

## Informatique I

*Les algorithmes demandés ne seront pas écrits dans un langage de programmation particulier, mais dans un pseudo-langage impératif (genre Pascal ou C) pouvant comporter des expressions et instructions informelles, notamment en ce qui concerne les types de données classiques (par exemple:  $n :=$  le plus petit élément de la liste, ou pour tout sommet  $s$  du graphe...)*

*Tout algorithme proposé devra être justifié (terminaison, correction et, si la question l'exige, complexité).*

**La partie 1 est indépendante des suivantes.**

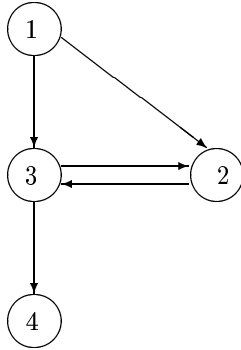
**La partie 3 peut être traitée en admettant les résultats de la partie 2.**

Dans tout le problème, on considère deux joueurs  $J_1$  et  $J_2$  qui jouent à déplacer un pion (le même pour les deux joueurs) le long des arcs d'un graphe orienté fini  $\mathcal{G}$ , à partir d'un sommet initial donné ( $J_1$  jouant le premier coup); le jeu ne s'arrête que si le pion est bloqué sur un sommet sans successeur. Une partie est donc un chemin maximal (fini ou infini) du graphe  $\mathcal{G}$ .

Donner une règle du jeu, c'est caractériser les parties gagnées par  $J_1$  (les autres étant gagnées par  $J_2$ : il n'y a pas de partie nulle).

On dira qu'un joueur a une **stratégie gagnante** depuis un sommet  $s$  de  $\mathcal{G}$  si, le pion étant initialement posé en  $s$ , ce joueur peut gagner la partie quels que soient les coups joués par son adversaire (la stratégie étant un moyen de déterminer le coup à jouer suivant l'état de la partie, donc une fonction partiellement définie de l'ensemble des chemins dans l'ensemble des sommets).

Exemple:



On décide que les parties gagnées par  $J_1$  sont celles qui aboutissent en 4.

Depuis le sommet 1,  $J_1$  a une stratégie gagnante (il joue en 2:  $J_2$  doit jouer en 3, et  $J_1$  joue en 4).

Depuis le sommet 2, c'est  $J_2$  qui a une stratégie gagnante ( $J_1$  doit jouer en 3, et  $J_2$  revient à la position initiale 2: ainsi,  $J_2$  évitera indéfiniment le sommet 4).

## 1 Jeux finis

### Jeu dans un arbre

On suppose que  $\mathcal{G}$  est un arbre; une règle du jeu est une partition de l'ensemble des feuilles de l'arbre en deux sous-ensembles  $F_1$  et  $F_2$ , les parties aboutissant en  $F_1$  (respectivement:  $F_2$ ) étant gagnées par  $J_1$  (respectivement:  $J_2$ ).

#### Question 1

*Écrire un algorithme permettant de déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante depuis la racine de l'arbre, et donnant cette stratégie.*

### Jeu à jetons dans un graphe orienté sans circuit

On suppose que  $\mathcal{G}$  est un graphe sans circuit, dont tout sommet  $s$  contient un certain nombre  $n(s)$  de jetons. Le joueur qui déplace le pion vers un sommet ramasse les jetons de ce sommet;  $J_1$  gagne si, à la fin de la partie, il a ramassé strictement plus de jetons que  $J_2$ . (Noter que, pour ce jeu, le nombre de jetons du sommet initial n'a aucune importance.)

#### Question 2

*Écrire un algorithme, de complexité linéaire en la taille du graphe, permettant de déterminer depuis quels sommets du graphe  $J_1$  a une stratégie gagnante.*

*Suggestion: depuis tout sommet, chaque joueur a une stratégie permettant soit de gagner, soit de minimiser ses pertes.*

## 2 Jeux dans un graphe biparti

Dans toute cette partie, on suppose le graphe  $\mathcal{G}$  biparti: on note  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) l'ensemble des sommets depuis lesquels c'est à  $J_1$  (resp.  $J_2$ ) de jouer (la partie débute en un sommet de  $S_1$ ).

A tout ensemble  $X$  de sommets de  $\mathcal{G}$  on associe

- l'ensemble  $p(X)$  des sommets de  $\mathcal{G}$  qui ont un successeur dans  $X$ ;
- l'ensemble  $q(X)$  des sommets de  $\mathcal{G}$  qui ont au moins un successeur, et dont tout successeur est dans  $X$ .

### Jeu à positions gagnantes terminales

On se donne un ensemble  $F$  de sommets de  $\mathcal{G}$ , et on considère que les parties gagnées par  $J_1$  sont celles qui passent par un sommet de  $F$ . On pose  $F_1 = F \cap S_1$  et  $F_2 = F \cap S_2$ , et on note  $\varphi(F)$  l'ensemble des sommets depuis lesquels  $J_1$  a une stratégie gagnante.

#### Question 3

Montrer que  $\varphi(F)$  est le plus petit point fixe de la fonction  $f$  qui à un ensemble  $X$  de sommets de  $\mathcal{G}$  associe

$$f(X) = F_1 \cup p(F_2 \cup q(X))$$

*Suggestion: on montrera que  $\varphi(F)$  est un point fixe de  $f$ , et que, si  $X$  est un point fixe de  $f$ ,  $J_2$  a une stratégie gagnante depuis tout sommet du complémentaire de  $X$  dans  $S_1$ .*

*En déduire qu'il existe un algorithme quadratique en la taille de  $\mathcal{G}$  pour calculer  $\varphi(F)$ .*

#### Question 4

Donner un algorithme linéaire pour calculer  $\varphi(F)$ .

*Suggestion: à tout sommet  $s$  de  $S_2$ , associer un compteur qu'on initialise au nombre de ses successeurs, marquer récursivement les sommets depuis lesquels  $J_1$  est certain de gagner:*

- on marque les sommets de  $F$ ;
- quand on marque un sommet de  $S_2$ , on marque tous ses prédécesseurs;
- quand on marque un sommet de  $S_1$ , on décrémente le compteur de tous ses prédécesseurs; si un compteur passe à zéro, on marque le sommet correspondant.

### Jeu à positions gagnantes répétées

On se donne un ensemble  $F$  de sommets de  $\mathcal{G}$ , et on considère que les parties gagnées par  $J_1$  sont les parties qui passent infiniment souvent par un sommet de  $F$ .

#### Question 5

Montrer que l'ensemble des sommets depuis lesquels  $J_1$  a une stratégie gagnante est le plus grand point fixe de la fonction  $g$  définie par

$$g(X) = \varphi((F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap q(X)))$$

où  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\varphi$  sont définis comme dans le jeu à positions gagnantes terminales.

*En déduire un algorithme pour calculer cet ensemble; indiquer sa complexité.*

### 3 Jeux infinis

#### Jeu des mots à compléter

On se donne un langage rationnel  $L$  sur un alphabet fini  $A$ . Chaque joueur à son tour dit une lettre de  $A$ ; si la suite de ces lettres forme un mot de  $L$ , la partie s'arrête et  $J_1$  gagne; si la partie est infinie, c'est  $J_2$  qui gagne.

#### Question 6

*Indiquer un algorithme pour déterminer si  $J_1$  a une stratégie gagnante.*

*Suggestion: se ramener au cas d'un jeu à positions gagnantes terminales, dans un graphe biparti approprié.*

#### Jeu à jetons dans un graphe fini quelconque

Comme dans la première partie (question 2), on suppose que tout sommet  $s$  de  $\mathcal{G}$  contient un certain nombre  $n(s)$  de jetons. Le joueur qui déplace le pion vers un sommet ramasse les jetons de ce sommet;  $J_1$  gagne si, à la fin de la partie, il a ramassé strictement plus de jetons que  $J_2$ .

#### Question 7

*Donner un algorithme pour déterminer si, depuis un sommet donné  $s_0$ , le joueur  $J_1$  a une stratégie gagnante.*

*Suggestion: considérer le graphe des configurations possibles du jeu (une configuration étant la donnée de la position du pion, des sommets traversés pour la première fois par  $J_1$ , et des sommets traversés pour la première fois par  $J_2$ ), et se ramener au cas d'un jeu à positions gagnantes répétées.*