DEA Programmation : Sémantique, Preuves et Langages — Année 2002-2003
Vérification de systèmes concurrents
Partie *Résolution de contraintes* — 2 pages

Examen du 28 mars 2003

Tous les documents sont autorisés.

On s'intéresse à une extension de la structure de Herbrand $\mathcal{A}_H$ par une relation *fils*. La structure $\mathcal{A}_H$ est définie à la page 24 du poly, et on rappelle que $Th(\mathcal{A})$ est décidable pour toutes les signatures.

Plus exactement, soit pour une signature Σ donnée la structure $\mathcal{A}_{H\ll}$ définie comme $\mathcal{A}_H$, sauf que le langage contient de plus un symbole de relation binaire $\ll$, et que $x \ll y$ est interprétée comme « x est un fils de y ». Par exemple, le terme a est un fils du terme $f(a, b)$ et aussi un fils du terme $f(f(b, b), a)$, mais pas du terme $f(b, f(a, a))$.

Exercice 1
Montrer que $Th(\mathcal{A}_{H\ll})$ est décidable pour la signature $\{a(0), f(2)\}$ (La preuve est très simple, 5 lignes maximum !)

Exercice 2
Montrer que $Th(\mathcal{A}_{H\ll})$ est non-décidable dans le cas de la signature infinie $\{\epsilon(0), a(1), b(1), f_0(0), f_1(1), f_2(2), f_3(3), \ldots\}$ (Il suffit de donner les éléments demandés dans le schéma de preuve vu en cours, éventuellement avec de brèves explications.)

On s'intéresse maintenant à une extension $\mathcal{A}_{H<}$ de la structure de Herbrand $\mathcal{A}_H$ par une relation de *descendant*. La différence avec la structure étudiée dans les exercice précédents est que la relation *descendant* est la clôture *transitive* (mais pas réflexive !) de la relation *fils* (on pourrait aussi dire *sous-terme dans le sens strict* au lieu de *decendant*).

Plus exactement, soit pour une signature Σ donnée la structure $\mathcal{A}_{H<}$ définie comme $\mathcal{A}_H$, sauf que le langage contient de plus un symbole de relation binaire $<$, et que $x < y$ est interprétée comme « x est un descendant de y ». Par exemple, le terme a est un descendant du terme $f(a, b)$ *et aussi* un descendant du terme $f(b, f(a, a))$, mais ni du terme $f(b, b)$ ni du terme a.

Exercice 3
Montrer que la *satisfaisabilité* des conjonctions de formules atomiques en $\mathcal{A}_{H<}$ est décidable pour la signature $\{a(0), f(2)\}$. On utilisera la définition d'une formule *résolue* donnée au-dessous.

1. Montrer que toute formule résolue est satisfaisable en $\mathcal{A}_{H<}$.
2. Donnez un système de règles terminaisant qui permet de transformer toute conjonction de formules atomiques de $\mathcal{A}_{H<}$ en une disjonction équivalente de formules résolues, et

montrer sa terminaison. On admet les règles standard d'unification qui sont rappelées en bas.
Il suffit de donner le système de règles et la preuve de terminaison.

On utilisera la définition d'une formule *résolue* : Une conjonction ϕ de formules atomiques est résolue ssi

1. en ϕ, toutes les équations sont de la forme $x = t$ où x est une variable ;
2. si ϕ contient une équation $x = t$ alors la variable x est éliminée en ϕ, c.-à-d. la seule occurrence de cette variable x dans ϕ est le côté gauche de l'équation $x = t$;
3. si $x < y \in \phi$ et $y < z \in \phi$ alors $x < z \in \phi$, où x, y et z sont des variables ;
4. pour aucune variable x on a $x < x \in \phi$;
5. si $f(t_1, t_2) < t \in \phi$ alors $t_1 < t \in \phi$ et $t_2 < t \in \phi$;
6. si $t < s \in \phi$ alors s est une variable.

Rappel des règles d'unification

Pour le cas de la signature $\{a(0), f(2)\}$. On admet que l'égalité est symétrique, c.-à-d. on identifie $s = t$ avec $t = s$.

(U1) $\dfrac{a = a}{\top}$

(U2) $\dfrac{f(s_1, s_2) = f(t_1, t_2)}{s_1 = t_1 \wedge s_2 = t_2}$

(U3) $\dfrac{a = f(t_1, t_2)}{\bot}$

(U4) $\dfrac{x = x}{\top}$

(U5) $\dfrac{x = t}{\bot}$ si $x \in \mathit{Var}(t)$, t différent de x

(U6) $\dfrac{x = t \wedge \phi}{x = t \wedge \phi[x/t]}$ $x \notin \mathit{Var}(t), x \in \mathit{Var}(\phi)$

Exercice 4
On s'intéresse maintenant à une variante $\mathcal{A}_{H<}^{\infty}$ de $\mathcal{A}_{H<}$. La seule différence entre la structure $\mathcal{A}_{H<}^{\infty}$ et la structure $\mathcal{A}_{H<}$ est que le domaine de $\mathcal{A}_{H<}^{\infty}$ contient à la fois les termes finis et aussi les termes infinis.

Montrer que $\mathit{Th}(\mathcal{A}_{H<}^{\infty})$ est non-décidable pour la signature $\{\epsilon(0), a(1), b(1), f(3)\}$. Attention, cela demande une extension du schéma de preuve vu en cours. Expliquer d'abord l'extension nécessaire.