École polytechnique | Majeure informatique
Promotion 2004

Cours « Conception et analyse d'algorithmes »
TD no 4 – Mariages stables et programmation linéaire

7 février 2007

1. On considère un ensemble de trois entreprises $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et un ensemble $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ d'étudiants en quête de stages. Chaque étudiant a classé les entreprises et chaque entreprise a classé les étudiants partenaires éventuels suivant les tableaux suivants :

Entreprises					*Etudiants*				
x_1	:	y_2	y_1	y_3	y_1	:	x_1	x_3	x_2
x_2	:	y_2	y_3	y_1	y_2	:	x_3	x_1	x_2
x_3	:	y_1	y_2	y_3	y_3	:	x_3	x_2	x_1

i) On a décidé de faire un tirage au sort qui a donné l'affectation suivante

$$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ (x_3, y_3)$$

Est- elle stable ?

ii) Tracer le graphe dont les sommets sont les six couplages possibles et dont les arcs relient les couplages u à v si v s'obtient à partir de u après une discussion entre un stagiaire y_i et un reponsable x_j qui se préfèrent mutuellement à la situation attribuée par u.

iii) Comment trouve-t-on les couplages stables sur ce graphe ?

iv) Montrer que le graphe de l'exemple admet un circuit. Comment s'interprête ce fait ?

2. Nombre de mariages stables

On suppose qu'il existe des choix donnés par n hommes et n femmes permettant de construire k mariages stables. Montrer que l'on peut construire une liste de choix pour $2n$ hommes et une pour $2n$ femmes de façon telle qu'il existe $2k^2$ mariages stables. En déduire l'existence de configurations de choix présentant un nombre exponentiel de mariages stables.

3. Plus court chemin.

Etant donné un graphe orienté G avec arêtes valuées par une fonction positive c, et deux sommets s et t de G, on souhaite trouver un plus court chemin de s à t dans G.

On associe à chaque sommet v une valeur $d(v)$. On considère le programme linéaire suivant :

$$\max(d(t) - d(s))$$

sous les contraintes : $\forall (u,v) \in E \quad d(v) - d(u) \leq c(u,v)$.

(i.) Montrer que pour toute fonction d satisfaisant aux contraintes de ce PL, $d(t) - d(s)$ est une borne inférieure à la longueur du plus court chemin de s à t dans G.

(ii.) Montrer que la fonction d égale à la longueur d'un plus court chemin de s à v satisfait aux contraintes du PL.

(iii.) En déduire que la solution optimale du programme linéaire est exactement égale à la longueur du plus court chemin de s à t.

(iv.) Ecrire le dual du programme linéaire, et l'interpréter.

4. Adéquation linéaire

Un physicien prend des mesures d'une fonction $y(x)$ qu'il sait linéaire. Les résultats sont donnés sous la forme de couples (x_i, y_i), qui sont les paramètres d'entrée du problème. Il souhaite trouver la droite qui "correspond le mieux" à ces données, en ce sens que la distance *verticale* maximale entre un point (x_i, y_i) et la droite soit la plus petite possible.

(i.) Modéliser ce problème comme un problème d'optimisation de type "min max" avec contraintes linéaires.

(ii.) Le réduire à un problème de programmation linéaire. Ecrire le programme dual.

(iii.) Pourquoi peut-il être préférable d'en résoudre le dual ?

5. Ordonnancement préemptif sur des machines parallèles

Un ensemble de tâches $\{1, \cdots, n\}$ doit être exécuté sur m machines parallèles. Chaque tâche a une durée p_i et peut être exécutée de manière préemptive, c'est-à-dire avec interruptions : l'exécution de la tâche i peut commencer sur une machine, être interrompue et continuer ultérieurement sur une autre machine, sachant toutefois que deux parties d'une même tâche ne peuvent être exécutées en même temps sur des machines différentes.

i. Montrer que la durée totale minimale d'un tel ordonnancement est égale à

$$\max \left(\max_{1 \leq i \leq n} p_i, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{m} \right)$$

et qu'un tel ordonnancement peut être déterminé en $O(n)$.

ii. Chaque tâche a maintenant une fenêtre horaire $[r_i, d_i]$ pendant laquelle elle doit être entièrement exécutée. Donner un système linéaire de taille polynomiale en n et ne dépendant pas de m permettant de déterminer s'il est possible d'exécuter toutes les tâches. En déduire un algorithme de minimisation de la durée totale de l'ordonnancement.