Master MPRI Paris 6
Dynamique et Algorithmique des Réseaux (Module 2.17)
Feuille d'exercices de modélisation Markovienne

Alain Jean-Marie

Version 1.1 du 8 novembre 2005

Exercice 1 : la file M/M/2

On considère une file d'attente $M/M/2$ mais avec deux serveurs *hétérogènes*, numérotés 1 et 2, ayant des vitesses de service v_1 et v_2. On supposera que $v_1 \geq v_2$. Les clients y arrivent selon un processus de Poisson de débit λ. Les durées de service sont distribuées exponentiellement de moyenne 1.

a) On suppose que quand un client arrive alors que la file est vide, il entre en service dans le serveur 1 avec probabilité 1/2 et dans l'autre avec probabilité 1/2. Soit $\mathcal{E} = \{0, 1-1, 1-2, 2, 3, \ldots\}$ l'état du système, où « $1-1$ » et « $1-2$ » représentent les états où un seul client est présent, et se trouve dans le serveur 1, et le serveur 2, respectivement. Les autres états comptent simplement le nombre de clients présents. Montrer que cet état évolue comme une CMTC sur $\mathcal{E}$ et décrire son générateur infinitésimal. Montrer que cette chaîne est réversible. Déterminer la condition de stabilité et calculer la distribution stationnaire du système. Calculer le nombre moyen de clients présents.

b) On suppose maintenant que quand un client arrive alors que la file est vide, il entre en service avec le serveur 1. Déterminer la condition de stabilité et calculer la distribution stationnaire du système. Calculer le nombre moyen de clients présents.

Exercice 2 : Réseaux de Jackson bornés

Soit un réseau dont le fonctionnement est celui d'un réseau de Jackson, ouvert, mais avec une contrainte de *capacité globale*. Cette contrainte interdit qu'il y ait plus de M clients dans tout le réseau à tout moment. Si un client arrive de l'extérieur alors que le réseau est « plein », il est rejeté.
Calculer la distribution stationnaire de ce réseau.

Exercice 3 : Réseaux de Jackson

Retour sur la preuve du Théorème de Jackson pour les réseaux ouverts.

a) Finir la preuve par substitution directe de la distribution à forme produit dans les équations d'équilibre.

b) Considérer le processus renversé d'un réseau de Jackson. En déduire une façon de prouver le théorème similaire à la preuve du théorème de Kelly, à l'aide des équations de « fausse » balance détaillée.

Exercice 4 : L'insensibilité

Dans cet exercice, on étudie le fait que la distribution du nombre de clients dans une file $M/GI/\infty$ ne dépend que de la *moyenne* de la durée de service, et pas d'autres caractéristiques de la distribution.

Supposons que la distribution du temps de service soit une loi d'Erlang à p phases, c'est-à-dire la somme de p variables indépendantes de distribution exponentielle de paramètre μ. La moyenne de cette durée de service est p/μ.
Représenter cette file $M/GI/\infty$ sous la forme d'un réseau de Kelly, et utiliser le théorème de Kelly pour calculer la probabilité stationnaire qu'il y aie n clients présents.