Examen de démonstration automatique 2001

Documents autorisés (en particulier le poly).

Partie “Théorie des structures de données concrètes”

On définit en $\mathcal{A}_{S2S}$ une abréviation pour dire que des ensembles sont disjoints entre eux :

$$\mathit{disjoint}(X_1, \ldots, X_n) \quad :\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\neg \exists y (y \in X_i \wedge y \in X_j))$$

1. Pour quelles valeurs de x est-ce que la formule suivante est vraie dans la structure $\mathcal{A}_{S2S}$?

$$\begin{aligned} \exists X_0, X_1, X_\perp \Big(\quad & \mathit{disjoint}(X_0, X_1, X_\perp)) \\ & \wedge \epsilon \in X_0 \\ & \wedge x \in X_0 \\ & \wedge \forall y (y \in X_0 \rightarrow y0 \in X_1 \wedge y1 \in X_\perp) \\ & \wedge \forall y (y \in X_1 \rightarrow y0 \in X_0 \wedge y1 \in X_\perp) \\ & \wedge \forall y (y \in X_\perp \rightarrow y0 \in X_\perp \wedge y1 \in X_\perp) \quad \Big) \end{aligned}$$

2. Montrer le théorème suivant : pour tout langage régulier L sur l’alphabet $\{0, 1\}$ il existe une formule $F_L(x)$ du langage de la structure $\mathcal{A}_{S2S}$ telle que pour tout mot $w \in \{0, 1\}^*$:

$$\mathcal{A}_{S2S}, [x \mapsto w] \models F_L(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad w \in L$$

3. On considère la structure $\mathcal{A}'_{S2S}$ qui a le même langage que $\mathcal{A}_{S2S}$. La seule différence dans l’interprétation est que le symbole de fonction 0 est interprété par $0(w) := 0w$, tandis que le symbole de fonction 1 garde son ancienne interprétation $1(w) := w1$. Montrer que la théorie de $\mathcal{A}'_{S2S}$ est indécidable.

   Indication: Réduire le problème indécidable suivant :

   Étant donnée une machine de Turing sur l’alphabet $\{a, b\}$ à ruban borné gauche et qui ne s’arrête jamais, et un état q, est-ce que l’état q est atteignable à partir de l’état initial et ruban infini (à droite) rempli avec 0 ?

   L’idée est de représenter un calcul d’une telle machine de Turing par une grille où chaque configuration est représentée par la partie du ruban à gauche de la tête, puis l’état, puis la partie du ruban à droite de la tête. Les cases de la grille sont donc remplies soit par a, b, ou par un symbole qui représente un état de la machine. Noter qu’une coordonnée (n, m) de la grille peut être représentée par le mot $0^n 1^m$. On utilisera des variables d’ensembles pour dénoter les cases qui sont remplies par a, b, et les états q_0, q_1, etc.