TD5. Les interdits du partiel

Exercice 1

Et c'est Poupet qui fait s-n-m

1. Montrer qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est récursive si et seulement si A et son complémentaire sont récursivement énumérables.
2. Montrer qu'il existe des fonctions récursives totales f et g telles que, pour tout entier x, $\mathrm{Dom}\,\varphi_x = \mathrm{Im}\,\varphi_{f(x)}$ et $\mathrm{Im}\,\varphi_x = \mathrm{Dom}\,\varphi_{g(x)}$.
3. Existe-t-il une fonction récursive g telle que $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\varphi_{g(x)}(y) = \sum_{i=0}^{x} \varphi_{x^2+y+i}(y+i)$?
4. Montrer le théorème du point fixe de Kleene : pour toute fonction récursive totale f il existe un entier x tel que $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$.
5. Montrer qu'il existe deux entiers x et y tels que $\varphi_x(0) = y$ et $\varphi_y(0) = x$.

Exercice 2

Réels calculables

Un nombre réel a est dit *récursif* s'il est *récursivement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récursives F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| |a| - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récursif.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, e et π sont récursifs.
3. La coupure dans les rationnels associée au nombre réel a se code par la relation suivante sur les entiers :
$$\mathcal{A} = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 / j \neq 0 \text{ et } \frac{i}{j} < |a| \right\}$$
Montrer que le réel a est récursif si et seulement si la relation $\mathcal{A}$ est récursive.
4. Montrer que le nombre réel a est récursif si et seulement s'il existe un *développement décimal récursif* de a, c'est-à-dire une fonction récursive $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$ on ait $H(n) \leq 9$ et $|a| = \sum_{n=0}^{\infty} H(n).10^{-n}$.
5. Montrer que l'ensemble des réels récursifs forme un sous-corps dénombrable de $\mathbb{R}$, stable par quelques fonctions dont on donnera des exemples.
6. Donner un exemple de réel non récursif.

Exercice 3

Arrêt de production

On note, pour n entier, W_n le domaine de définition de φ_n. Un ensemble A est dit *productif* s'il existe une fonction récursive totale unaire g telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (W_n \subseteq A \Rightarrow g(n) \in A \setminus W_n)$$

1. Un ensemble productif peut-il être récursivement énumérable ?

2. Soit A et B deux ensembles de naturels. Montrer que si A se réduit[1] à B et si A est productif, alors B est productif.

3. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}/n \notin W_n\}$ est productif. En déduire là comme ça, paf, que le problème de l'arrêt est indécidable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme décidant si la machine de Turing numéro n s'arrête sur l'entrée x.

4. Pour la route, montrer que $\{n \in \mathbb{N}/W_n$ est fini$\}$ et $\{n \in \mathbb{N}/\varphi_n$ est injective$\}$ sont productifs.

5. Montrer que pour toute fonction récursive totale unaire g, il existe une fonction récursive totale k telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ W_{k(n)} = W_n \cup \{g(n)\}$. En déduire que tout ensemble productif contient un ensemble récursivement énumérable infini.

Exercice 4 *En bonus*

1. Montrer qu'il existe des fonctions c et e telles que pour tous x et y,

$$\varphi_{c\langle x,y\rangle} = \varphi_y \circ \varphi_x \text{ et } \varphi_x(y) = \varphi_{e(y)}(x)$$

2. Montrer que :
- il existe des ensembles infinis d'entiers dont aucune partie infinie n'est récursivement énumérable ;
- de toute partie infinie récursivement énumérable de $\mathbb{N}$ on peut extraire une sous-partie infinie récursive ;
- tout ensemble infini d'entiers contient une partie infinie non récursivement énumérable (décrivez-en une).

3. Montrer que si f est une fonction totale, strictement croissante et telle que $\mathrm{Im}\, f$ soit récursif, alors f est récursive. Construire des contre-exemples si l'on ne suppose plus que f est strictement croissante, ou si l'on ne suppose plus qu'elle est totale.

[1] On dit que A se réduit à B quand il existe une fonction récursive totale f telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B)$. Mais chut, normalement cette information n'est pas disponible à votre niveau d'accréditation. L'ordinateur est votre ami.