLULES}(G_{\pi/2})$ s'effectue en temps $O(n \log n)$ et en espace $O(n)$.

Preuve. La ligne (1) prend un temps $O(n \log n)$, la ligne (2) un temps $O(1)$. Dans la ligne (4), la mise à jour de \mathcal{V} prend un temps $O(\log n)$ et celle de $G_{\pi/2}$ un temps $O(1)$. Le résultat est donc démontré en ce qui concerne le temps. Quant à l'espace, le graphe $G_{\pi/2}$ étant planaire, l'espace utilisé est bien $O(n)$ car chaque cellule contient au moins un sommet sur sa frontière et chaque sommet appartient à la frontière d'au plus trois cellules. ■

Emondage des cellules - Calcul du graphe $G_{\pi/2}(l)$

Il reste à modifier le graphe $G_{\pi/2}$ obtenu en fonction de la longueur du segment à déplacer pour obtenir le graphe $G_{\pi/2}(l)$. Voici l'algorithme :

```

procédure EMONDAGE;
(1) pour chaque cellule  $C = (d_-(C), d_+(C), g_+(C), g_-(C))$  faire
(2)   remplacer  $C$  par la cellule  $C'$  obtenue
      en translatant  $[g_+(C), d_+(C)]$  d'une longueur  $l$  vers le bas;
(3)   si  $C'$  est vide alors supprimer  $C$  dans  $G_{\pi/2}$ 
(4)   sinon pour chaque cellule  $C''$  adjacente à  $C$  faire
(5)     si  $C''$  n'est pas voisin de  $C'$  alors
          supprimer dans  $G_{\pi/2}$  l'arc  $(C, C'')$  finsi
      finsi
    finpour.

```

Proposition 1.5. *Si $\text{Card}(\mathcal{S}) = n$, le calcul de $G_{\pi/2}(l)$ à partir de $G_{\pi/2}$ s'effectue en temps $O(n)$ par la procédure EMONDAGE .*

Preuve. Les lignes (2) et (3) s'exécutent en temps $O(1)$ ainsi que la ligne (5) car chaque cellule, compte tenu des hypothèses faites (pas plus de 2 sommets alignés verticalement) admet au plus six cellules voisines . Les lignes (2), (3) et (5) sont exécutées $O(n)$ fois, d'où le résultat. ■

Les algorithmes GRAPHE-DES-CELLULES($G_{\pi/2}$) et EMONDAGE constituent donc le prétraitement des données pour $\theta = \pi/2$. Pour calculer le graphe G_θ pour une valeur de θ quelconque on transforme au préalable l'ensemble \mathcal{S} par une rotation d'angle de mesure $\pi/2 - \theta$ ce qui prend un temps $O(n)$ et ne change donc pas la complexité de l'algorithme.

12.1.4 Résolution du problème de translation

Revenons aux questions posées au début de cette section, à savoir :

(1) : Déterminer si une position p appartient à $\mathcal{L}_{\pi/2}$.

Pour résoudre ce problème, remarquons que dans la liste d'adjacence du graphe $G_{\pi/2}(l)$, les cellules sont rangées par ordre croissant d'abscisse du côté gauche, et en cas d'égalité par ordre croissant d'ordonnée. Donc, en procédant par dichotomie, on détermine en temps $O(\log n)$ si p appartient à une cellule du graphe $G_{\pi/2}(l)$ et donc à $\mathcal{L}_{\pi/2}$.

(2) : Etant données deux positions libres p_0 et p_1 , déterminer s'il existe un mouvement m de \mathcal{X} de la position p_0 à la position p_1 , et si oui en calculer un.

Ce deuxième problème se résout comme suit. On calcule comme indiqué ci-dessus les cellules $C(p_0)$ et $C(p_1)$ auxquelles p_0 et p_1 appartiennent respectivement. Il ne reste plus qu'à calculer si $C(p_0)$ et $C(p_1)$ appartiennent à la même composante connexe de $G_{\pi/2}(l)$ et à donner en cas de réponse positive un mouvement possible ce qui se fait en temps $O(n)$ (proposition 1.3).

Il nous reste à démontrer que le résultat reste valable dans le cas général c'est-à-dire sans restriction sur le nombre de sommets alignés, ni sur les obstacles qui peuvent avoir un morceau de frontière commune (leur intersection restant d'intérieur vide).

Si les obstacles ne sont pas disjoints, les définitions de $\text{Inf}(p)$, $\text{Sup}(p)$ pour une position libre p s'adaptent sans problème, il y a seulement plus de cas à traiter en gardant le même principe.

Par contre, le fait que le nombre possible de sommets alignés soit quelconque nécessite une adaptation des algorithmes, car un événement peut contenir plus de quatre segments. Cela ne pose pas de problème majeur pour l'algorithme : on traite les segments dans l'ordre croissant d'ordonnée, simplement lors de la

création d'une cellule, le calcul de son sommet gauche supérieur reste en attente un certain temps (figure 1.15).

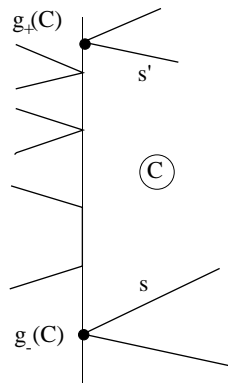


Figure 1.15: $g_+(C)$ est calculé au cours de l'insertion de s' .

Quant à l'algorithme EMONDAGE, il faut modifier l'implémentation du graphe $G_{\pi/2}$, si l'on veut conserver la même complexité en temps. En effet le nombre de cellules adjacentes à une cellule donnée est maintenant $O(n)$. Donc pour la mise à jour des relations d'adjacence la ligne (5) ne prend plus un temps $O(1)$. On modifie l'implémentation de la façon suivante : les listes de voisins sont des listes doublement chaînées, et pour chaque arête (C, C') , on établit un pointage aller retour entre l'enregistrement de la cellule C' dans la liste des voisins de C et l'enregistrement de la cellule C dans la liste des voisins de C' . Ainsi, la boucle 4 prend un temps $O(k)$ où k est le nombre de voisins de C . L'algorithme prend alors un temps $O(m)$ où m est le nombre d'arêtes du graphe, donc un temps $O(n)$ puisque le graphe est planaire.

Théorème 1.6. *Si $\text{Card}(\mathcal{S}) = n$, le problème de translation d'un segment se résout par un prétraitement en temps $O(n \log n)$ et en espace $O(n)$; on détermine en temps $O(\log n)$ si une position donnée est libre, et en temps $O(n)$ s'il existe un mouvement libre d'une position p_0 à une position p_1 .*

12.2 Déplacement d'un disque

12.2.1 Introduction

Le cadre que nous nous fixons ici est le suivant : les obstacles sont des polygones simples non chevauchants, mais pouvant partager des *sommets* communs.

L'objet à déplacer est un disque de rayon r . Dans toute cette section n désigne le nombre de côtés des obstacles. Etant données les propriétés de symétrie d'un disque, les définitions vues dans l'introduction se simplifient. Une *position du*

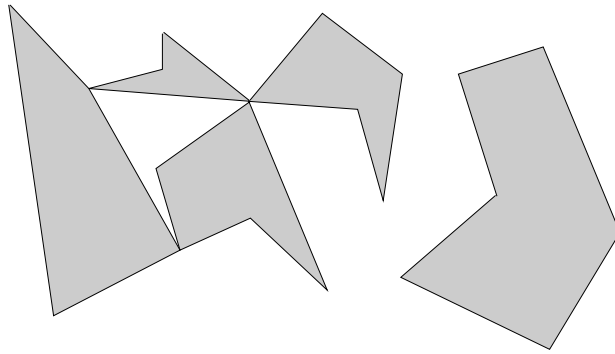


Figure 2.1: Exemple d'obstacles.

disque est simplement définie par la position de son centre, donc par un point. Et un *mouvement du disque* de la position $p_0 \in \mathbb{R}^2$ à la position $p_1 \in \mathbb{R}^2$ est une application continue m de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 telle que $m(0) = p_0$ et $m(1) = p_1$. L'ensemble $m[0, 1]$ est la *trajectoire* du disque.

Le problème de la planification de trajectoire d'un disque se formule ainsi :

Etant donné un ensemble \mathcal{S} des segments constituant les côtés des obstacles, avec pour chaque segment la donnée de son successeur et de son prédécesseur dans le contour direct de l'obstacle auquel il appartient, et le rayon r du disque à déplacer :

- (1) Déterminer si une position $p \in \mathbb{R}^2$ est libre.
- (2) Etant données deux positions libres p_0 et p_1 , déterminer s'il existe un mouvement m de \mathcal{X} de la position p_0 à la position p_1 , et si oui en calculer un.

12.2.2 Rétraction — Diagramme de Voronoï

On suppose comme dans 12.1 que l'espace libre \mathcal{E} est à l'intérieur d'un rectangle.

L'espace \mathcal{E} est un ouvert du plan, et sa frontière $F(\mathcal{E})$ est constituée de lignes polygonales. On divise chaque segment constituant un côté de $F(\mathcal{E})$ en trois éléments disjoints : ses extrémités et l'intervalle ouvert restant. Soit \mathcal{S} l'ensemble de ces éléments constitué de points et d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. On notera $Vor'(\mathcal{S})$ le diagramme de Voronoï extérieur de \mathcal{S} i.e. **la restriction de $Vor(\mathcal{S})$ à l'espace libre \mathcal{E} et à sa frontière $F(\mathcal{E})$.**

Conformément aux résultats vus dans la section 11.4, $Vor(\mathcal{S})$ est un graphe planaire qui partitionne le plan en régions $R(s)$ pour $s \in \mathcal{S}$ (les régions sont fermées, il s'agit donc d'un partitionnement au sens où deux régions ne se chevauchent pas). Par ailleurs, pour $s \in \mathcal{S}$, $R(s)$ jouit des propriétés suivantes :

- $R(s)$ est homéomorphe à un disque fermé (éventuellement de rayon nul ou infini).

- La frontière de $R(s)$ est constituée de segments de droite et d'arcs de parabole.
- $R(s)$ est étoilée relativement à s .
- Si s est un point alors s appartient à la frontière de $R(s)$ (cela est dû au fait qu'il existe dans \mathcal{S} un intervalle d'extrémité s).
- Si s est un intervalle, alors s est contenu dans l'intérieur de $R(s)$, et la frontière de $R(s)$ passe par les extrémités de s (figure 2.2).

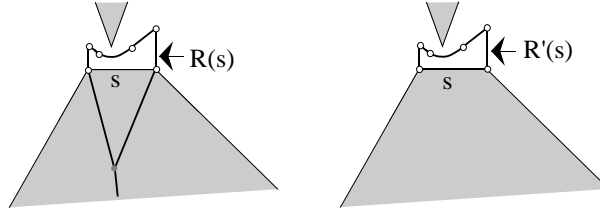


Figure 2.2: Une région $R(s)$, et la région $R'(s)$ associée (en gras).

Il s'ensuit que $Vor'(\mathcal{S})$ partitionne l'espace $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup F(\mathcal{E})$ en régions $R'(s) = R(s) \cap \bar{\mathcal{E}}$ pour $s \in \mathcal{S}$ qui vérifient des propriétés déduites de celles de $R(s)$:

- $R'(s)$ est homéomorphe à un disque fermé (éventuellement de rayon nul).
- La frontière de $R'(s)$ est constituée de segments de droite et d'arcs de parabole.
- $R'(s)$ est étoilée relativement à s .
- Si s est un point alors s appartient à la frontière de $R'(s)$.
- Si s est un intervalle, alors s est contenu dans la frontière de $R'(s)$ ainsi que ses extrémités.

Amplitude et voisins d'un point de \mathcal{E}

Pour tout point $p \in \mathcal{E}$ on définit l'*amplitude* de p , que l'on note $\delta(p)$, comme étant la distance de p au complément de \mathcal{E} dans le plan. Comme \mathcal{E} est ouvert, cette distance est « atteinte », ou encore il existe au moins un point $q \notin \mathcal{E}$ tel que $\delta(p) = d(p, q)$. Naturellement, q est sur la frontière de \mathcal{E} c'est-à-dire appartient à l'un des côtés des obstacles. En fait, $\delta(p)$ représente tout simplement la valeur maximale du rayon d'un disque ouvert de centre p contenu dans \mathcal{E} . On a donc :

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathcal{E} \mid \delta(p) > r\}$$

Notons que l'ensemble des points $q \notin \mathcal{E}$ tels que $\delta(p) = d(p, q)$ est fini puisque c'est l'ensemble des points d'intersection d'un cercle avec un nombre fini de segments. Ce sont les points du complémentaire de \mathcal{E} les plus près de p , on les appellera *voisins* de p . On notera $voisins(p)$ cet ensemble :

$$voisins(p) = \{q \notin \mathcal{E} \mid \delta(p) = d(p, q)\}$$

Avec ces notations, il est clair qu'un point p appartient à $Vor(\mathcal{S})$ si et seulement si $voisins(p)$ possède plus d'un point.

$$Vor(\mathcal{S}) = \{p \mid \text{Card}(voisins(p)) \geq 2\}$$

Rétraction de \mathcal{E} sur $Vor'(\mathcal{S})$

On définit une application $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow Vor'(\mathcal{S})$ appelée *rétraction*, de la façon suivante :

Soit p un point de \mathcal{E} , et q un point de $voisins(p)$.

Si q est le seul voisin de p , alors q est soit un point élément de \mathcal{S} , soit un point d'un intervalle s de \mathcal{S} , et dans les deux cas, p est intérieur à une région $R'(s)$, avec $s \in \mathcal{S}$ et $d(p, s) = d(p, q) = \delta(p)$. Comme $R'(s)$ est étoilée, d'intérieur non vide puisqu'il contient p , homéomorphe à un disque, on en déduit que la demi-droite $[q, \overrightarrow{qp})$ coupe la frontière de $R'(s)$ en un point **unique** $t \in Vor'(\mathcal{S})$; on pose alors $\rho(p) = t$.

Si $voisins(p)$ admet plusieurs points, alors p appartient à $Vor'(\mathcal{S})$ et les demi-droites $[q, \overrightarrow{qp})$ (définies précédemment) définissent toutes le même point t à savoir précisément le point p lui-même. Donc, la définition de ρ donnée dans le cas où $voisins(p)$ n'a qu'un point reste consistante dans les autres cas et implique que ρ est l'identité pour les points de \mathcal{E} qui sont sur $Vor'(\mathcal{S})$.

Proposition 2.1. a) La rétraction ρ est une application continue de \mathcal{E} sur $Vor'(\mathcal{S}) \cap \mathcal{E}$.

b) Si $\rho(p) \neq p$ alors la fonction δ est strictement croissante sur le segment allant de p à $\rho(p)$.

Preuve. a) L'application ρ est clairement continue en tout point de $\mathcal{E} - Vor'(\mathcal{S})$. Si $p \in Vor'(\mathcal{S})$ alors p appartient à la frontière de plusieurs régions $R(s_1), \dots, R(s_k)$, et pour toute suite de points p_i tendant vers p et restant dans R_{s_j} , la suite $\rho(p_i)$ tend vers $\rho(p) = p$. Donc pour toute suite de points p_i tendant vers p , $\rho(p_i)$ tend vers $\rho(p)$.

b) Si $\rho(p) \neq p$ alors p appartient à l'intérieur d'une région $R'(s)$ et pour tout point $p' \in]p, \rho(p)[$ on a :

$$\delta(p) = d(p, s) = d(q, p) < d(q, p') = d(s, p') = \delta(p')$$

■

Corollaire 2.2. Si $p \in \mathcal{L}$ alors il existe un mouvement libre (rectiligne) du disque de la position p vers la position $\rho(p)$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la partie b) de la proposition. ■

Proposition 2.3. *Il existe un mouvement libre du disque de la position $p_0 \in \mathcal{L}$ vers la position $p_1 \in \mathcal{P}\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe un mouvement libre du disque de la position $\rho(p_0)$ vers la position $\rho(p_1)$ dans $Vor'(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}$.*

Preuve.

La condition est suffisante :

Par le corollaire 2.2, il existe un mouvement libre de p_0 vers $\rho(p_0)$ et un mouvement libre de $\rho(p_1)$ vers p_1 , donc en composant les trois mouvements on obtient le résultat.

Réciproquement, soit μ un mouvement libre de p_0 vers p_1 , et $\mathcal{C} = \mu[0, 1]$. Alors, par la Proposition 2.1, $\rho(\mathcal{C}) \subset Vor'(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}$ et le composé $\rho \circ \mu$ est un mouvement libre du disque de la position $\rho(p_0)$ vers la position $\rho(p_1)$ dans $Vor'(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}$. On peut dire que $\rho \circ \mu$ est le «rétracté sur $Vor'(S)$ » du mouvement μ , comme on le voit sur la figure 2.5. ■

12.2.3 Exposé de l'algorithme

Question Q_1

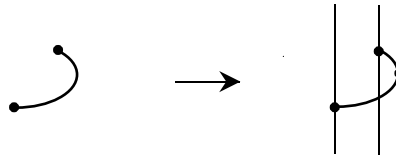
Pour savoir si une position p est libre pour le disque donné, c'est-à-dire si le disque, centré au point p , est entièrement contenu dans l'espace libre \mathcal{E} , il existe une méthode «naïve» qui résout le problème en temps $O(n)$. Il suffit pour cela de calculer $\delta(p)$ en calculant la distance de p à chaque élément de \mathcal{S} . Cela permet, en considérant un point q appartenant à la frontière de \mathcal{E} et qui réalise $d(p, q) = \delta(p)$, et en comparant la position du segment $[p, q]$ aux côtés des obstacles passant par q , de tester si $p \in \mathcal{E}$. Puis la comparaison de $\delta(p)$ avec le rayon r du disque détermine si p est une position libre.

Nous allons voir qu'un prétraitement en temps $O(n \log n)$ permet de résoudre la question en temps $O(\log n)$.

Prétraitement

Le graphe $Vor(\mathcal{S})$ partitionne le plan en régions dont les côtés sont des segments ou des arcs de parabole. On peut appliquer l'algorithme vu en 11.3.3, moyennant les modifications suivantes :

On détermine pour chaque arc de parabole ses points extrémaux (horizontalement parlant, c'est-à-dire ceux d'ordonnée extrême), et on scinde l'arc en deux si ses points extrémaux ne coïncident pas avec ses extrémités (figure 2.3). Cette modification se fait en temps $O(n)$. Elle est nécessaire pour que la deuxième recherche dichotomique dans une bande verticale soit possible, et il faut pour cela qu'à l'intérieur de chaque bande, les «traces» des régions puissent être ordonnées verticalement.

Figure 2.3: *Scission d'un arc de parabole.*

Ainsi utilisant les résultats des chapitres précédents, on en déduit le prétraitement suivant en temps $O(n \log n)$ et en espace $O(n)$:

```

procédure PRÉTRAITEMENT ( $Q_1$ );
(1) pour chaque point  $q \in \mathcal{S}$  faire
    établir une liste circulaire des côtés des obstacles incidents à  $q$ 
    relativement à l'ordre polaire relatif à  $q$ 
  finpour;
(2) calculer  $Vor(\mathcal{S})$ ;
(3) scinder les arcs de parabole de  $Vor(\mathcal{S})$  si nécessaire;
(4) calculer l'arbre persistant  $\mathcal{A}$  de la subdivision plane associée.

```

Traitement de (Q_1)

Pour tester si p est une position libre, on peut alors appliquer l'algorithme de la section 11.3.3 qui détermine en temps $O(\log n)$ à quelle région de Voronoï $R(s)$ le point p appartient. Il reste à déterminer si cette position est libre. Or la position de p relativement à s détermine si $p \in \mathcal{E}$ en temps $O(1)$ si s est un intervalle, et en temps $O(\log n)$ grâce à la ligne (1) du prétraitement si s est un point. En effet, chaque intervalle s a une orientation liée au contour direct du polygone auquel il appartient; on détermine donc en temps constant si p est à gauche ou à droite de l'intervalle orienté, ce qui permet d'en déduire s'il est dans \mathcal{E} ou non. Par contre, si s est un point, le nombre d'obstacles incidents à s est $O(n)$ et déterminer si p est dans \mathcal{E} se calcule en temps $O(\log n)$.

```

procédure POSITION-LIBRE( $p$ );
(1) déterminer  $s$  tel que  $p \in R(s)$ ;
(2) déterminer selon la nature de  $s$  (point ou intervalle)
    et la place de  $p$  relativement à  $s$  si  $p \in \mathcal{E}$ ;
(3)  $l := \delta(p)$ ;
(4) si  $l > r$  alors  $p \in \mathcal{L}$  sinon  $p \notin \mathcal{L}$ .

```

D'où le résultat :

Théorème 2.4. *Etant donné un espace libre polygonal borné à n sommets et un disque de rayon donné, un prétraitement (indépendant du disque) en temps $O(n \log n)$ et en espace $O(\log n)$ permet de déterminer en temps $O(\log n)$ si une position donnée du disque est une position libre.*

Question Q_2

Etant données deux positions libres p_0 et p_1 , il s'agit de déterminer s'il existe un mouvement m de \mathcal{X} de la position p_0 à la position p_1 , et si oui d'en calculer un.

On utilise pour ce faire les résultats obtenus en 12.2.2. Conformément à la proposition 2.3, il suffit de déterminer s'il existe un mouvement libre du disque de la position $\rho(p_0)$ vers la position $\rho(p_1)$ dans $Vor'(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}$. Pour résoudre ce problème efficacement, il suffit d'ajouter dans le graphe $Vor'(\mathcal{S})$ une information supplémentaire relative à chaque arête.

Soit e une arête de $Vor'(\mathcal{S})$. Rappelons que cette arête est un segment ou un arc de parabole. On définit sa *largeur* $\lambda(e)$ comme étant $\max\{\delta(p) \mid p \in e\}$. Or pour chaque arête e , il existe deux éléments s et s' de \mathcal{S} tels que pour tout point p de e on ait :

$$\delta(p) = d(p, s) = d(p, s')$$

On peut donc calculer en temps $O(1)$ le nombre $\lambda(e)$. La figure 2.4 donne un exemple.

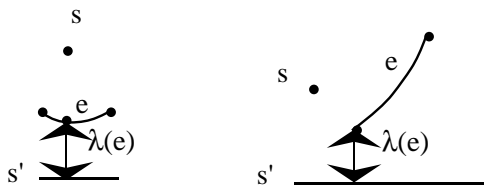


Figure 2.4: $\lambda(e)$ lorsque e est un arc de parabole.

Ce prétraitement étant réalisé, la résolution du problème devient : soient e_0 et e_1 les arêtes respectives auxquelles $\rho(p_0)$ et $\rho(p_1)$ appartiennent. Si $e_0 = e_1$, on détermine en temps constant si le mouvement de $\rho(p_0)$ vers $\rho(p_1)$ le long de e_0 est libre. Sinon $\rho(p_0)$ scinde l'arête e_0 en deux nouvelles arêtes e'_0 et e''_0 (l'une pouvant être de longueur nulle) dont on calcule la largeur, de même pour $\rho(p_1)$. On doit scinder les arêtes e_0 et e_1 , car il se peut que l'on ait $\lambda(e_0) < r$ et que néanmoins l'une des deux arêtes e'_0 ou e''_0 , par exemple e'_0 , ait une largeur $> r$, auquel cas le disque peut se déplacer à partir de la position $\rho(p_0)$ le long de l'arête e_0 dans un sens (à savoir sur e'_0), mais pas dans l'autre (c'est-à-dire sur e''_0). Il reste à chercher dans le graphe $Vor'(\mathcal{S})$ ainsi transformé s'il existe un chemin de $\rho(p_0)$ vers $\rho(p_1)$ empruntant uniquement des arêtes f tels que $\lambda(f) > r$. Cette recherche se fait en temps $O(n)$.

Prétraitement

procédure PRÉTRAITEMENT (Q_2);

- (1) calculer le diagramme de Voronoï $Vor(\mathcal{S})$;
- (2) construire le sous-graphe $Vor'(\mathcal{S})$ de $Vor(\mathcal{S})$ obtenu en supprimant les arêtes de $Vor(\mathcal{S})$ intérieures aux obstacles
- (3) pour chaque arête $e \in Vor'(\mathcal{S})$ calculer $\lambda(e)$.

Complexité du prétraitement

- L'étape (1) prend un temps $O(n \log n)$ (théorème 4.11 du chapitre 11);
 - Chaque arête e de $Vor(\mathcal{S})$ est (aux extrémités près) contenue dans un obstacle ou dans l'espace libre \mathcal{E} , et on en décide en temps constant en examinant sa situation par rapport aux deux éléments s et s' tels que e est une arête de la frontière entre les deux régions $R(s)$ et $R(s')$. Ainsi l'étape (2) prend un temps $O(n)$;
 - L'étape (3), comme on l'a vu, se réalise en temps $O(n)$.

Traitement de (Q_2)

procédure MOUVEMENT LIBRE DISQUE(p_0, p_1);

- (1) $p'_0 := \rho(p_0)$; $p'_1 := \rho(p_1)$; {Calcul des rétractés}
- (2) soient e_0 et e_1 les arêtes respectives de $Vor'(\mathcal{S})$ auxquels p'_0 et p'_1 appartiennent;
- (3) pour $i = 0, 1$ faire
 remplacer dans $Vor'(\mathcal{S})$, l'arête e_i par les deux arêtes e'_i et e''_i
 obtenues par scission de e_i par p'_i et calculer leur largeur;
 finpour
- (4) chercher un chemin de p'_0 à p'_1 dans le nouveau graphe utilisant uniquement des arêtes de largeur $> r$ joignant p'_0 à p'_1 .

Exemple.

La figure 2.5 donne un exemple de résolution du problème.

Le mouvement du disque calculé par l'algorithme se décompose donc en trois mouvements : le premier, qui est rectiligne, amène le disque de la position p_0 à la position rétractée $\rho(p_0)$ qui est sur une arête de Voronoï; le deuxième mouvement fait glisser le centre du disque le long d'un chemin formé d'arêtes de Voronoï (qui « guident » le mouvement) vers la position rétractée $\rho(p_1)$ de la position p_1 ; puis le disque quitte le diagramme de Voronoï et, par un mouvement rectiligne arrive en position p_1 .

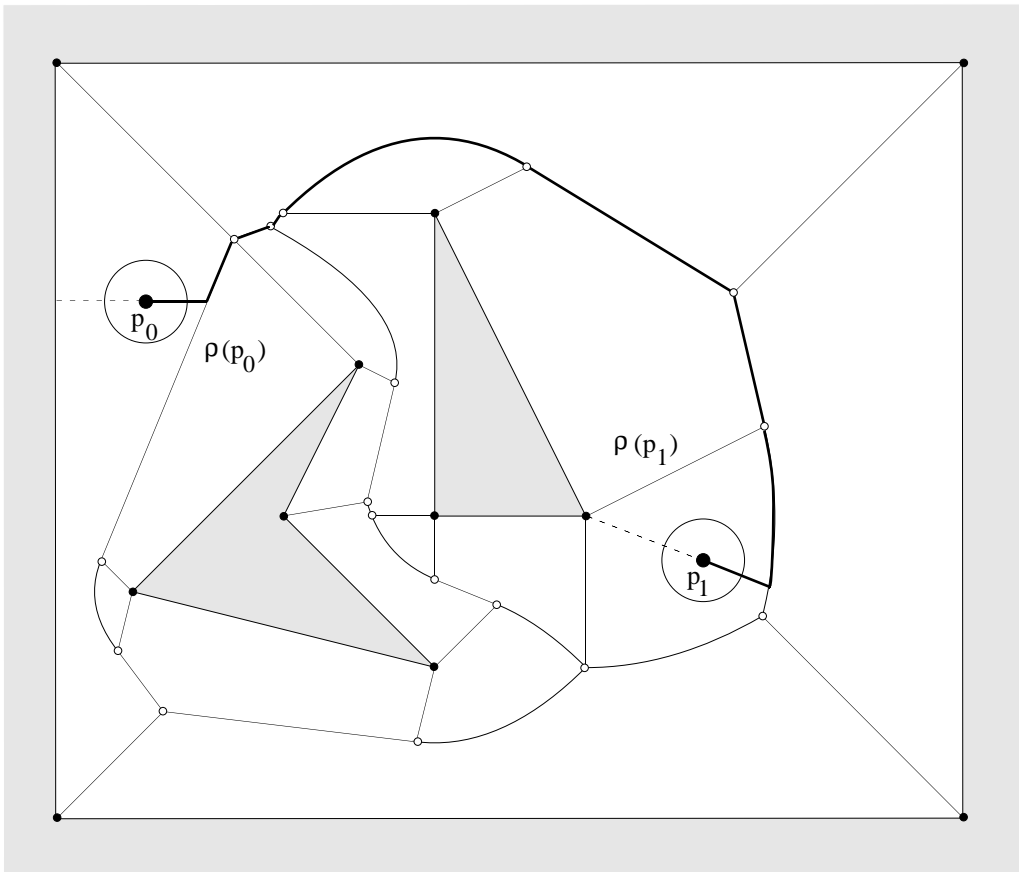


Figure 2.5: Un exemple de mouvement utilisant cet algorithme.

Théorème 2.5. *Etant donné un espace libre polygonal borné à n sommets, un disque de rayon donné, et deux positions libres p_0 et p_1 de ce disque, un prétraitement (indépendant du disque) en temps $O(n \log n)$ et en espace $O(n)$ permet de déterminer en temps $O(n)$ un mouvement libre de ce disque, s'il existe, de la position p_0 vers la position p_1 .*

Preuve.

- On détermine en temps $O(\log n)$ à quelle région $R(s_i)$ chaque position p_i appartient. Comme $R(s_i)$ est étoilée relativement à s_i , il s'ensuit que les extrémités des arêtes de la frontière de $R(s_i)$ dans un parcours positif constituent le circuit polaire de ces points relativement à un point quelconque de s_i , et donc on peut déterminer en temps $O(\log m)$ l'image $\rho(p_i)$ où m est le nombre d'arêtes de la frontière de $R(s_i)$. Ainsi (1) prend un temps $O(\log n)$.

- (3) prend un temps $O(n)$, de même que (4). ■

12.2.4 Remarques

Il existe une autre approche, très naturelle, de ce problème et analogue à celle que nous avons développée pour le déplacement d'un segment en translation, qui consiste, d'une certaine manière à chercher des déplacements qui «longent» les obstacles. Ces déplacements sont semi-libres et constituent les «positions» limites des déplacements libres. On peut comme dans 12.1.2 diviser l'espace libre en cellules qu'on émonde ensuite en fonction du rayon du disque, ce qui donne lieu à une division de l'ensemble des positions libres en composantes connexes. Un mouvement libre est possible d'une position à une autre si ces deux positions appartiennent à la même composante connexe (figure 2.6).

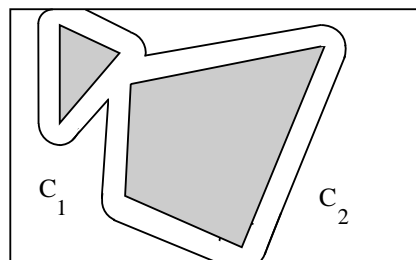


Figure 2.6: Composantes connexes des déplacements libres.

L'approche qui est exposée ici est en quelque sorte la stratégie opposée, à savoir que l'on cherche des déplacements le plus loin possible des obstacles puisqu'on déplace essentiellement le disque sur le diagramme de Voronoï des obstacles. Cette approche présente un avantage par rapport à l'autre : le prétraitement est indépendant de la taille du disque à déplacer, ce qui n'est pas le cas dans l'autre méthode où l'émondage est fonction du disque choisi. Par ailleurs l'algorithme peut s'étendre à des objets convexes de forme polygonale si l'on se restreint à des mouvements de translation, ainsi qu'à des objets réduits à un segment pour des mouvements quelconques.

Il faut signaler par contre aussi les inconvénients de cette méthode. Pour les raisons que nous avons évoquées plus haut, elle est loin de fournir le «plus court» déplacement, comme le montre l'exemple de la figure 2.7 : si l'on considère deux positions très proches et très près d'un des côtés de l'espace libre constitué d'un rectangle simple, l'algorithme fournit un déplacement passant par le «centre» du rectangle et donc très loin du plus court chemin.

Notes

L'étude du problème de planification de trajectoires sous son aspect algorithmique est très récente puisque tous les travaux réalisés sur ce sujet datent de moins de

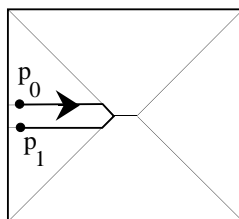


Figure 2.7: Un «mauvais déplacement».

dix ans. Il existe plusieurs approches qui font appel à des domaines variés des mathématiques allant de la géométrie traditionnelle à la géométrie algébrique en passant par la topologie, l'algèbre et la combinatoire.

La théorie des ensembles semi-algébriques est une première approche qui permet de résoudre le problème sous des hypothèses très générales, mais dont la complexité exponentielle est un inconvénient majeur d'un point de vue algorithmique; c'est pourquoi nous n'en avons pas parlé ici. Néanmoins ces travaux dus en particulier à J. Canny sont très intéressants d'un point de vue théorique et permettent de mieux cerner la nature et les difficultés du problème.

Les exemples que nous avons traités illustrent deux autres méthodes.

L'algorithme de déplacement d'un segment par translation dans un environnement polygonal dû à D. Leven et M. Shamir :

D. Leven et M. Shamir, An Efficient and Simple Motion Planning Algorithm for a Ladder Amidst Polygonal Barriers, *J. Algorithms* **8** (1987), 192–215

correspond à une méthode de projection qui est utilisée dans un cadre plus général que celui que l'on s'est fixé, en particulier pour des objets de forme polygonale quelconque dans le plan.

L'algorithme de déplacement d'un disque dans un environnement polygonal dû à C. Ó'Dunlaing et C. Yap :

C. Ó'Dunlaing, C. Yap, A "retraction" method for planning the motion of a disk, *J. Algorithms* **6** (1985), 104–111

est obtenu par un principe de rétraction. Cette approche a été étendue au cas d'un segment, et à la translation d'un polygone convexe.

Les références à ces travaux se trouvent dans :

J.T. Schwartz et M. Shamir, Algorithmic Motion Planning in Robotics, *Handbook of Theoretical Computer Science Vol. A*, Elsevier, (1990), 391–430.