MPRI – Examen

Matthieu Latapy

latapy@liafa.jussieu.fr

Exercice : Graphe aléatoires à distribution de degrés fixée.

Dans tout l'exercice, on considère un graphe aléatoire de n sommets ayant distribution de degrés $(p_k)_{k\geq 0}$. On rappelle qu'un tel graphe est obtenu en choisissant le degré de chaque sommet conformément à la distribution, puis en liant à chaque sommet autant de *demi-arêtes* que son degré, et enfin en formant les arêtes du graphe en reliant des paires de demi-arêtes choisies au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour deux demi-arêtes d'un sommet de degré k d'être reliées ensemble ?
2. Quelle est la probabilité pour un sommet de degré k d'avoir i boucles (arêtes le liant à lui-même) ?
3. Quel est le nombre attendu de sommets dans le graphe à avoir au moins une boucle ?
4. Quel est le nombre attendu de boucles dans le graphe ?
5. Quelle est la probabilité, en fonction de leurs degrés, que deux sommets donnés soient reliés par une arête ?
6. Quelle est la probabilité, en fonction de leurs degrés, qu'il y ait i arêtes entre deux sommets donnés ?
7. Quel est le nombre attendu d'arêtes multiples (c'est-à-dire telle qu'il existe au moins une autre arête entre les deux mêmes sommets) ?
8. Que peut-on déduire des réponses précédentes lorsque n rend vers l'infini ?

Problème : Compter les triangles dans un graphe.

On considère un graphe $G = (V, E)$, et on note $n = |V|$ son nombre de sommets et $m = |E|$ son nombre d'arêtes. On suppose que le graphe est codé en machine par listes d'adjacence : pour tout sommet $v \in V$ on a $N(v) = \{u \in V,\ (v, u) \in E\}$, la liste des voisins de v. On note $d(v) = |N(v)|$ le degré de $v \in V$. On note D le degré maximal des sommets de G : $D = \max_{v\in V}(d(v))$.

On veut calculer, pour *tous* les sommets $v \in V$, le nombre $t(v)$ de triangles auxquels appartient v. Un triangle est un ensemble $\{a,\ b,\ c\} \subseteq V$ de trois sommets tel que $\{(a, b),\ (b, c),\ (c, a)\} \subseteq E$.

Question 1.

Donner un algorithme simple comptant le nombre de triangles auxquels appartient *un* sommet v donné. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Qu'en déduire pour la coût de la résolution du problème si on applique pour cela cet algorithme à chaque sommet ?

Que peut-on en déduire si D est une constante indépendante de n ? et si au contraire D peut être du même ordre de grandeur que N ?

Question 2.

Donner un algorithme répondant au problème de façon plus efficace si le graphe est peu dense (m est du même ordre de grandeur que n). Quelle est sa complexité ?

Question 3.

Si les listes d'adjacences sont des tableaux triés, que deviennent les complexités déterminées ci-dessus ? Qu'en déduire sur la complexité du problème ?

Question 4.

Si on fait un parcours en largeur du graphe à partir d'un sommet v donné, afin de connaître la distance de chaque sommet à v, quelle propriété remarquable a au moins une arête de chaque triangle ? En donner une preuve.

Question 5.

En déduire une heuristique permettant de répondre au problème plus efficacement. Comment se comporte cette méthode si le graphe contient peu de triangles ? Et s'il en contient beaucoup ?

Question 6.

Avez-vous d'autres idées ?...