La méthode inverse

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Les questions sont annotées par un niveau de difficulté, variant de (0) (facile) à (3) (difficile).

Le but de ce problème est d'étudier une méthode de preuve en logique du premier ordre inventée en 1963 par Sergei Youri Maslov, et perfectionnée depuis par Grigori Mints, Vladimir Orevkov, Andrei Voronkov, et Tanel Tammet entre autres, la *méthode inverse*.

Partie I.

Le but de cette partie est de formaliser la notion de *forme clausale définitionnelle*, due à Tseitin en 1957 dans le cas propositionnel, et étendue au premier ordre par Boy de la Tour en 1989.

On considère un langage $\mathcal{L}_1$ du premier ordre, ayant pour ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}_1$, et pour ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}_1$. On supposera toujours que nos formules sont *rectifiées*, autrement dit aucune variable n'est à la fois libre et liée, ni liée par deux occurrences différentes de quantificateurs.

On définit l'ensemble $\mathcal{C}_1(F)$ des *sous-formules libres immédiates* d'une formule F_1 par: $\mathcal{C}_1(A) = \emptyset$ pour tout atome A, $\mathcal{C}_1(F_1 \wedge F_2) = \mathcal{C}_1(F_1 \vee F_2) = \mathcal{C}_1(F_1 \Rightarrow F_2) = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{C}_1(\neg F) = \{F\}$, $\mathcal{C}_1(\forall x \cdot F) = \mathcal{C}_1(\exists x \cdot F) = \{F\}$.

On définit les *sous-formules libres* d'une formule F de $\mathcal{L}_1$ comme les éléments du plus petit ensemble $\mathcal{C}(F)$ tel que $F \in \mathcal{C}(F)$, et si $G \in \mathcal{C}(F)$, alors toutes les sous-formules libres immédiates de G sont dans $\mathcal{C}(F)$. On remarquera que toute sous-formule est une instance d'une sous-formule libre (pas nécessairement unique).

À chaque formule F, on associe la *liste* de ses variables libres comme suit. On se donne un ordre total $<$ sur les variables, et si l'ensemble des variables libres de F est $\{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < \ldots < x_n$, alors la liste $\mathcal{V}(F)$ est la liste $(x_1, \ldots, x_n)$. (Autrement dit, c'est l'ensemble trié en ordre croissant pour $<$.) Le nombre n des variables libres de F est appelé son *arité* $n(F)$.

On suppose qu'on s'est donné un ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}_2$, disjoint de $\mathcal{P}_1$, et qui est en bijection avec l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_1$ non atomiques. Le prédicat associé à la formule non-atomique F de $\mathcal{L}_1$ est noté R_F, et est supposé d'arité $n(F)$.

On appellera $\mathcal{L}_2$ le langage du premier ordre dont les symboles de fonctions sont ceux de $\mathcal{F}_1$ et dont les symboles de prédicats sont ceux de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Pour toute formule F de $\mathcal{L}_1$, on note $\tilde{F}$ la formule atomique de $\mathcal{F}_2$ égale à F elle-même si F est atomique, et sinon à $R_F(x_1, \ldots, x_n)$, où $(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{V}(F)$.

On note aussi $\forall(F)$ la clôture universelle de F, i.e. la formule $\forall x_1 \cdot \ldots \cdot \forall x_n \cdot F$, où $(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{V}(F)$.

1. (0) On considère la traduction suivante de $\mathcal{L}_1$ vers l'ensemble des parties de $\mathcal{L}_2$:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(A) = \emptyset & \text{si } A \text{ est atomique} \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow (\tilde{F}_1 \wedge \tilde{F}_2))\} & \text{si } F = F_1 \wedge F_2 \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow (\tilde{F}_1 \vee \tilde{F}_2))\} & \text{si } F = F_1 \vee F_2 \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow (\tilde{F}_1 \Rightarrow \tilde{F}_2))\} & \text{si } F = F_1 \Rightarrow F_2 \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow \neg \tilde{F}_1)\} & \text{si } F = \neg F_1 \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow \forall x \cdot \tilde{F}_1)\} & \text{si } F = \forall x \cdot F_1 \\
f_1(F) = \{\forall(\tilde{F} \Leftrightarrow \exists x \cdot \tilde{F}_1)\} & \text{si } F = \exists x \cdot F_1
\end{array}
$$

et on définit l'ensemble de formules $f(F)$, pour toute formule F de $\mathcal{L}_1$, par $f(F) = \bigcup_{F_1 \in \mathcal{C}(F)} f_1(F_1)$.

Soit $\hat{F}$ la conjonction de $\neg\tilde{F}$ et de toutes les formules de $f(F)$. Montrer que $\hat{F}$ n'est pas en général équivalente à $\neg F$.

Prenons par exemple $F = A \wedge B$, où A et B sont atomiques. Alors $\hat{F} = \neg\tilde{F} \wedge (\tilde{F} \Leftrightarrow (A \wedge B))$. Dans n'importe quelle interprétation où A ou B est faux, F est fausse, donc $\neg F$ est vraie; mais si en plus l'interprétation envoie $\tilde{F}$ vers vrai, alors $\hat{F}$ est fausse dans cette interprétation. Donc F n'est pas équivalente à $\hat{F}$. En fait, F n'est équivalente à $\hat{F}$ que lorsque F est une formule atomique.

2. (2) Montrer que pour toute formule close F, si $\hat{F}$ est satisfiable, alors F est invalide.

   Remarquons que F, $\tilde{F}$, et toutes les formules de $f(F)$ sont closes, donc dire qu'elles sont satisfiables revient à dire qu'il existe une interprétation I qui les satisfait (pour n'importe quelle affectation ρ).

   Supposons donc que $\hat{F}$, c'est-à-dire $\neg\tilde{F} \wedge \bigwedge_{G \in f(F)} G$ soit satisfiable, et soit donc I une interprétation des symboles de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ telle que $I \models \neg\tilde{F} \wedge \bigwedge_{G\in f(F)} G$. Montrons alors que $I \not\models F$, c'est-à-dire puisque F est close, que $I \models \neg F$.

   Plus précisément, nous montrons que pour toute sous-formule libre F' de F, pour toute affectation ρ, $[\![F']\!]I\rho = [\![\tilde{F}']\!]I\rho$, par récurrence structurelle sur F'. Comme F est une sous-formule libre de F telle que $I, \rho \models \neg\tilde{F}$ par hypothèse, il s'ensuivra que $I, \rho \models \neg F$ pour tout ρ, donc $I \models \neg F$.

   - *Si F' est une formule atomique, alors $\tilde{F} = F$, et donc $[\![F']\!]I\rho = [\![\tilde{F}']\!]I\rho$.*
   - *Si F' est de la forme $F'_1 \wedge F'_2$, alors par hypothèse $I \models \forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow (\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2))$ (cette équivalence est un élément de $f(F)$, parce que F' est une sous-formule libre de F). Donc, pour tout ρ, $[\![\tilde{F}']\!]I\rho$ est la conjonction (sémantique) de $[\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho$ et de $[\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho$. Mais par hypothèse de récurrence $[\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho = [\![F'_1]\!]I\rho$ et $[\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho = [\![F'_2]\!]I\rho$, et la conjonction sémantique de $[\![F'_1]\!]I\rho$ et de $[\![F'_2]\!]I\rho$ n'est rien d'autre que la valeur de $[\![F']\!]I\rho$, donc $[\![\tilde{F}']\!]I\rho = [\![F']\!]I\rho$.*
     Les cas où F' est de la forme $F'_1 \vee F'_2$, $F'_1 \Rightarrow F'_2$, $F'_1 \Rightarrow F'_2$ ou $\neg F'$ sont similaires.
   - *Si F' est de la forme $\forall x \cdot F'_1$, alors par hypothèse $I \models \forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow \forall x \cdot \tilde{F}'_1)$ (cette équivalence est un élément de $f(F)$, parce que F' est une sous-formule libre de F). Donc, pour tout ρ, $[\![\tilde{F}']\!]I\rho$ égale $[\![\forall x \cdot \tilde{F}'_1]\!]I\rho$, qui est la conjonction (sémantique) des $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ pour tout v dans le domaine de l'interprétation I. Mais par hypothèse de récurrence $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x]) = [\![F'_1]\!]I\rho$, et la conjonction sémantique de tous les $[\![F'_1]\!]I(\rho[v/x])$ n'est rien d'autre que la valeur de $[\![F']\!]I\rho$, donc $[\![\tilde{F}']\!]I\rho = [\![F']\!]I\rho$.*
     Le cas où F' est de la forme $\exists x \cdot F'_1$ est similaire.

3. (2) Montrer que toute interprétation I des symboles de $\mathcal{L}_1$ s'étend en une interprétation I' des symboles de $\mathcal{L}_2$ telle que $[\![\tilde{F}']\!]I'\rho = [\![F']\!]I\rho$ pour toute affectation ρ et pour toute sous-formule libre F' de F.

   Nous étendons I en une interprétation I' des symboles de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ comme suit: pour tout $f \in \mathcal{F}_1$, soit $I'(f) = I(f)$; pour tout $P \in \mathcal{P}_1$, soit $I'(P) = I(P)$; pour tout $P \in \mathcal{P}_2$, P est de la forme $R_{F'}$ pour une unique formule F' de $\mathcal{L}_1$, et nous posons:

   $$I'(R_{F'})(v_1, \ldots, v_n) = [\![F']\!]I[x_1 \mapsto v_1, \ldots, x_n \mapsto v_n] \tag{1}$$

   où $(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{V}(F')$.

   Montrons maintenant que pour toute sous-formule libre F' de F, pour toute affectation ρ:

   $$[\![\tilde{F}']\!]I'\rho = [\![F']\!]I\rho \tag{2}$$

   Si F' est atomique, alors c'est par définition de $\tilde{F}'$. Sinon, $[\![\tilde{F}']\!]I'\rho = I'(R_{F'})([\![x_1]\!]I'\rho, \ldots, [\![x_n]\!]I'\rho) = [\![F']\!]I[x_1 \mapsto [\![x_1]\!]I'\rho, \ldots, x_n \mapsto [\![x_n]\!]I'\rho]$ par l'équation 1. Mais ce dernier est exactement $[\![F']\!]I\rho$, car $[x_1 \mapsto [\![x_1]\!]I'\rho, \ldots, x_n \mapsto [\![x_n]\!]I'\rho]$ est la retriction de ρ aux variables libres $x_1, \ldots, x_n$ de F'.

4. (1) Déduire de la question précédente que $f(F)$ (vu comme une conjonction) est satisfiable pour toute formule F.

   Il ne reste qu'à montrer que toutes les formules de $f(F)$ sont satisfaites par I', autrement dit toutes les formules de $f_1(F')$, pour toute sous-formule libre F' de F, sont satisfaites par I':

- *Si F' est atomique, c'est trivial parce que $f_1(F')$ est vide.*
- *Si F' est de la forme $F'_1 \wedge F'_2$, alors pour toute affectation ρ, $[\![\tilde{F}']\!]I'\rho$ égale $[\![F']\!]I\rho$ par la question 3, et $[\![F']\!]I\rho$ est la conjonction sémantique de $[\![F'_1]\!]I\rho$ et de $[\![F'_2]\!]I\rho$, c'est-à-dire de $[\![\tilde{F}'_1]\!]I'\rho$ et de $[\![\tilde{F}'_2]\!]I'\rho$ par la question 3. On en conclut que $I \models \forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow (\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2)$, autrement dit que I satisfait toutes les formules de $f_1(F')$.*

  L'argument est en fait similaire pour tous les autres opérateurs.

5. (1) Montrer la réciproque à la question 2 : pour toute formule close F, si F est invalide, alors $\hat{F}$ est satisfiable.

   Supposons que F soit invalide, autrement dit que $\neg F$ soit satisfiable, et montrons que $\neg\tilde{F} \wedge \bigwedge_{G \in f(F)} G$ est aussi satisfiable. Comme F est invalide, il existe une interprétation I des symboles de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{P}_1$ telle que $I \not\models F$, autrement dit $I \models \neg F$, c'est-à-dire $I, \rho \models \neg F$ pour toute affectation ρ (puisque F est close).

   Nous étendons I en une interprétation I' comme dans la question 3. Alors par les résultats de la question 4, I' satisfait $\bigwedge_{G \in f(F)} G$. Et comme $I, \rho \models \neg F$ (cf. ci-dessus) et $[\![F]\!]I\rho = [\![\tilde{F}]\!]I'\rho$, on a $I', \rho \models \neg\tilde{F}$ et ce pour tout ρ. Donc $I', \rho \models \hat{F}$, et en conséquence $\hat{F}$ est satisfiable.

6. (1) On rappelle que la taille $|F|$ d'une formule F est le nombre de ses sous-formules. Définissons la taille $|C|$ d'une clause C de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ (où $L_1, \ldots, L_n$ sont des littéraux) comme étant n, et la taille $|S|$ d'un ensemble S de clauses comme $\sum_{C \in S} |C|$.

   Convertir $f(F)$ en une forme clausale $S(F)$, de sorte que $\hat{F}$ soit satisfiable si et seulement si $\{\neg\tilde{F}\} \cup S(F)$ l'est. Montrer que la taille de cette forme clausale est $\leq k|F|$, pour une certaine constante $k > 0$. Discuter.

   L'ensemble $S(F)$ est l'ensemble de clauses contenant les clauses suivantes :

   - *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow (\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2))$ dans $f(F)$, les clauses:*

   $$\begin{array}{l} \neg\tilde{F}' \vee \tilde{F}'_1 \\ \neg\tilde{F}' \vee \tilde{F}'_2 \\ \neg\tilde{F}'_1 \vee \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}' \end{array}$$

   - *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow (\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'_2))$ dans $f(F)$, les clauses:*

   $$\begin{array}{l} \neg\tilde{F}' \vee \tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'_2 \\ \neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}' \\ \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}' \end{array}$$

   - *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow (\tilde{F}'_1 \Rightarrow \tilde{F}'_2))$ dans $f(F)$, les clauses:*

   $$\begin{array}{l} \neg\tilde{F}' \vee \neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'_2 \\ \tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}' \\ \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}' \end{array}$$

   - *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow \neg\tilde{F}'_1)$ dans $f(F)$, les clauses:*

   $$\begin{array}{l} \neg\tilde{F}' \vee \neg\tilde{F}'_1 \\ \tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}' \end{array}$$

   - *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow \forall x \cdot \tilde{F}'_1)$ dans $f(F)$, les clauses:*

   $$\begin{array}{l} \neg\tilde{F}' \vee \tilde{F}'_1 \\ \neg\tilde{F}'_1[f(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}' \end{array}$$

     où $\mathcal{V}(F') = (x_1, \ldots, x_n)$ et f est un nouveau symbole de fonction (il s'agit d'un symbole de Skolem).

- *Pour chaque formule $\forall(\tilde{F}' \Leftrightarrow \exists x \cdot \tilde{F}'_1)$ dans $f(F)$, les clauses:*

$$\neg\tilde{F}' \vee \tilde{F}'_1[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$$
$$\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$$

  où $\mathcal{V}(F') = (x_1, \ldots, x_n)$ et f est un nouveau symbole de fonction (il s'agit d'un symbole de Skolem).

Posons S l'ensemble de clauses $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$. Il est clair que S est satisfiable (lorsqu'elle est vue comme une conjonction) si et seulement si $\hat{F}$ est satisfiable. (Il s'agit de la skolémisation et la mise en forme clausale du cours.)

Si la taille de F est n, alors F a au plus $n-1$ sous-formules libres non atomiques, donc le cardinal de $f(F)$ est d'au plus $n-1$. Pour chaque élément de $f(F)$, nous fabriquons des ensembles de clauses de taille au plus 7, et nous fabriquons en plus la clause $\neg\tilde{F}$. La taille de S est donc d'au plus $7(n-1)+1$, donc d'au plus $7n$.

De plus, par les questions 2 et 5, $\hat{F}$, donc S, est satisfiable si et seulement si F est invalide, autrement dit S est insatisfiable si et seulement si F est valide. En ce sens, on peut dire que S est une forme clausale de $\neg F$: la satisfiabilité est préservée. Le point remarquable est que la taille de la forme clausale du cours (qui est essentiellement le développement complet d'un tableau) peut être de taille exponentielle en $|F|$, mais que celle-ci est de taille linéaire.

7. (3) On rappelle que l'hyperrésolution positive est la règle suivante :

$$\dfrac{\overbrace{N}^{\text{noyau}} \qquad \overbrace{E_1 \quad E_2 \quad \ldots \quad E_q}^{\text{électrons (clauses positives)}}}{\underbrace{R_q}_{\text{hyperrésolvant (clause positive)}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N \quad E_1}{R_1} \quad E_2}{\ddots}}{R_{q-1}} \qquad E_q}{R_q}$$

ou seule R_q est réellement produite, et non $R_1, \ldots, R_{q-1}$. Montrer que la formule close F est valide si et seulement s'il existe une dérivation par hyperrésolution positive de la clause $\tilde{F}$ à partir de $S(F)$. Plus généralement, on définit l'ordre strict $>$ par : $\tilde{F}'\sigma' > \tilde{F}''\sigma''$ si et seulement si F' est une sous-formule libre stricte de F'', pour toutes sous-formules F' et F'' de F; montrer que F est valide si et seulement s'il existe une dérivation par hyperrésolution positive $>$-semi-ordonnée de la clause $\tilde{F}$ à partir de $S(F)$.

Par les questions 2 et 5, F est valide si et seulement si $\hat{F}$ est insatisfiable, et par la question 6 si et seulement si $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est insatisfiable. Par la complétude de l'hyperrésolution positive (théorème 25 du chapitre sur la résolution, associé à la définition 28 montrant qu'il s'agit d'une résolution sémantique), F est donc valide si et seulement s'il existe une réfutation par hyperrésolution positive de $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$.

Ceci ne suffit pas encore pour trouver une dérivation de $\tilde{F}$ à partir de $S(F)$, car cette réfutation ne contient pas nécessairement de sous-dérivation de la clause $\tilde{F}$. On pourrait faire une preuve consistant à montrer que toutes les étapes de résolution élémentaire avec $\tilde{F}$ utilisées dans une réfutation par hyperrésolution positive peuvent être permutées vers le bas, mais ceci revient à rejouer les arguments de complétude des stratégies ordonnées ou semi-ordonnées du cours. Autant donc réutiliser les résultats du cours. Notamment, et comme indiqué dans l'énoncé, nous utilisons le fait que l'hyperrésolution positive semi-ordonnée *est complète (théorème 27 du chapitre sur la résolution), et choisissons comme ordre l'ordre $>$ de l'énoncé. Il s'agit bien d'un ordre strict, de plus il est stable, ce qui permet d'utiliser le résultat de complétude ci-dessus; en effet, si $\tilde{F}'\sigma' > \tilde{F}''\sigma''$, alors F' est une sous-formule libre stricte de F'', et en particulier $\tilde{F}'\sigma'\theta > \tilde{F}''\sigma''\theta$ pour toute substitution θ.*

En hyperrésolution positive semi-ordonnée par l'ordre stable $>$, le littéral sur lequel on résout est contraint à être maximal pour $>$. Soit π une réfutation de $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ par hyperrésolution positive semi-ordonnée utilisant $>$.

Dans toute étape de résolution élémentaire dans π où le littéral sur lequel on résout est $\tilde{F}$:

$$\frac{C_1 \vee \neg\tilde{F} \qquad \overbrace{\tilde{F} \vee C_2}^{\text{électron (clause positive)}}}{C_1 \vee C_2}$$

nous montrons maintenant que : (1) C_1 est nécessairement vide, et : (2) C_2 est vide.

On montre (1) en montrant que toute clause apparaissant dans la réfutation est soit $\neg\tilde{F}$, soit ne contient pas $\neg\tilde{F}$, par récurrence sur le nombre de clauses produites à partir de l'ensemble initial de clauses $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$: c'est vrai pour l'ensemble initial de clauses; si on résout entre une clause ne contenant pas $\neg\tilde{F}$ et un électron, alors le résolvant obtenu ne contient clairement pas $\neg\tilde{F}$ (puisque les électrons sont des clauses positives); et si on résout entre $\neg\tilde{F}$ et un électron, alors on résout forcément sur $\tilde{F}$ dans l'électron, et le résolvant ne contient plus $\neg\tilde{F}$ (noter que comme F est close, le mgu utilisé est la substitution vide). Donc (1) est toujours vrai.

Toute étape de résolution élémentaire où le littéral sur lequel on résout est $\tilde{F}$ est donc de la forme :

$$\frac{\neg\tilde{F} \qquad \overbrace{\tilde{F} \vee C_2}^{\text{électron (clause positive)}}}{C_2}$$

Maintenant, si C_2 est non vide, alors C_2 est une disjonction de littéraux de la forme $\tilde{F}'\sigma'$ (et on peut supposer sans perte de généralité que $\tilde{F}' \neq \tilde{F}$, sinon comme F est close on aurait $\tilde{F} = \tilde{F}'\sigma'$). Par définition F' est différente de F, donc $\tilde{F}'\sigma' > \tilde{F}$, autrement dit $\tilde{F}$ n'est pas $>$-maximal dans l'électron, contrairement à l'hypothèse que π est une réfutation semi-ordonnée par $>$. Il s'ensuite que C_2 est vide, autrement dit (2) est vrai.

Nous avons maintenant deux cas : ou bien la réfutation π ne résout jamais sur $\tilde{F}$, ou bien elle résout au moins une fois sur $\tilde{F}$. Mais le premier cas est impossible, car il impliquerait que $S(F)$ serait insatisfiable (par la correction de la résolution), mais ceci revient à dire que $f(F)$ serait insatisfiable, ce qui est impossible par la question 4.

Donc π résout au moins une fois sur $\tilde{F}$. Mais par les remarques (1) et (2) ci-dessus, la seule façon de résoudre sur $\tilde{F}$ est d'utiliser l'étape de résolution élémentaire :

$$\frac{\neg\tilde{F} \qquad \tilde{F}}{\Box}$$

autrement dit il s'agit de la dernière étape de π. La sous-dérivation qui aboutit à l'électron $\tilde{F}$ est alors une dérivation par hyperrésolution positive (et semi-ordonnée) de la clause $\tilde{F}$.

Remarquer que cette preuve fait appel à un ordre strict $>$ particulier, mais qu'en fait elle fonctionne pour tout ordre strict stable qui vérifie que $\tilde{F}'\sigma' > \tilde{F}\sigma$ pour toute sous-formule F' différente de F elle-même.

8. (2) On rappelle qu'une formule est en nnf ("negation normal form") si et seulement toute sous-formule libre niée est de la forme $\neg A$, où A est une formule atomique, et aucune sous-formule libre n'est une implication. Montrer que si F est une formule close en nnf, alors $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est satisfiable si et seulement si $S'(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est satisfiable, où $S'(F)$ est l'ensemble de clauses suivant :

   - Pour chaque sous-formule F' de la forme $\neg A$, où A est un atome : $\quad A \vee \tilde{F}'$
   - Pour chaque sous-formule F' de la forme $F'_1 \wedge F'_2$: $\quad \neg\tilde{F}'_1 \vee \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$

- Pour chaque sous-formule F' de la forme $F'_1 \vee F'_2$: $\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$, $\neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$
- Pour chaque sous-formule F' de la forme $\forall x \cdot F'_1$: $\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$, où $\mathcal{V}(F') = (x_1, \ldots, x_n)$ et $f_{F'}$ est un symbole de fonction (on suppose que la fonction $F' \mapsto f_{F'}$ est injective).
- Pour chaque sous-formule F' de la forme $\exists x \cdot F'_1$: $\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$

(Indication : si I est une interprétation satisfaisant $S'(F) \cup \{\tilde{F}\}$, alors elle induit une interprétation I_1 de $\mathcal{L}_1$, et la question 3 permet de réobtenir une interprétation I_2 de $\mathcal{L}_2$; montrer que I_2 satisfait nécessairement $S(F) \cup \{\tilde{F}\}$ aussi.)

En déduire que la formule close en nnf F est valide si et seulement s'il existe une dérivation par hyperrésolution positive $>$-semi-ordonnée de $\tilde{F}$ à partir de $S'(F)$.

Si $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est satisfiable, $S'(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est satisfiable aussi, car ce dernier est un sous-ensemble du précédent.

Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que si $S'(F) \cup \{\tilde{F}\}$ est satisfiable, alors $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ l'est aussi. Pour une question technique liée aux quantifications universelles, nous remarquons que les clauses $\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$, pour toute $F' = \forall x \cdot F'_1$ sont des skolémisées de formules $(\forall x \cdot \tilde{F}'_1) \Rightarrow \tilde{F}'$; et nous étudions l'ensemble de formules $S''(F)$ défini comme $S'(F)$, sauf que dans le cas où F' est une quantification universelle $\forall x \cdot F'_1$, on produit la formule $(\forall x \cdot \tilde{F}'_1) \Rightarrow \tilde{F}'$ au lieu de la clause $\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$. Comme $S'(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est une skolémisation de $S''(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$, l'un est satisfiable si et seulement si l'autre l'est.

Soit donc I une interprétation des symboles de $\mathcal{L}_2$ qui satisfait $S''(F) \cup \{\tilde{F}\}$. I induit une interprétation I_1 des symboles de $\mathcal{L}_1$, et on peut donc construire une interprétation I_2 des symboles de $\mathcal{L}_2$ telle que : (1) $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho = [\![F']\!]I_1\rho$ pour toute affectation ρ et pour toute sous-formule libre F' de F, d'après la question 3.

Nous montrons par récurrence structurelle sur F' que: (2) $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ pour toute affectation ρ et pour toute sous-formule libre F' de F, où $\leq$ est l'ordre sur les booléens défini par faux$\leq$vrai :

- *Si F' est un atome A, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho = [\![A]\!]I_1\rho$ (par (1)) $= [\![A]\!]I\rho$ (parce que I_1 est la restriction de I à $\mathcal{L}_1$) $= [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ (parce que $\tilde{F}' = A$ par définition). On a donc une égalité dans ce cas.*
- *Si F' est une négation d'atome A, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho = \dot{\neg}[\![A]\!]I_1\rho$ (par (1)) $= \dot{\neg}[\![A]\!]I\rho$. Comme I satisfait $S''(F)$, I satisfait en particulier la clause $A \vee \tilde{F}'$. Donc $[\![A \vee \tilde{F}']\!]I\rho$ est vrai, c'est-à-dire que $[\![A]\!]I\rho$ est vrai ou $[\![\tilde{F}']\!]I\rho$ est vrai. Dans le premier cas, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho = \dot{\neg}[\![A]\!]I\rho$ est faux et donc $\leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ parce que le faux est $\leq$ à tout booléen; dans le deuxième cas, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ parce que tout booléen est $\leq$ à vrai.*
- *Si F' est une conjonction $F'_1 \wedge F'_2$, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est la conjonction de $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2\rho$ et de $[\![\tilde{F}'_2]\!]I_2\rho$; mais ces deux derniers sont $\leq$ à $[\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho$ et $[\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho$ respectivement, donc par monotonie de la conjonction sémantique $\dot{\wedge}$, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho \dot{\wedge} [\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho = [\![\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2]\!]I\rho$. Par hypothèse I satisfait la clause $\neg\tilde{F}'_1 \vee \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$, autrement dit la formule $\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2 \Rightarrow \tilde{F}'$, donc $[\![\tilde{F}'_1 \wedge \tilde{F}'_2]\!]I\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$. Par transitivité de $\leq$, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$.*
- *Si F' est une disjonction $F'_1 \vee F'_2$, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est la disjonction de $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2\rho$ et de $[\![\tilde{F}'_2]\!]I_2\rho$; mais ces deux derniers sont $\leq$ à $[\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho$ et $[\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho$ respectivement, donc par monotonie de la disjonction sémantique $\dot{\vee}$, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho \dot{\vee} [\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho$. Mais par hypothèse la clause $\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$ est satisfaite par I, donc $[\![\tilde{F}'_1]\!]I\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ et de même $[\![\tilde{F}'_2]\!]I\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$ par la clause $\neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$. Donc $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho \dot{\vee} [\![\tilde{F}']\!]I\rho = [\![\tilde{F}']\!]I\rho$.*
- *Si F' est une quantification universelle $\forall x \cdot F'_1$, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est la conjonction de tous les $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2(\rho[v/x])$ pour v dans le domaine de I (qui est aussi celui de I_2). Pour chaque v, $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2(\rho[v/x]) \leq [\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ par récurrence, donc $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est $\leq$ à la conjonction de tous les $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ lorsque v parcourt le domaine de I, c'est-à-dire à $[\![\forall x \cdot \tilde{F}'_1]\!]I\rho$. Mais par hypothèse I satisfait $S''(F)$, donc en particulier la formule $(\forall x \cdot \tilde{F}'_1) \Rightarrow \tilde{F}'$ (c'est ici que nous avons besoin de $S''(F)$ plutôt que de $S'(F)$); il s'ensuit que $[\![\forall x \cdot \tilde{F}'_1]\!]I\rho = leq[\![\tilde{F}']\!]I\rho$. Par transitivité, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$.*

$$\frac{}{\Phi \longrightarrow \Phi}\,(Ax)$$

$$\frac{\Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(\wedge \longrightarrow_1) \qquad \frac{\Gamma, \Phi_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(\wedge \longrightarrow_2) \qquad \frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1 \qquad \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(\longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma_1, \Phi_1 \longrightarrow \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \Phi_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Phi_1 \vee \Phi_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(\vee \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2}\,(\longrightarrow \vee_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Phi_1, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \Phi_2 \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(\Rightarrow\longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2}\,(\longrightarrow\Rightarrow_1) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2}\,(\longrightarrow\Rightarrow_2)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \longrightarrow \Delta}\,(\neg \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\Phi}\,(\longrightarrow \neg)$$

$$\frac{\Gamma, \Phi[t/x] \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \cdot \Phi \longrightarrow \Delta}\,(\forall \longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Phi[y/x], \Delta}{\Gamma \longrightarrow \forall x \cdot \Phi, \Delta}\,(\longrightarrow \forall)\ \ (y \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma, \Phi[y/x] \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \cdot \Phi \longrightarrow \Delta}\,(\exists \longrightarrow)\ \ (y \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Phi[t/x], \Delta}{\Gamma \longrightarrow \exists x \cdot \Phi, \Delta}\,(\longrightarrow \exists)$$

$$\frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi \qquad \Gamma_2, \Phi \longrightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(Cut) \qquad \frac{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2}\,(W)$$

Figure 1: Le système de séquents **Cl**

- *Si F' est une quantification existentielle $\exists x \cdot F'_1$, alors $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est la disjonction de tous les $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2(\rho[v/x])$ pour v dans le domaine de I (ou I_2). Pour chaque v, $[\![\tilde{F}'_1]\!]I_2(\rho[v/x]) \leq [\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ par récurrence, donc $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho$ est $\leq$ à la disjonction (i.e., au maximum) de tous les $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ lorsque v parcourt le domaine de I. Mais I satisfait la clause $\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$, donc $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x]) \leq [\![\tilde{F}']\!]I(\rho[v/x])$, et ce dernier est égal à $[\![\tilde{F}']\!]I\rho$ parce que x n'est pas libre dans $\tilde{F}'$. En particulier, la disjonction (le max) de tous les $[\![\tilde{F}'_1]\!]I(\rho[v/x])$ est $\leq$ à $[\![\tilde{F}']\!]I\rho$. Par transitivité, $[\![\tilde{F}']\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}']\!]I\rho$.*

Maintenant par (2) avec $F' = F$, on obtient $[\![\tilde{F}]\!]I_2\rho \leq [\![\tilde{F}]\!]I\rho$ pour toute affectation ρ, mais comme I satisfait la clause $\neg\tilde{F}$, nécessairement $[\![\tilde{F}]\!]I\rho$, donc aussi $[\![\tilde{F}]\!]I_2\rho$, est faux. Donc I_2 satisfait aussi $\neg\tilde{F}$. De plus par (1) I_2 satisfait $S(F)$. $S(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est donc bien satisfiable.

Par le même argument qu'en question 7, F est valide si et seulement si $S'(F) \cup \{\neg\tilde{F}\}$ est insatisfiable, si et seulement s'il existe une dérivation de $\tilde{F}$ par hyperrésolution positive $>$-semi-ordonnée à partir de $S'(F)$. (L'argument de la question 7 reposait sur le fait qu'aucune clause de $S(F)$ ne contenait le littéral $\neg\tilde{F}$, et que toutes les clauses de $S(F)$ sont composées d'atomes $\tilde{F}'$ avec F' sous-formule libre de F; ces propriétés sont aussi valables pour $S'(F)$.)

Partie II.

Nous allons définir ici un système de séquents **Cl** différent de celui du cours, mais qui se prêtera mieux à la recherche de preuve en avant, c'est-à-dire à partir des axiomes (alors que la méthode des tableaux fait une recherche en arrière, à partir du but). Les séquents $\Gamma \longrightarrow \Delta$ sont tels que Γ et Δ sont des *ensembles* finis (en particulier la règle de contraction est implicite). Γ, Δ dénote l'union de Γ et de Δ.

On se convaincra aisément que **Cl** est correct pour la sémantique de la logique classique, c'est-à-dire que si $\Gamma \longrightarrow \Delta$ est prouvable en **Cl**, alors $\models \Gamma \longrightarrow \Delta$, autrement dit pour toute interprétation I et toute affectation ρ, si $I, \rho \models F$ pour tout $F \in \Gamma$, alors $I, \rho \models G$ pour au moins une formule G de Δ.

1. (1) Montrer que toute preuve π du système **LK** du cours se traduit en une preuve π' de **Cl** du même séquent; et de plus, que si π n'utilise pas la coupure Cut, alors π' non plus. En déduire que **Cl** est complet, même sans la coupure (Cut).

   Par récurrence structurelle sur π. Si π se termine sur un axiome :

$$\frac{}{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Phi, \Delta}\, Ax$$

   alors π' est :

$$\frac{\dfrac{}{\Phi \longrightarrow \Phi}\,(Ax)}{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Phi, \Delta}\,(W)$$

   Si π se termine sur une règle $\wedge R$:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\, \wedge R$$

   alors π' est :

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi'_2\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\, (\longrightarrow \wedge)$$

   où π'_1 et π'_2 sont obtenues par hypothèse de récurrence à partir de π_1 et π_2 respectivement. Les cas des règles $\vee L$ (se traduisant en $(\vee \longrightarrow)$), $\Rightarrow L$ (en $(\Rightarrow \longrightarrow)$), $\neg L$ (en $(\neg \longrightarrow)$), $\neg R$ (en $(\longrightarrow \neg)$), $\forall L$ (en $(\forall \longrightarrow)$), $\forall R$ (en $(\longrightarrow \forall)$), $\exists L$ (en $(\exists \longrightarrow)$), $\exists R$ (en $(\longrightarrow \exists)$) et Cut (en (Cut)) sont similaires.

   Si π se termine sur une règle $\wedge L$:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma, \Phi_1, \Phi_2 \longrightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\, \wedge L$$

   alors π' vaut :

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma, \Phi_1, \Phi_2 \longrightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(\wedge \longrightarrow_1)}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(\wedge \longrightarrow_2)$$

   où π'_1 est obtenue par hypothèse de récurrence à partir de π_1, et où le dernier séquent n'est rien d'autre que le séquent souhaité $\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta$, parce que nos séquents sont construits à partir d'ensembles de formules.

   Si π se termine sur une règle $\vee R$:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2}\, \vee R$$

   alors π' vaut :

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2, \Phi_2}\,(\longrightarrow \vee_1)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2}\,(\longrightarrow \vee_2)$$

où π_1' est obtenue par hypothèse de récurrence à partir de π_1, et où le dernier séquent n'est rien d'autre que le séquent souhaité $\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \vee \Phi_2$, parce que nos séquents sont construits à partir d'ensembles de formules.

Et si π se termine par $\Rightarrow R$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1 \\ \Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2} \Rightarrow R$$

alors π' vaut :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1' \\ \Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta, \Phi_2\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2} (\longrightarrow\Rightarrow_1)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2} (\longrightarrow\Rightarrow_2)$$

où π_1' est obtenue par hypothèse de récurrence à partir de π_1, et où le dernier séquent n'est rien d'autre que le séquent souhaité $\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$, parce que nos séquents sont construits à partir d'ensembles de formules.

Il s'ensuit que **Cl**, *même sans (Cut), est complet, car* **LK** *est lui-même complet: si $\models \Gamma \longrightarrow \Delta$, alors $\Gamma \longrightarrow \Delta$ est dérivable en* **LK** *(resp. sans Cut), donc en* **Cl** *(resp. sans (Cut)).*

2. (2) Montrer que toute preuve π dans **Cl** de $\Gamma \longrightarrow \Delta$ sans coupure peut être transformée en une preuve π' de la forme :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_0' \\ \Gamma' \longrightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma \longrightarrow \Delta} (W)$$

où π_0' est une preuve de **Cl** qui n'utilise ni (Cut) ni l'affaiblissement (W), et $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.

Ceci revient à montrer que l'affaiblissement permute en-dessous de toutes les règles (sauf (Ax); et (Cut), qui ne sert à rien ici, mais pour laquelle on pourrait quand même le faire). Nous montrons le résultat par récurrence structurelle sur π.

Si π se termine sur (Ax), alors on pose π' égale π suivie d'une instance triviale de (W) (une dont la prémise égale la conclusion).

Si π se termine sur (W) :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1 \\ \Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2} (W)$$

alors π' vaut:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_{10}' \\ \Gamma' \longrightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2} (W)$$

où π_{10}' est la preuve π_0' de $\mathbf{Cl}_0$ *obtenue à partir de π_1 par hypothèse de récurrence, donc $\Gamma' \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_1, \Gamma_2$ et $\Delta' \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_1, \Delta_2$, ce qui justifie l'utilisation de (W) comme dernière règle.*

Si π se termine sur $(\wedge \longrightarrow_1)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_1 \\ \Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta} (\wedge \longrightarrow_1)$$

alors π_1 se transforme en une preuve π'_{10} de $\mathbf{Cl}_0$ *d'un séquent $\Gamma' \longrightarrow \Delta'$ avec $\Gamma' \subseteq \Gamma, \Phi_1$ et $\Delta' \subseteq \Delta$, suivie d'une instance de (W) aboutissant à $\Gamma, \Phi_1 \longrightarrow \Delta$ et nous avons deux cas. Si (cas 1) Γ' contient la formule active Φ_1, π' est :*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_{10}\\ \Gamma'', \Phi_1 \longrightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma'', \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta'}\,(\wedge \longrightarrow_1)}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(W)$$

où $\Gamma'' = \Gamma' \setminus \{\Phi_1\}$, et la règle (W) est justifiée par $\Delta' \subseteq \Delta$ et $\Gamma'' = \Gamma' \setminus \{\Phi_1\} \subseteq (\Gamma, \Phi_1) \setminus \{\Phi_1\} \subseteq \Gamma$. Et si (cas 2) Γ' ne contient pas la formule active Φ_1, alors π' est :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_{10}\\ \Gamma' \longrightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2 \longrightarrow \Delta}\,(W)$$

car $\Delta' \subseteq \Delta$ et $\Gamma' \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma, \Phi_1 \wedge \Phi_2$.

Le cas de toutes les autres règles à une prémise (sauf (W), $(\longrightarrow \forall)$, $(\exists \longrightarrow)$), c'est-à-dire $(\wedge \longrightarrow_2)$, $(\longrightarrow \vee_1)$, $(\longrightarrow \vee_2)$, $(\longrightarrow \Rightarrow_1)$, $(\longrightarrow \Rightarrow_2)$, $(\neg \longrightarrow)$, $(\longrightarrow \neg)$, $(\forall \longrightarrow)$, $(\longrightarrow \exists)$, est similaire.

Si π se termine sur $(\exists \longrightarrow)$, on doit aussi vérifier que, dans le cas 1 où Γ' contient la formule active $\Phi[y/x]$, l'objet π' suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_{10}\\ \Gamma'', \Phi[y/x] \longrightarrow \Delta'\end{array}}{\Gamma'', \exists x \cdot \Phi \longrightarrow \Delta'}\,(\exists \longrightarrow)}{\Gamma, \exists x \cdot \Phi \longrightarrow \Delta}\,(W)$$

est bien une preuve. Mais d'une part et comme ci-dessus, $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ et $\Delta' \subseteq \Delta$ (donc l'instance de (W) est valide), et d'autre part y n'est pas libre dans Γ'', Δ' (donc l'instance de $(\exists \longrightarrow)$ est valide) car y n'est pas libre dans le sur-ensemble Γ, Δ par hypothèse.

Le cas où π se termine sur $(\longrightarrow \forall)$ est similaire.

Si π se termine sur $(\longrightarrow \wedge)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(\longrightarrow \wedge)$$

alors par hypothèse de récurrence π_1 se transforme en une preuve π'_{10} de $\mathbf{Cl}_0$ *d'un séquent $\Gamma'_1 \longrightarrow \Delta'_1$ avec $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma_1$ et $\Delta'_1 \subseteq \Delta_1, \Phi_1$, suivie d'une instance de (W); et de même π_2 se transforme en une preuve π'_{20} de* $\mathbf{Cl}_0$ *d'un séquent $\Gamma'_2 \longrightarrow \Delta'_2$ avec $\Gamma'_2 \subseteq \Gamma_2$ et $\Delta'_2 \subseteq \Delta_2, \Phi_2$, suivie d'une instance de (W). Nous avons alors trois cas. Si (cas 1) Δ'_1 ne contient pas la formule active Φ_1, alors π' est juste :*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_{10}\\ \Gamma'_1 \longrightarrow \Delta'_1\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(W)$$

car $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_1, \Gamma_2$ et $\Delta'_1 \subseteq \Delta_1$ (car $\Delta'_1 \subseteq \Delta_1, \Phi_1$ et Φ_1 n'est pas dans Δ_1) $\subseteq \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Si (cas 2) Δ'_2 ne contient pas la formule active Φ_2, alors π' est juste :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_{20}\\ \Gamma'_2 \longrightarrow \Delta'_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(W)$$

car $\Gamma_2' \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1, \Gamma_2$ et $\Delta_2' \subseteq \Delta_2$ (car $\Delta_2' \subseteq \Delta_2, \Phi_2$ et Φ_2 n'est pas dans Δ_2) $\subseteq \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Et si (cas 3) Δ_1' contient Φ_1 et Δ_2' contient Φ_2, alors π' est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi'_{10}}{\Gamma_1' \longrightarrow \Delta_1'', \Phi_1} \quad \dfrac{\vdots\ \pi'_{20}}{\Gamma_2' \longrightarrow \Delta_2'', \Phi_2}}{\Gamma_1', \Gamma_2' \longrightarrow \Delta_1'', \Delta_2'', \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(\longrightarrow \wedge)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(W)$$

où $\Delta_1'' = \Delta_1' \setminus \{\Phi_1\}$ et $\Delta_2'' = \Delta_2' \setminus \{\Phi_2\}$, donc $\Delta_1'' \subseteq \Delta_1$, $\Delta_2'' \subseteq \Delta_2$ et donc $\Delta_1'', \Delta_2'' \subseteq \Delta_1, \Delta_2$.
Le cas des règles $(\vee \longrightarrow)$ et $(\Rightarrow\longrightarrow)$ est similaire.

3. (1) On nomme $\mathbf{Cl}_0$ le système $\mathbf{Cl}$ sans (Cut) ni (W). Déduire de la question précédente que $\mathbf{Cl}_0$ est correct et complet pour les séquents de la forme $\longrightarrow F$, où F est une formule unique (autrement dit que $\models F$ implique que $\longrightarrow F$ est prouvable en $\mathbf{Cl}_0$).

   ***$\mathbf{Cl}_0$** est correct, en tant que sous-système de **$\mathbf{Cl}$**. Pour ce qui est de la complétude, si $\models F$, alors par la question 1 il existe une preuve de $\longrightarrow F$ dans **$\mathbf{Cl}$**, donc par la question 2, il en existe une preuve de la forme :*

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_0'}{\Gamma' \longrightarrow \Delta'}}{\longrightarrow F}\,(W)$$

   où π_0' est une preuve de $\mathbf{Cl}_0$. Mais pour que (W) soit applicable, il est nécessaire que $\Gamma' \subseteq \emptyset$ (donc Γ' est vide) et $\Delta' \subseteq \{F\}$. On a donc deux cas: Δ' vide et $\Delta' = \{F\}$. Mais le premier cas est impossible, car il n'existe aucune preuve du séquent vide en $\mathbf{Cl}_0$ (aucune règle ne peut y mener). Donc π_0' est une preuve de $\longrightarrow F$ en $\mathbf{Cl}_0$. Comme F est arbitraire, $\mathbf{Cl}_0$ est complet pour les séquents de la forme $\longrightarrow F$.

4. (2) On suppose que F est une formule close en nnf. On appellera preuve *normale* toute preuve de $\mathbf{Cl}_0$ telle que: (1) tout axiome $A \longrightarrow A$ est tel que A est un atome, et (2) $(\longrightarrow \neg)$ n'est utilisée que juste après un axiome (Ax), autrement dit sous forme :

$$\dfrac{\dfrac{}{A \longrightarrow A}\,(Ax)}{\longrightarrow A, \neg A}\,(\longrightarrow \neg)$$

   Montrer que si $\longrightarrow F$ est prouvable, alors il a une preuve normale.

   Nous allons d'abord montrer (1), c'est-à-dire que nous pouvons restreindre les instances de (Ax) à porter sur des atomes En effet, on transforme les instances non atomiques de (Ax) comme suit :

$$\dfrac{}{F_1 \wedge F_2 \longrightarrow F_1 \wedge F_2}\,(Ax) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F_1 \longrightarrow F_1}\,(Ax) \quad \dfrac{}{F_2 \longrightarrow F_2}\,(Ax)}{F_1, F_2 \longrightarrow F_1 \wedge F_2}\,(\longrightarrow \wedge)}{F_1 \wedge F_2 \longrightarrow F_1 \wedge F_2}\,(\wedge \longrightarrow)$$

$$\dfrac{}{F_1 \vee F_2 \longrightarrow F_1 \vee F_2}\,(Ax) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F_1 \longrightarrow F_1}\,(Ax) \quad \dfrac{}{F_2 \longrightarrow F_2}\,(Ax)}{F_1 \vee F_2 \longrightarrow F_1, F_2}\,(\vee \longrightarrow)}{F_1 \vee F_2 \longrightarrow F_1 \vee F_2}\,(\longrightarrow \vee)$$

$$\dfrac{}{\forall x \cdot F_1 \longrightarrow \forall x \cdot F_1}\,(Ax) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F_1[y/x] \longrightarrow F_1[y/x]}\,(Ax)}{\forall x \cdot F_1 \longrightarrow F_1[y/x]}\,(\forall \longrightarrow)}{\forall x \cdot F_1 \longrightarrow \forall x \cdot F_1}\,(\longrightarrow \forall)$$

$$\dfrac{}{\exists x\cdot F_1 \longrightarrow \exists x\cdot F_1}\,(Ax) \qquad \longrightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F_1 \longrightarrow F_1}\,(Ax)}{F_1 \longrightarrow \exists x\cdot F_1}\,(\longrightarrow \exists)}{\exists x\cdot F_1 \longrightarrow \exists x\cdot F_1}\,(\exists \longrightarrow)$$

Ce processus termine parce que le multi-ensemble des tailles des axiomes présents dans la preuve diminue strictement à chaque étape.

Il suffit maintenant de montrer que les instances de $(\longrightarrow \neg)$ peuvent être permutées vers le haut de toute preuve de $\longrightarrow F$, et en fait de n'importe quel séquent. Ceci établira (2). L'idée est que la formule principale dans $(\longrightarrow \neg)$ est $\neg A$ à droite, où A est un atome parce que F est en nnf. Mais l'atome A (à gauche dans la prémisse de $(\longrightarrow \neg)$) ne peut pas être principal dans la règle au-dessus de $(\longrightarrow \neg)$, et on peut alors permuter les deux règles. Le cas le plus compliqué est celui où la règle utilisée juste au-dessus de $(\longrightarrow \neg)$ est $(\longrightarrow \wedge)$, où on doit distinguer deux sous-cas (qui se recouvrent) :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1, A \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(\longrightarrow \wedge)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \neg A}\,(\longrightarrow \neg) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1, A \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1\end{matrix}}{\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1, \neg A}\,(\longrightarrow \neg) \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \neg A}\,(\longrightarrow \wedge)$$

et :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2, A \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2}\,(\longrightarrow \wedge)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \neg A}\,(\longrightarrow \neg) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1, \Phi_1\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2, A \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2\end{matrix}}{\Gamma_2 \longrightarrow \Delta_2, \Phi_2, \neg A}\,(\longrightarrow \neg)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \neg A}\,(\longrightarrow \wedge)$$

Le cas de $(\vee \longrightarrow)$ est similaire. Dans tous les autres cas, il n'y a qu'une possibilité pour permuter $(\longrightarrow \neg)$ au-dessus de la règle. Ce processus termine, parce que par exemple il fait décroître strictement la somme des hauteurs des sous-preuves au-dessus de chaque instance de $(\longrightarrow \neg)$. Toute forme normale pour ce processus est alors par construction une preuve normale.

5. (1) On suppose que F est une formule close en nnf, et on considère une preuve normale π de $\longrightarrow F$ dans $\mathbf{Cl}_0$. Montrer que tous les séquents de π sauf les instances de (Ax) sont *positifs*, autrement dit de la forme $\longrightarrow \Delta$.

   Par récurrence sur π. Plus précisément, nous montrons par récurrence sur la profondeur d'une sous-preuve π' de π dans π (où la profondeur est le nombre de règles appliquées entre la conclusion de π' et celle de π) que si π' n'est pas une instance de (Ax), alors π' a pour séquent final un séquent positif. Si π' se termine par $(\longrightarrow \wedge)$, $(\longrightarrow \vee_1)$, $(\longrightarrow \vee_2)$, $(\longrightarrow \forall)$ et $(\longrightarrow \exists)$, alors toutes les prémisses sont encore des séquents droits. D'autre part π' ne peut pas se terminer par une règle gauche, sinon π' elle-même aurait pour séquent final un séquent non positif. π' ne peut pas se terminer sur une règle d'implication non plus, parce que F est en nnf. Et finalement, si π' se termine sur une règle $(\longrightarrow \neg)$, alors le résultat est vrai par définition d'une preuve normale.

6. (3) On suppose encore que F est close et en nnf. Montrer que le système de règles d'inférence $\mathbf{Cl}_F$ de la figure 2 est correct et complet pour F, autrement dit que F est valide si et seulement si $\longrightarrow F$ est prouvable dans $\mathbf{Cl}_F$. (On note dom σ le domaine d'une substitution σ, et le mgu de deux substitutions σ_1 et σ_2 est défini comme la substitution la plus générale σ telle que $\sigma_1\sigma = \sigma_2\sigma$.)

   La procédure consistant à produire des séquents par ces règles dans le but d'obtenir le séquent $\longrightarrow F$ s'appelle la *méthode inverse*.

   Correction : on montre que tout séquent dérivable dans $\mathbf{Cl}_F$ est valide (vrai dans toute interprétation et toute affectation). C'est une récurrence structurelle sur la dérivation, dont toutes les étapes sont évidentes. Donc si $\longrightarrow F$ est dérivable, alors F est valide.

$$\frac{}{\longrightarrow A, \neg A}\,(Ax_F)$$

pour toute sous-formule libre atomique A de F

$$\frac{\longrightarrow \Delta_1, F'_1\sigma_1 \qquad \longrightarrow \Delta_2, F'_2\sigma_2}{\longrightarrow \Delta_1\sigma, \Delta_2\sigma, F'\sigma_1\sigma}\,(\longrightarrow \wedge_F)$$

pour toute sous-formule libre $F' = F'_1 \wedge F'_2$ de F

si dom $\sigma_1 \subseteq \mathcal{V}(F'_1)$, dom $\sigma_2 \subseteq \mathcal{V}(F'_2)$,
et σ est le mgu de σ_1 et σ_2
après renommage d'un des séquents

$$\frac{\longrightarrow \Delta, F'_i\sigma}{\longrightarrow \Delta, F'\sigma}\,(\longrightarrow \vee_{Fi}),\ i \in \{1,2\}$$

pour toute sous-formule libre $F' = F'_1 \vee F'_2$ de F

$$\frac{\longrightarrow \Delta, F'_1\sigma[y/x]}{\longrightarrow \Delta, F'\sigma}\,(\longrightarrow \forall_F)$$

pour toute sous-formule libre $F' = \forall x \cdot F'_1$ de F

si dom $\sigma \subseteq \mathcal{V}(F')$
et y n'est pas libre dans $\Delta, F'\sigma$

$$\frac{\longrightarrow \Delta, F'_1\sigma[t/x]}{\longrightarrow \Delta, F'\sigma}\,(\longrightarrow \exists_F)$$

pour toute sous-formule libre $F' = \exists x \cdot F'_1$ de F

si dom $\sigma \subseteq \mathcal{V}(F')$
et t est un terme quelconque

$$\frac{\longrightarrow \Delta, F'\sigma_1, F'\sigma_2}{\longrightarrow \Delta\sigma, F'\sigma_1\sigma}\,(Factor)$$

pour toute sous-formule libre F' de F,

dom $\sigma_1 \subseteq \mathcal{V}(F')$, dom $\sigma_2 \subseteq \mathcal{V}(F')$, et $\sigma = mgu(\sigma_1, \sigma_2)$

Figure 2: Le système $\mathbf{Cl}_F$

Complétude : Si F est valide, d'après les questions précédentes $\longrightarrow F$ a une preuve normale π en $\mathbf{Cl}_0$. On montre que: (*) pour toute preuve normale π de $\longrightarrow \Delta$ dans $\mathbf{Cl}_0$, π peut être transformée en une dérivation π' d'un séquent $\longrightarrow \Delta'$ tel que Δ est une instance de Δ' (à contraction des formules ayant mêmes instances près), par récurrence structurelle sur π.

Si π se termine par $(\longrightarrow \neg)$, comme la preuve est normale, elle est de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{}{A\sigma \longrightarrow A\sigma}\,(Ax)}{\longrightarrow A\sigma, \neg A\sigma}\,(\longrightarrow \neg)$$

où la formule axiome est atomique, et (par la propriété de la sous-formule que $\mathbf{Cl}_0$ a clairement) est donc une instance $A\sigma$ d'une sous-formule atomique libre A de F; alors π' est juste l'instance correspondante de (Ax_F) déduisant $\longrightarrow A, \neg A$.

Si π se termine par $(\longrightarrow \wedge)$, par la question 5, π est de la forme :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1 \\ \longrightarrow \Delta_1, F_1'\sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi_2 \\ \longrightarrow \Delta_2, F_2'\sigma\end{matrix}}{\longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, F'\sigma}$$

où $F' = F_1' \wedge F_2'$ est une sous-formule libre de F (par la propriété de la sous-formule). Par hypothèse de récurrence, on a une dérivation π_1' dans $\mathbf{Cl}_F$ de $\longrightarrow \Delta_1', F_1'\sigma_{11}, \ldots, F_1'\sigma 1k_1$ telle que ce dernier séquent ait une instance égale à $\longrightarrow \Delta_1, F_1'\sigma$, autrement dit telle qu'il existe une substitution σ_1' telle que $\Delta_1'\sigma_1' = \Delta_1$ (à contraction près) et $F_1'\sigma_{11}\sigma_1' = \ldots = F_1'\sigma_{1k_1}\sigma_1' = F_1'\sigma$; et une dérivation π_2' similairement (remplacer les indices 1 par des 2). Comme $F_1'\sigma_{11}\sigma_1' = \ldots = F_1'\sigma_{1k_1}\sigma_1' = F_1'\sigma$, on peut compléter π_1' par $k_1 - 1$ applications de $(Factor)$ et obtenir une instance de $\longrightarrow \Delta_1', F_1'\sigma_{11}, \ldots, F_1'\sigma 1k_1$ de la forme $\longrightarrow \Delta_1'\sigma_1'', F_1'\sigma_{11}\sigma_1''$, de sorte que (par le fait que les mgu sont les plus généraux possibles) $F_1'\sigma$ est une instance de $F_1'\sigma_{11}\sigma_1''$; de même avec π_2', on obtient une dérivation de $\longrightarrow \Delta_2'\sigma_2'', F_2'\sigma_{21}\sigma_2''$, avec $F_2'\sigma$ instance de $F_2'\sigma_{21}\sigma_2''$. Posons $\sigma_1 = \sigma_{11}\sigma_1''$ et $\sigma_2 = \sigma_{21}\sigma_2''$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{dom}\ \sigma_1 \subseteq \mathcal{V}(F_1')$ et $\mathrm{dom}\ \sigma_2 \subseteq \mathcal{V}(F_2')$. Mais comme $F_1'\sigma$ est une instance de $F_1'\sigma_1$ et $F_2'\sigma$ est une instance de $F_2'\sigma_2$, pour toute variable x libre dans F', $x\sigma$ est une instance commune de $x\sigma_1$ et de $x\sigma_2$, donc σ unifie les versions renommées de $x\sigma_1$ avec $x\sigma_2$ (de sorte que ces termes n'aient aucune variable libre en commun). La substitution σ est donc une instance du mgu σ' de σ_1 et de σ_2, et donc le séquent final $\longrightarrow \Delta_1, \Delta_2, F'\sigma$ de π est une instance du séquent produit par la règle $(\longrightarrow \wedge_F)$ à partir des facteurs $\longrightarrow \Delta_1'\sigma_1'', F_1'\sigma_1$ et $\longrightarrow \Delta_2'\sigma_2'', F_2'\sigma_2$ de $\longrightarrow \Delta_1', F_1'\sigma_{11}, \ldots, F_1'\sigma 1k_1$ et $\longrightarrow \Delta_2', F_2'\sigma_{21}, \ldots, F_2'\sigma 2k_2$, à savoir $\longrightarrow \Delta_1'\sigma_1''\sigma', \Delta_2'\sigma_2''\sigma', F_1'\sigma_1\sigma'$.

Les cas des autres règles logiques sont similaires, quoique plus simples. On complète la preuve obtenue par hypothèse de récurrence par un nombre adéquat d'instances de $(Factor)$, et on applique la règle correspondante ($(\longrightarrow \vee_F)$ pour $(\longrightarrow \vee)$, etc.). Les règles de quantificateurs, en particulier, ne posent aucun problème, parce que la condition $\mathrm{dom}\ \sigma \subseteq \mathcal{V}(F')$ implique en particulier que x n'est pas dans le domaine de σ, donc $F'\sigma[y/x] = F'(\sigma \cup [y/x]) = F'\sigma$ dans le cas de $(\longrightarrow \forall_F)$, et $F'\sigma[t/x] = F'(\sigma \cup [t/x]) = F'\sigma$ dans le cas de $(\longrightarrow \exists_F)$.

Par (*), on déduit que pour toute preuve normale π de $\longrightarrow F$ dans $\mathbf{Cl}_0$, π peut être transformée en une dérivation π' d'un séquent $\longrightarrow \Delta'$ tel que F est une instance de Δ' (à contraction des formules ayant mêmes instances près). Mais comme F est close, Δ' est nécessairement égal à F, et on a ainsi obtenu une preuve de $\longrightarrow F$ dans $\mathbf{Cl}_F$.

7. (2) Comparer les méthodes de la question I.8 et de la question II.6.

   On remarque d'abord que dans la méthode de la question II.6, les seuls noyaux (clauses non positives) qui apparaîtront jamais dans l'ensemble de clauses sont ceux qui étaient déjà dans $S'(F)$. Il y a alors *une ressemblance formelle entre les noyaux de $S'(F)$ et les règles de $\mathbf{Cl}_F$:*

	Noyau	*Règle de* $\mathbf{Cl}_F$
$F' = F'_1 \wedge F'_2$	$\neg\tilde{F}'_1 \vee \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$	$(\longrightarrow \wedge_F)$
$F' = F'_1 \vee F'_2$	$\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$	$(\longrightarrow \vee_{F1})$
	$\neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}'$	$(\longrightarrow \vee_{F2})$
$F' = \forall x \cdot F'_1$	$\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$	$(\longrightarrow \forall_F)$
$F' = \exists x \cdot F'_1$	$\neg\tilde{F}'_1 \vee \tilde{F}'$	$(\longrightarrow \exists_F)$

et la règle de factorisation de la résolution correspond à la règle $(Factor)$ de la méthode inverse. En effet, l'hyperrésolution positive sur le premier noyau par exemple revient à faire une déduction de la forme décrite à gauche, et l'application de $(\longrightarrow \wedge_F)$ à faire la déduction de droite dans le diagramme suivant :

$$
\dfrac{\dfrac{N = \neg\tilde{F}'_1 \vee \neg\tilde{F}'_2 \vee \tilde{F}' \quad \begin{matrix}\vdots \\ C_1 \vee \tilde{F}'_1\sigma_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ C_2 \vee \tilde{F}'_2\sigma_2\end{matrix}}{\dfrac{}{C_1 \vee \neg\tilde{F}'_2\sigma_1 \vee \tilde{F}'\sigma_1}}}{C_1\sigma \vee C_2\sigma \vee \tilde{F}'\sigma_1\sigma}
\qquad
\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \longrightarrow \Delta_1, F'_1\sigma_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \longrightarrow \Delta_2, F'_2\sigma_2\end{matrix}}{\longrightarrow \Delta_1\sigma, \Delta_2\sigma, F'\sigma_1\sigma}\,(\longrightarrow \wedge_F)
$$

où dans les deux cas σ est un mgu (après renommage) de σ_1 avec σ_2.

Il y a cependant quelques différences. Si l'on cherche à traduire les preuves dans $\mathbf{Cl}_F$ en dérivation par hyperrésolution positive, on va vouloir traduire les séquents $\longrightarrow F'_1\sigma_1, \ldots, F'_m\sigma_m$, où $F'_1, \ldots, F'm$ sont des sous-formules libres de F, en des clauses $\tilde{F}'_1\sigma_1 \vee \ldots \vee \tilde{F}'_m\sigma_m$; mais cette traduction n'est pas unique, parce qu'une même sous-formule peut être une instance de plusieurs sous-formules libres différentes (par exemple $P(f(f(a)))$ est une instance à la fois de $P(f(x))$ et de $P(f(f(y)))$). On peut réparer cela en associant un nouveau symbole de prédicat $R_{F'}$ non pas à chaque sous-formule libre F', mais à chaque occurrence de sous-formule libre F'. Mais si l'on fait cela, les clauses positives initiales $A \vee \tilde{F}'$, avec $F' = \neg A$, ne suffisent plus, et l'on doit fabriquer au moins toutes les clauses de la forme $A\sigma \vee \tilde{F}'\sigma$ telles que A soit une sous-formule atomique non niée et $F' = \neg B$ est une sous-formule atomique niée, avec $\sigma = mgu(A, B)$. (C'est en réalité comme ça que l'on fait dans la méthode inverse.)

Un autre problème que l'on aura en effectuant cette traduction est que la règle $(\longrightarrow \forall_F)$ diffère de l'hyperrésolution sur le noyau $\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$ avec $F' = \forall x \cdot F'_1$ en ce que cette dernière utilise une herbrandisation du quantificateur, alors que la première se contente de vérifier que x n'a pas été remplacée, ou par une variable non libre dans le reste du séquent. La correspondance est cependant retrouvée par l'utilisation de techniques comme celles de skolémisation syntaxique (théorème 32 du chapitre sur la logique du premier ordre du cours).

On peut aussi chercher à traduire les preuves par hyperrésolution positive (resp. $>$-semi-ordonnées) en preuves de $\mathbf{Cl}_F$, mais encore une fois le point délicat est l'herbrandisation qui a été effectuée. En particulier, on a le droit d'effectuer une étape d'hyperrésolution à partir de la clause positive $C \vee \tilde{F}'_1\sigma$, où $F' = \forall x \cdot F'_1$, en utilisant le noyau $\neg\tilde{F}'_1[f_{F'}(x_1, \ldots, x_n)/x] \vee \tilde{F}'$, et ce même si $f_{F'}$ apparaît dans C. De telles étapes de preuve ne peuvent pas se traduire (au moins sans effort) en $\mathbf{Cl}_F$. Le fait de choisir une stratégie $>$-semi-ordonnée a cependant comme conséquence que $f_{F'}$ ne peut en réalité apparaître que dans des littéraux de C correspondant à F'_1 elle-même, et à aucune de ses sous-formules strictes.

Finalement, l'ordre $>$ utilisé correspond à une restriction de l'espace de recherche dans lequel on cherche toujours à résoudre sur les littéraux correspondant à des sous-formules libres les plus petites possibles. On peut utiliser une restriction analogue (mais pas la même) en $\mathbf{Cl}_F$: ceci revient à se restreindre à fabriquer des preuves de $\mathbf{Cl}_0$ dans lesquelles les règles (au moins celles des connecteurs propositionnels) sont appliquées dans le même ordre. Ceci préserve la complétude parce que toutes les règles propositionnelles permutent. On remarquera au passage que l'effet de la skolémisation dans la technique par hyperrésolution positive est de permettre toutes les permutations de règles : en fait, la seule propriété importante que $>$ doit avoir est que $\tilde{F}'\sigma' > F\sigma$ pour toute sous-formules F' stricte de F et toutes substitutions σ et σ'.

Pour plus d'informations, consulter Andrei Voronkov, Theorem proving in non-standard logics based on the inverse method, *Proceedings of the 11th Conference on Automated Deduction (CADE-11), Saratoga Spring, NY, USA, June 1992, D. Kapur, ed., Springer Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence 607, pages 648–662 (disponible en* `http://www.csd.uu.se/~voronkov/PAPERS/cade92.ps`*; en remontant vous trouverez d'autres papiers en lignes sur le sujet), ou de façon plus accessible* Gentzen-type systems and resolution rules, Part I: Propositional Logic, *in P. Martin-Löf and G. Mints, eds., COLOG'88, 1990, Springer Verlag Lectures Notes in Computer Science 417, pages 198–231. Ces papiers mènent à d'autres références, qu'il est toujours intéressant de consulter.*