Exercice 1 Montrer qu'un anneau ne peut pas être idempotent (sauf s'il est réduit à un seul élément).

Exercice 2

1. Montrer que les seuls semi-anneaux à deux éléments sont le semi-anneau booléen et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Montrer que le semi-anneau booléen est isomorphe au sous-semi-anneau $(\{-\infty, 0\}, \oplus, \otimes)$ de $\mathbb{R}_{\max}$.

Exercice 3 Soit a, b dans $\mathbb{R}_{\max}$. On définit a^n par $a^1 = a$ et $a^n = a \otimes a^{n-1}$. Développer $(a \oplus b)^n$. Même question si a et b sont maintenant des matrices de $\mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$ qui commutent.

Exercice 4 Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$.

1. On suppose que le cycle de poids maximum de son graphe associé de poids est nul. Montrer qu'il en est de même pour A^n.
2. Dans le cas général, calculer le poids du cycle de poids moyen maximum du graphe associé à A^n en fonction de celui associé à A.

Exercice 5 Soit A une matrice de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ telle que $A \otimes B = B \otimes A = Id$ où Id est la matrice identité de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Une matrice diagonale D est une matrice telle que $\forall i \neq j,\ D_{ij} = -\infty$. La matrice d'une permutation σ est définie par

$$\forall i,\ P_{i\sigma(i)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall j \neq \sigma(i),\ P_{ij} = -\infty.$$

Quelles sont les matrices inversibles de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$?

Exercice 6 **Calcul de la cyclicité - Algorithme de Denardo** La cyclicité de la matrice M de $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ est le ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique. La cyclicité d'une composante connexe du graphe critique est le pgcd de la longueur de tous ses cycles. Mais le nombre de cycles est exponentiel en la taille du graphe.

Pour chaque composante connexe $G = (V, E)$ du graphe critique, calculons sa cyclicité. On commence par construire un arbre couvrant A de G, pondéré par la distance v à la racine.

1. Soit c un circuit simple de G de longueur $l(c)$. Montrer qu'on a :

$$l(c) = \sum_{i,j \in c} v(i) + 1 - v(j) = \sum_{i,j \in c-A} v(i) + 1 - v(j)$$

2. Pour tout $(i,j) \in E - A$, on pose $K_{i,j} = v(i) + 1 - v(j)$. Montrer que la cyclicité est le pgcd de tous les $K_{i,j}$.
3. En déduire un algorithme en $O(E)$ pour calculer la cyclicité de la composante G, puis montrer que le calcul de la cyclicité de M se fait en $O(n^2)$, si le graphe critique est connu.

Exercice 7

1. Soit γ un circuit d'un graphe d'événements $(\mathcal{N}, M_0)$. Pour un marquage M du graphe, on note $M(\gamma)$ le nombre total de jetons dans les places du circuit γ. Montrer que pour tout marquage atteignable M on a $M(\gamma) = M_0(\gamma)$.
2. Montrer qu'un graphe d'événements est vivant si et seulement si tous ses circuits contiennent initialement au moins un jeton.

Exercice 8 (Équation aux compteurs)

1. Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, M, \sigma)$ un graphe d'événements temporisé. On définit le compteur $n_s(t) \in \mathbb{N}$, $t \in \mathcal{T}$, qui donne le nombre de tirs de la transition t dans l'intervalle $[0,s]$, $s \in \mathbb{R}^+$.

   Montrer que les compteurs $n_s(t)$ vérifient les équations :

   $$n_s(t) = \min_{p \in {}^\bullet t} (M(p) + n_{s-\sigma(p)}({}^\bullet p)) \quad \forall t \in \mathcal{T}\ \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

   où par convention $n_s(t) = 0$ pour tout $s < 0$.
2. On peut définir de la même manière que pour le semi-anneau $\mathbb{R}_{\max}$ le semi-anneau (min,plus), $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$, où l'élément nul est $+\infty$, $\oplus$ est l'opérateur minimum et $\otimes$ reste l'addition. La semi-algèbre des matrices $\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ est aussi définie. On suppose toutes les temporisations de $\mathcal{G}$ entières.

   Donner une expression matricielle des équations précédentes.
3. Réduire l'expression matricielle obtenue en 2. en une équation de récurrence d'ordre 1 : $N(s) = B \otimes N(s-1)$.

Exercice 9 (Réseau de Kanban) Le système Kanban est un système de production permettant de répondre à la demande rapidement et de réduire les stocks des produits manufacturés. Elle a été introduite au Japon et utilisée dans les usines Toyota.

Un produit est fabriqué en une succession d'étapes. Pour éviter qu'il n'y ait un trop grand nombre de produits intermédiaire, on interdit d'effectuer la k-ième étape s'il y a plus de n objets ayant subit k étapes de fabrication exactement. De même, on ne peut terminer le produit (i.e. exécuter la dernière étape) s'il y a n produits finis en stock.

1. Modéliser le modèle Kanban avec un graphe d'événements. La fabrication du produit se fait en 2 étapes, et on ne peut avoir plus de 2 produits à chaque étape de fabrication. Dans l'état initial, aucun objet n'est réalisé, ni en cours de fabrication.
2. Écrire les équations d'évolution de ce système, en donner une représentation matricielle, et réduire cette représentation en une équation de récurrence d'ordre 1. Le temps d'exécution de la k-ième étape est σ_k.
3. Même question si dans l'état initial, si pour chaque k un produit a subit exactement k étapes de production.

Exercice 10 (Explosion des graphes d'événements) Il y a explosion dans un graphe d'événements si un nombre infini de tirs ont lieu en un temps fini. Il a été vu en cours qu'il ne peut y avoir déexplosion si toutes les temporisations sont strictement positives.

Soit $(\mathcal{N}, M)$ un graphe d'événements ayant des temporisations sur les places positives ou nulles. Soit M son marquage atteint à l'instant t. On veut compter le nombre de tirs de chaque transition à cet instant. On note $N(t)$ le vecteur représentant ces nombres.

1. Donner une équation du type $N(t) = N(t) \otimes A \oplus B$ satisfaite par $N(t)$ dans (min,+). (Les matrices A et B dépendent du marquage M).
2. À quelle condition $N(t)$ est-il fini ? Donner une interprétation dans le graphe d'événements.