École polytechnique — Majeure informatique
Promotion 2004

Cours de conception et analyse d'algorithmes

PC 9 – Polynôme de Tutte et modèle d'Ising

21 mars 2007

Exercice 1. Calculer le polynôme des coupures du graphe complet K_4 son polynôme de Tutte et sa fonction de partition du modèle d'Ising.

Exercice 2. Polynôme chromatique Soit $G = (X, E)$ un graphe une k-coloration de G est une application γ de X dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ telle que pour tout $e = \{x, y\}$ on a $\gamma(x) \neq \gamma(y)$. On note $P_G(k)$ le nombre de k-colorations de G. Ainsi si G est le graphe ayant deux sommets et une arête qui les joint on a $P_G(k) = k(k-1)$

1. Montrer que si G est un arbre à n sommets on a :

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$$

2. Quelle est la valeur de $P_{C_n}(k)$ pour le cycle C_n à n sommets ? Et celle de $P_{K_n}(k)$ pour le graphe complet à n sommets ?

3. Soit e une arête de G qui n'est ni une boucle ni un isthme G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant e et G'' celui en contractant e. Donner la valeur de $P_G(k)$ en fonction de $P_{G'}(k)$ et $P_{G''}(k)$.

4. Soit e une arête de G qui est un isthme G'' le graphe obtenu à partir de G en contractant e.

Donner la valeur de $P_G(k)$ en fonction de $P_{G''}(k)$.

5. Déduire des deux questions précédentes que

$$P_G(k) = (-1)^{n-1} k T_G(1-k, 0)$$

où $T_G(x, y)$ est le polynôme de Tutte du graphe G.

Exercice 3. k**-flots**

Un k-flot sur un graphe orienté G est une fonction à valeurs dans $\{1, \ldots, k-1\}$ sur les arêtes telle que la différence entre le flot entrant et le flot sortant en chaque sommet soit égale à 0 modulo k.

i) Montrer que le nombre de k-flots sur un circuit de longueur n est $k-1$.

ii) Montrer que le nombre de k-flots sur un graphe G est indépendant de l'orientation des arêtes de G.

iii) Le polynôme des flots d'un graphe G est le polynôme $F_G(k)$ qui donne le nombre de k-flots sur G. Montrer que si G a n sommets et m arêtes alors

$$F_G(k) = (-1)^{m-n+1}\, k\, T_G(0, 1-k).$$

Exercice 4. MaxCut, Approximation

Dans la détermination de l'energie minimale du modèle d'Ising on est amené à résoudre le problème *MAXCUT* suivant :

Soit $G = (X, E)$ un graphe symétrique, déterminer une partition de X en $X = X_1 \cup X_2$ telle que la coupure $E(X_1, X_2)$ soit de taille maximum.

On se propose de donner un algorithme approché pour cette question puis de donner une autre preuve de ce que le problème exact est NP-complet.

On considère l'algorithme qui consiste à initialiser X_1, X_2 de façon quelconque puis à chercher itérativement s'il existe un sommet dont le passage de l'une des classes à l'autre augmente la taille de la coupure. Tant que l'on trouve un tel sommet on effectue ce passage, puis une fois que l'on en trouve plus, on déclare que la coupure est maximale.

i) Soit X_1, X_2 la partition donnée par l'algorithme ci-dessus et soit Y_1, Y_2 la partition optimale. On note $V_1 = X_1 \cap Y_1$, $V_2 = X_1 \cap Y_2$, $V_3 = X_2 \cap Y_1$ et $V_4 = X_2 \cap Y_2$. Enfin pour tout couple i, j on note $m_{i,j}$ le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans V_i et l'autre dans V_j.

Montrer que pour tout sommet de V_1 le nombre de ses voisins dans V_2 est inférieur ou égal au nombre de ses voisins dans $V_3 \cup V_4$, autrement dit,

$$m_{1,2} \leqslant m_{1,3} + m_{1,4}.$$

En déduire :

$$m_{1,2} + m_{3,4} + m_{1,4} + m_{2,3} \leqslant 2(m_{1,3} + m_{1,4} + m_{2,3} + m_{2,4})$$

ii) Déduire de ce qui précède que l'algorithme donne une coupure dont la taille est minorée par la moitié de la taille de la coupure maximum.

Soit $U = \wedge_{i=1,p} u_i$ un ensemble de 2-clauses sur n variables x_j (où $u_i = t_i \vee z_i$). On suppose qu'elles sont toutes distinctes et qu'elles contiennent chacune deux variables différentes. On construit le graphe $G(U)$ ayant pour ensemble de sommets $X = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, c_1, c_2, \ldots c_{2p}\}$ et dont les arêtes sont les paires suivantes associées aux clauses $u_i = t_i \vee z_i$

$$\{c_{2i-1}, t_i\}, \{c_{2i}, z_i\}, \{t_i, z_i\}$$

iii) Dessiner le graphe associé à la formule

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$$

iv) Montrer que s'il existe k clauses satisfaisables dans U alors le graphe $G(U)$ admet une partition X_1, X_2 telle que X_1 contienne $c_1, c_2, \ldots c_{2p}$ et donnant une coupure de taille supérieure à $2k$.

v) Montrer que le probleme *MAX-2SAT* se réduit polynomialement au problème *MAXCUT-COMP* suivant :

Soit $G = (X, E)$ un graphe, K un entier, Y un sous-ensemble de X et q paires $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, \ldots, q)$ de sommets de G disjointes ; déterminer s'il existe une partition X_1, X_2 de X telle que :

- $Y \subset X_1$
- Pour tout $i = 1, \ldots, q$ $\{a_i, b_i\} \cap X_1 \neq \emptyset$ et $\{a_i, b_i\} \cap X_2 \neq \emptyset$
- La coupure $E(X_1, X_2)$ est de taille supérieure ou égale à K.

On admettra que MAXCUT-COMP se réduit polynomialement à *MAXCUT*, en déduire que *MAXCUT* est NP-complet.

Exercice 5. Arbres recouvrants.

Soit un graphe G non orienté dont l'ensemble de sommets est $1, 2, \ldots, n$ et dont l'ensemble des arêtes est colorié en $n-1$ couleurs ; ceci signifie que l'on a une partition $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{n-1}$ telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Le problème consiste à chercher un sous-ensemble T de E de taille maximale satisfaisant les deux conditions suivantes :

- $(T1)$ T ne contient pas de cycle
- $(T2)$ Toutes les arêtes de T sont de couleurs différentes

On voit que la taille de l'optimum est au plus de $n-1$; si elle est atteinte, T est alors un arbre recouvrant dont les arêtes sont toutes de couleurs différentes.

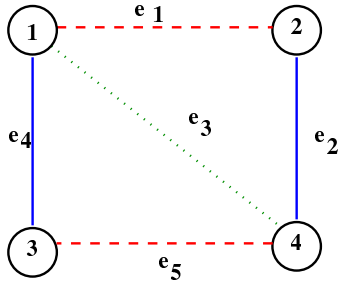
Pour résoudre le problème, on se propose dans un premier temps d'utiliser l'algorithme glouton suivant :

1. $T = \emptyset$
2. `Tant qu'`il existe une arête e de couleur différente des arêtes de T et ne formant pas de cycle avec T `faire` $T := T \cup \{e\}$.

1. Montrer sur l'exemple ci-dessous, dans lequel les colorations des arêtes sont :

$$E_1 = \{e_1, e_5\}, \quad E_2 = \{e_2, e_4\}, \quad E_3 = \{e_3\}$$

que l'algorithme glouton ne donne pas toujours l'optimum.



Dans les questions qui suivent, on suppose que l'algorithme glouton termine avec un sous-ensemble T, contenant $k < n-1$ arêtes, et satisfaisant $(T1)$ et $(T2)$. On construit alors un graphe orienté biparti $G_T = (X \cup Y, A)$, dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arêtes $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ de G ; X est constitué des e_i qui ne sont pas dans T et Y des e_j qui sont dans T ; les arcs A de G_T sont de deux types :

- Pour $x \in X$ et $y \in Y$, $(x, y) \in A$ si x est de même couleur que y ou si x a une couleur différente de toutes celles des arêtes de T.
- Pour $x \in X$ et $y \in Y$, $(y, x) \in A$ si $T - y + x$ n'a pas de cycle.

2. Construire le graphe G_T correspondant à l'exemple que vous avez donné comme réponse à la Question 1.

On note X_1 le sous-ensemble de X constitué des arêtes qui ont une couleur différente de celles de T et X_2 le sous-ensemble de X constitué des arêtes qui ne forment pas de cycle avec T.

3. Que peut-on dire de $X_1 \cap X_2$ si T est obtenu par l'algorithme glouton ? A-t-on toujours $X = X_1 \cup X_2$?

4. Pour l'exemple considéré montrer que certains chemins dans le graphe G_T permettent de construire un ensemble T' satisfaisant $(T_1), (T_2)$ et de taille supérieure à celle de T.

5. Les sous-ensembles satisfaisant $(T_1), (T_2)$ forment-ils un matroïde, l'intersection de deux matroïdes ? Justifiez votre réponse.